Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik

Skript zur Vorlesung

Mathematik II

Marburg, Sommersemester 2002

Prof. Dr. Harald Upmeier

ausgearbeitet in LaTeX von Christoph Scheid
Scheid@students.uni−marburg.de

http://students.uni-marburg.de/~Scheid/Mathe/Mathe2Skript-130603.pdf

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Folgen, Konvergenz, Stetigkeit

1.1 Der Körper der reellen Zahlen

Definition. K **Körper** $\Leftrightarrow$

$\exists$ Verkn¸pfungen

$$\underset{(x,y)}{K \times K} \underset{\longmapsto}{\xrightarrow{+}} \underset{x+y}{K}$$

$$\underset{(x,y)}{K \times K} \underset{\longmapsto}{\xrightarrow{\cdot}} \underset{xy}{K}$$

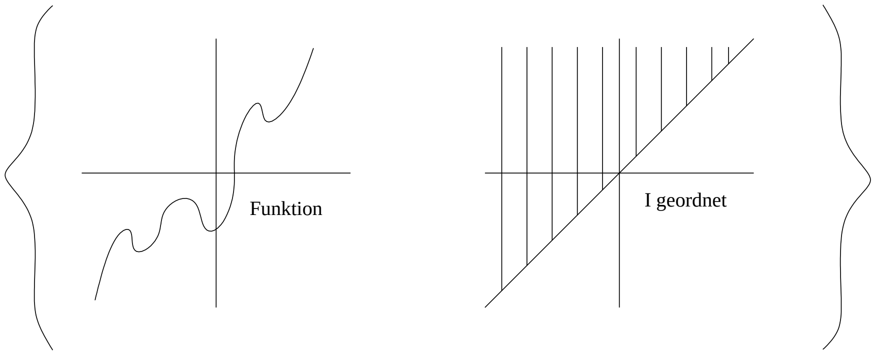
mit Eigenschaften: $\forall x, y, z \in K$ gilt

$\oplus$	$(x+y)+z = x+(y+z)$	assoz.
	$x+y = y+x$	kommut.
	$x+0 = x = 0+x$	neutr.
	$x+-x = 0 = -x+x$	inv.
$\odot$	$(xy)\,z = x\,(yz)$	assoz.
	$xy = yx$	kommut.
	$x1 = x = 1x$	neutr.
	$xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$, $x^{-1} = \frac{1}{x}$ Inverses, falls $x \neq 0$	inv.
$\odot\oplus$	$(x+y)\,z = xz + yz \qquad x\,(y+z) = xy + xz$	distrib.

Beispiel. $K = \mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$ Körper der rationalen Zahlen

Definition. K *geordnet* (mit Ordnung) $\Leftrightarrow$ $\exists$ Relation $C = \{(x,y) \in K \times K \mid x \leq y\}$
mit Eigenschaften (Ordnungsaxiome)

$x \leq y \leq z \Longrightarrow x \leq z$	transitiv
$x \leq x$	reflexiv
$x \leq y \leq x \Longrightarrow x = y$	anti-sym.



Definition. *K total geordnet (linear geordnet)*

$\Longleftrightarrow$ f¸r alle $x, y \in K : x \leq y$ oder $y \leq x$ (stets vergleichbar)

$\Longleftrightarrow$ f¸r alle $x, y \in K : x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$

Definition. *verträgliche* Ordnung (*kompatibel*)

K Körper mit Ordnung $\leq$, dann Ordnung *verträglich* (kompatibel)

$\Leftrightarrow$ (A) $x \leq y, z \in K \Longrightarrow x + z \leq y + z$
(M) $x \geq 0, y \geq 0 \Longrightarrow xy \geq 0$

Definition. K *geordneter* Körper $\Leftrightarrow$

(i) $(K, +, \cdot)$ Körper (10 Axiome)

(ii) $(K, \leq)$ Ordnung (3 Axiome) & totale Ordnung

(iii) kompatibel (A) & (M)

Beispiel. $\mathbb{Q}$ total geordneter Körper

Beispiel. nicht totale Ordnung
$K = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (Ebene) $K \ni (x,\ y)$

Definiere $\prec$ durch
$(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2) :\Longleftrightarrow x_1 \leq x_2$

Eigenschaften geordneter Körper

(Folgerungen aus Axiomen) K geordneter Körper

Proposition. *Für $x, y \in K$ sind äquivalent:*

(i) $x \leq y$

(ii) $0 \leq x - y$

(iii) $x - y \leq 0$

(iv) $-y \leq -x$

Proof. (Ringschluss)

