

$$\hat{\mathbb{1}} \subset \mathbb{1} = \begin{cases} \mathbb{1} \in \mathbb{1} \\ \text{poly} \bigvee_{\mathbb{1}^k \in \mathbb{1}} ()^n + \sum_k \mathbb{1}^k ()^k \\ \mathbb{T}^n + \sum_k \mathbb{1}^k \mathbb{T}^k = 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{1} \in \hat{\mathbb{1}} \Leftrightarrow \bigvee_{\text{mod}} \langle \mathbb{1} : \mathbb{1}^1 \dots \mathbb{1}^n \rangle_{\mathbb{1}} \supset \mathbb{1} \langle \mathbb{1} : \mathbb{1}^1 \dots \mathbb{1}^n \rangle_{\mathbb{1}} \\ \langle \mathbb{1} : \mathbb{1}^1 \dots \mathbb{1}^n \rangle_{\mathbb{1}} \stackrel{\mathbb{1}}{\leftarrow} \langle \mathbb{1} : \mathbb{1}^1 \dots \mathbb{1}^n \rangle_{\mathbb{1}}$$

$$\Rightarrow : \mathbb{T}^n + \sum_k \mathbb{1}^k \mathbb{T}^k = 0 \Rightarrow \mathbb{1} \mathbb{T}^{n-1} = \mathbb{T}^n = - \sum_k \mathbb{1}^k \mathbb{T}^k \Rightarrow \mathbb{1} \langle \mathbb{T}^k : k \in n \rangle_{\mathbb{1}} \subset \langle \mathbb{T}^k : k \in n \rangle_{\mathbb{1}}$$

$$\Leftarrow : \mathbb{1} \langle \mathbb{1} : \mathbb{1}^1 \dots \mathbb{1}^n \rangle_{\mathbb{1}} \supset \langle \mathbb{1} : \mathbb{1}^1 \dots \mathbb{1}^n \rangle_{\mathbb{1}} \Rightarrow \mathbb{1} \mathbb{1}^i = \mathbb{1}^i_j \mathbb{1}^j$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{1} \delta_j^i - \mathbb{1}^i_j}_{\mathbb{1}} \mathbb{1}^j = 0 \Rightarrow 0 = \det \mathbb{1} \delta_j^i - \mathbb{1}^i_j = \overline{\det () \delta_j^i - \mathbb{1}^i_j}$$

$\hat{\mathbb{1}} \subset \mathbb{1}$ subring

$$\mathbb{1} \in \hat{\mathbb{1}} \Rightarrow \mathbb{1} \langle \mathbb{1}^i \rangle_{\mathbb{1}} \subset \langle \mathbb{1}^i \rangle_{\mathbb{1}} \Rightarrow \mathbb{1} \mathbb{1}^i = \mathbb{1}^i_j \mathbb{1}^j$$

$$\mathbb{1} + \mathbb{1} \mathbb{1}^i \mathbb{1}^k = \mathbb{1} \mathbb{1}^i \mathbb{1}^k + \mathbb{1}^i \mathbb{1} \mathbb{1}^k = \underbrace{\mathbb{1}^i_j \mathbb{1}^j}_{\mathbb{1}} \mathbb{1}^k + \mathbb{1}^i \underbrace{\mathbb{1}^k_{\ell} \mathbb{1}^{\ell}}_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}^i_j \mathbb{1}^j \mathbb{1}^k + \mathbb{1}^i_{\ell} \mathbb{1}^{\ell} \mathbb{1}^k \in \langle \mathbb{1}^i \mathbb{1}^k \rangle_{\mathbb{1}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{1} + \mathbb{1} \langle \mathbb{1}^i \mathbb{1}^k \rangle_{\mathbb{1}} \subset \langle \mathbb{1}^i \mathbb{1}^k \rangle_{\mathbb{1}}$$

$$\mathbb{1} \mathbb{1}^i \mathbb{1}^k = \mathbb{1} \mathbb{1}^i \mathbb{1}^k = \underbrace{\mathbb{1}^i_j \mathbb{1}^j}_{\mathbb{1}} \underbrace{\mathbb{1}^k_{\ell} \mathbb{1}^{\ell}}_{\mathbb{1}} = \underbrace{\mathbb{1}^i_j \mathbb{1}^k_{\ell}}_{\mathbb{1}} \mathbb{1}^j \mathbb{1}^{\ell} \in \langle \mathbb{1}^i \mathbb{1}^k \rangle_{\mathbb{1}} \Rightarrow \mathbb{1} \langle \mathbb{1}^i \mathbb{1}^k \rangle_{\mathbb{1}} \subset \langle \mathbb{1}^i \mathbb{1}^k \rangle_{\mathbb{1}}$$

$\hat{\mathbb{1}} \subset \mathbb{1}$ subfield

$$\mathbb{T}^n + \sum_k^n \mathbb{1}^k \mathbb{T}^k = 0 \Rightarrow 0 = \mathbb{T}^{-n} \overbrace{\mathbb{T}^n + \sum_k^n \mathbb{1}^k \mathbb{T}^k} = 1 + \sum_k^n \mathbb{1}^k \mathbb{T}^{k-n} = 1 + \sum_k^n \mathbb{1}^k \mathbb{T}^{-n-k}$$