(i) $\to$(ii) Sei $x \leq y$. Setze $z = -x \underset{(A)}{\Longrightarrow} 0 = x - x = x + -x \underset{(A)}{\leq} y + -x = y - x$

(ii) $\to$(iii) Es gelte $0 \leq y - x \Longrightarrow x - y = 0 + (x - y) \underbrace{\leq}_{(A)(z = x - y)} (y - x) - (y - x) = 0$

(iii) $\to$(iv) Es gelte $x - y \leq 0 \Longrightarrow -y = (x - y) - x \leq 0 - x = -x$

(iv) $\to$(i) Es gelte $-y \leq -x \Longrightarrow x = -y + (x + y) \leq -x + (x + y) \underbrace{=}_{(z = x + y) ass.}$

$(-x + x) + y = 0 + y = y$

$\square$

Proposition. *Seien* $x \geq 0,\ y \geq 0$ *positiv* , $x + y = 0 \Rightarrow x = 0 = y$

Allgemeiner

$x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2, x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \qquad \Longrightarrow \qquad y_1 = y_2,\ x_1 = x_2$

Proof. $x_2 + y_2 = x_1 + y_1 \underset{(A)}{\leq} x_2 + y_1 \underset{(A)}{\leq} x_2 + y_2 = x_1 + y_1$

$\underset{anti-sym}{\Rightarrow} x_2 + y_2 = x_2 + y_1 \underbrace{\Longrightarrow}_{(-x_2 \text{ Kürzung})} y_2 = y_1$

$\Rightarrow \quad x_1 + y_1 = x_2 + y_1 \underbrace{\Longrightarrow}_{(-y_1 \text{ Kürzung})} x_1 = x_2$ $\square$

Proposition. $x \leq y,\ z \geq 0 \Longrightarrow xz \leq yx$

Proof.
$x \leq y \underbrace{\Longrightarrow}_{(Prop(\ddot{a}quivalent))} y - x \geq 0,\ z \geq 0$
$\overset{(M)}{\Longrightarrow} 0 \leq (y - x)z \overset{(dist.)}{\Leftrightarrow} yz - xz$
$\underbrace{\Longrightarrow}_{(Prop(\ddot{a}quivalent))} xz \leq yz$

$\square$

Proposition.

(i) $x \leq 0 \leq y \Longrightarrow xy \leq 0$

(ii) $x \leq 0 \geq y \Longrightarrow xy \geq 0$

Proof. (i)
$x \leq 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{Prop(\ddot{a}quiv)} -x \geq -0 = 0 \quad \overset{(M)}{\Longrightarrow} 0 \leq (-x)y = -xy \quad \Longrightarrow xy \leq 0$

(ii)
$x \leq 0,\ y \leq 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{Prop(\ddot{a}quiv)} -x \geq 0,\ -y \geq 0 \quad \overset{(M)}{\Longrightarrow} 0 \leq (-x)(-y) = xy$

$\square$

Korollar. *K total geordneter Körper* $\Longrightarrow x^2 \geq 0.$ *Insbesondere* $1 > 0$

Proof. If $x \geq 0 \underset{(M)}{\Longrightarrow} x^2 = xx \geq 0$

If $x \leq 0 \underset{Prop1}{\Longrightarrow} -x \geq 0 \Longrightarrow x^2 = -x(-x) \underset{(M)}{\geq} 0$

Setze $x = 1 \Longrightarrow 1^2 = 1 \geq 0$, $1 \neq 0$

$\Longrightarrow 1 > 0$

$\square$

totale Ordnung

(M,$\leq$) Menge mit Ordnungsrelation $\leq$ (trans, refl, anti-sym)

M total geordnet $\Leftrightarrow$ f¸r alle $x, y \in M$ gilt:

- $x < y$
- $x = y$
- $x > y$

Lexikographische Ordnung (total)

A total geordnet (Alphabet)

$A = \{a, b, c, ..., x, y, z\}$, $\#A = 26$

$A = \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $\#A = 10$

M = Menge aller Wörter ¸ber A

$M \ni a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit $a_i \in A$

totale Ordnung auf M

$a_0 a_1 ...\ a_m \prec b_0 ...\ b_n :\Leftrightarrow$

(i) $\exists$ Index $i \leq m, n$

$a_0 = b_0, a_1 = b_1, .., a_i = b_i$

$a_{i+1} < b_{i+1}$ bzgl Ordnung von A

Beispiel. $A = \{0, 1, .., 9\}$ Ziffern

$112 \prec 13$, da $1 < 3$

Beispiel. $A = \{a, b, .., z\}$ Buchstaben

aachen $\prec$ *aalen* , da $c < l$

Spezialfall *acht* $\prec$ *achtung*

abstrakt $a_0 ... a_m \prec a_0 ... a_m a_{m+1} ... a_n$

Satz

Die Menge der Wörter M ist total geordnet bzgl lexikograph. Ordnung " $\prec$", falls $(A, \leq)$ total geordnet.

Sei $(K, +, \cdot)$ Körper, $(K, \leq)$ total geordnet

Beispiel

$\mathbb{R} = K$

R

−∞ −1 0 1 x < y ∞

x links von y $\mathbb{R}$ vollständig (keine L¸cken)

$\mathbb{Q} = K$

Q

−∞ −1 0 1 x < y ∞

Bild von $\mathbb{Q}$: viele L¸cken, unsichtbar

K total geordneter Körper

bereits gezeigt: $x \in K \Longrightarrow$

- $x > 0$
- $x = 0$
- $x < 0$ (Die Fälle schliessen sich aus $\Longrightarrow$ *anti-sym*)

totale Ordnung angewandt auf $(x, 0)$

$\Longrightarrow x^2 \geq 0, x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$

speziell

$1 = 1^2 > 0$

Inverses

Proposition 1.1.1.

(i) $x > 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} = x^{-1} > 0$

(ii) $xz \leq yz, z > 0 \Longrightarrow x \leq y$ "K¸rzung durch $z > 0$ "

(iii) $0 < x < y \Longrightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

Proof. (i) $x^{-1} = x^{-1} \cdot 1 = x^{-1} \cdot (x^{-1} \cdot x) = (x^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot x$
$= \underbrace{(x^{-1})^2}_{>0} \cdot \underbrace{x}_{>0} > 0$

(ii) $x = (xz)z^{-1} \underset{z^{-1}>0}{\leq} (yz)z^{-1} = y$

(iii) Nach (i) $x^{-1} > 0$
Nach Transitivität $y > 0$, nach (i) $y^{-1} > 0$
$y^{-1} = y^{-1} \cdot 1 = y^{-1}xx^{-1} < y^{-1}yx^{-1} = 1x^{-1} = x^{-1}$

$\square$

Absolutbetrag

K total geordneter Körper. Definiere $K \xrightarrow{|\cdot|} K$ durch

$$|x| := \quad \text{(disjunkt)} \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$|x| := \quad \text{(nicht disjunkt, aber symmetrisch)} \begin{cases} x & x \leq 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases}$$

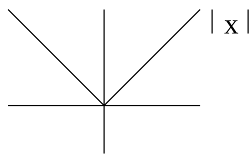


Bild **Betragsfunktion**

Eigenschaften

(i) $|x| \geq 0$

(ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $|-x| = |x|$

(iv) $-|x| \leq x \leq |x|$

Proof. (i) durch Fallunterscheidung (2 Fälle)

If $x \geq 0 \Longrightarrow |x| = x \geq 0$

If $x \leq 0 \Longrightarrow |x| = -x \geq 0$ (nach Prop)
$(x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x)$

(ii) klar
$x > 0 \Longrightarrow |x| = x > 0 \Longrightarrow |x| \neq 0$
$x = 0 \Longrightarrow |x| = 0$
$x < 0 \underset{Prop1}{\Longrightarrow} |x| = -x > 0 \Longrightarrow |x| \neq 0$

(iii)

If $x \geq 0 \underset{Prop1}{\Longrightarrow} -x \leq 0 \Longrightarrow |-x| \underset{Def}{=} -(-x) = x = |x|$

If $x \leq 0 \Longrightarrow -x \leq 0 \Longrightarrow |-x| \underset{Def}{=} -x \underset{Def}{=} |x|$

(iv)

If $\quad x \geq 0 \Longrightarrow |x| = x$

$-|x| = -x \underset{Prop1,trans}{\leq} 0 \leq x = |x|$

$-|x| \leq x \leq |x|$

If $\quad x \leq 0 \Longrightarrow |x| = -x$

$-|x| = x \leq 0 \underset{Prop1}{\leq} -x = |x|$ (refl, refl, trans)

□

Proposition 1.1.2. $|xy| = |x|\,|y|$

(Eine Art Homomorphismus, multiplikat. Eigenschaft)

Proof. 4 Fälle (genauer: 3 Fälle)

If $\quad x \geq 0, y \leq 0 \Longrightarrow xy \leq 0, -y \geq 0$

$|xy| = -xy = x(-y) = |x|\,|y|$

If $\quad x \leq 0, y \leq 0 \Longrightarrow xy \leq 0$

$|xy| = xy = (-x)(-y) = |x|\,|y|$

□

Frage: $|x+y| = |x| + |y|$ **? -fast nie.**

Aber: $|x+y| \leq |x| + |y|$ **Dreiecks-Ungleichung** **/**$\Delta - Ugl.$

Proposition 1.1.3. $a \geq 0$

$\Longrightarrow |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

Proof. "$\Longrightarrow$" $\quad$ Es gelte $|x| \leq a$

$\Longrightarrow -a \leq -|x|$

$\Longrightarrow -a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$

"$\Longleftarrow$" $\quad$ Es gelte $-a \leq x \leq a$

If $x \geq 0 \Longrightarrow |x| = x \leq a$

If $x \leq 0 \Longrightarrow |x| = -x \underset{Prop}{\leq} -(-a) = a$

□

Korollar. *Dreiecks-Ungleichung*
$|x+y| \leq |x| + |y|$

Proof. If $\ x \geq 0, y \geq 0 \ \Longrightarrow x + y \geq 0 \Longrightarrow |x+y| = x + y = |x| + |y|$

If $\ x \leq 0, y \leq 0 \ \Longrightarrow x + y \leq 0 \Longrightarrow -(x+y) = -x - y = (-x) + (-y) = |x| + |y|$

If $\ x \leq 0 \leq y \ \Longrightarrow x + y \leq 0 + y \leq |x| + y = |x| + |y|$

$x + y \geq x + 0 \geq x - |y| = -|x| - |y| = -(|x| + |y|) = -a$

$\Longrightarrow -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$

$\Longrightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$

If $y \leq 0 \leq x \implies$ analog

□

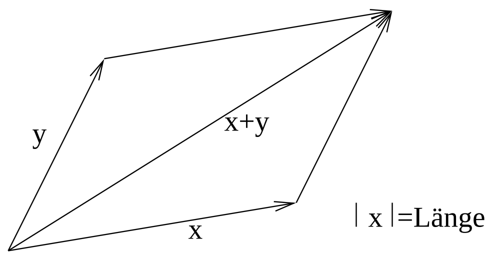


Bild $\Delta - Ugl.$

Korollar. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Proof. $|x| = |y + (x - y)| \leq_{\Delta - Ugl.} |y| + |x - y|$

$\implies |x| - |y| \leq |x - y| \qquad (=: a)$

$|y| = |x + (y - x)| \leq_{\Delta - Ugl.} |x| + |y - x|$

$\implies |y| - |x| \leq |y - x| = |-(y - x)| = |x - y| = a$

$\qquad |x| - |y| \geq -a$

$-a \leq |x| - |y| \leq a$

$\underset{Prop}{\implies} ||x| - |y|| \leq a = |x - y|$

□

$(K, +, \cdot, \leq)$ **total geordneter Körper** Beispiel $K = \mathbb{R}$ reelle Zahlen (2 Axiome fehlen noch)

Absolutbetrag $|\cdot|$

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

$\implies |xy| = |x| \cdot |y|$

$|x + y| \leq |x| + |y|$ Dreiecks-Ungleichung

Vorzeichen (Signum)

$x \in \mathbb{R}, sgn(x) =$ “$\frac{x}{|x|}$”

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Proposition 1.1.4. $x = sgn(x) \cdot |x|$

f¸r alle x (einschliesslich $x = 0$)

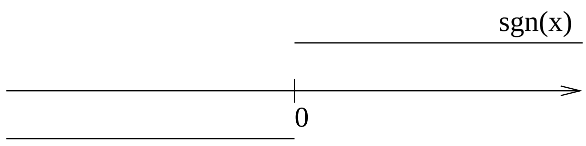


Bild Signumsfunktion (Sprung von -1 auf 0, dann auf 1)

1.2 Metrische Räume

Sei M Menge,

Definition. Eine Metrik auf M ist eine Funktion

auf Produktmenge $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ d : *distance*

$M \times M = \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in M\}$

$(x, y) \longmapsto d(x, y) =$ "Abstand" von x und y

mit folgenden Eigenschaften

(i) $\quad d(x, y) \geq 0$ Positivität

(ii) $\quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \qquad [d(x, x) = 0, x \neq y \Longrightarrow d(x, y) > 0]$
äquivalent
$d(x, x) = 0$
$x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$

(iii) $\quad d(x, y) = d(y, x)$ Symmetrie

(iv) $\quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ Dreiecks-Ungleichung

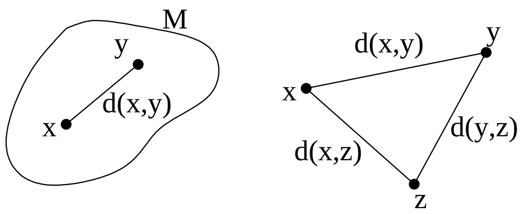


Bild Strecke/d, Dreieck

Proposition 1.2.1. $d(x, y) = |x - y|$ *Metrik auf* $\mathbb{R}$

Proof. (i) $\quad$ Positivität
$d(x, y) = |x - y| \geq 0$ da $|z| \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{R}$

(ii) $\quad d(x, x) = |x - x| = |0| = 0$
$x \neq y \Longrightarrow x - y \neq 0 \Longrightarrow |x - y| > 0$ da $|z| > 0 \ \forall z \neq 0$

(iii) $\quad$ Symmetrie
$d(y, x) = |y - x| = |-(x - y)| = |(-1)(x - y)| = |-1| \, |x - y| = |x - y| = d(x, y)$

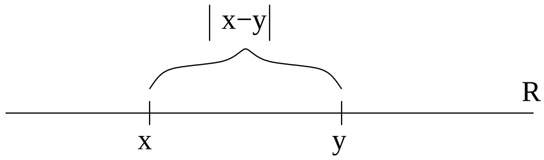
(iv) $\quad$ Dreiecks-Ungleichung

$$d(x, z) = |x - z| = \left| \underbrace{(x - y)}_{=u} + \underbrace{(y - z)}_{=v} \right| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$$

$\Longrightarrow (\mathbb{R}, d)$ metrischer Raum

□

Bild $|x - y|$



diskrete Metrik

M Menge, $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$,

$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Behauptung: d Metrik

(i), (ii), (iii) trivial

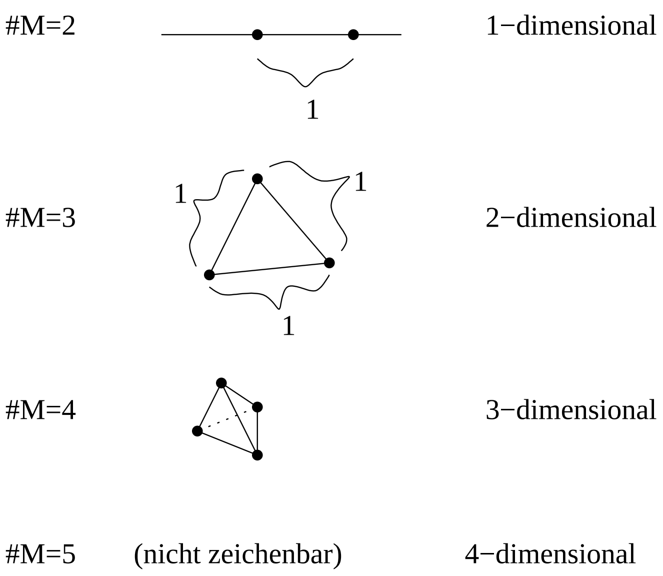
zz. $\Delta - Ugl : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Proof.
If $x \neq y \vee y \neq z \Longrightarrow \Delta - Ugl$ korrekt, da rechte Seite ≥ 1 und linke Seite ≤ 1

If $x = y \wedge y = z \Longrightarrow x = z \Longrightarrow \Delta - Ugl$ korrekt, da $0 + 0 = 0$ □

Visualisierung diskreter Räume

M endliche Menge, $\#M$ = Anzahl der Elemente



Lemma 1.2.2. $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$

Proof. Es ist äquivalent $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

Also zz. $(a = d(x, y))$

$-d(x, y) \underset{I}{\leq} d(x, z) - d(y, z) \underset{II}{\leq} d(x, y)$

I $\quad \Delta - Ugl : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$\Longrightarrow d(x,z) - d(y,z) \leq (d(x,y) + d(y,z)) - d(y,z) = d(x,y) + \underbrace{(d(y,z) - d(y,z))}_{=0} = d(x,y)$

II $\quad d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) = d(x,y) + d(x,z)$

Subtrahiere $d(x,y)$

$d(y,z) - d(x,y) \leq d(x,z)$

Subtrahiere $d(y,z)$

$-d(x,y) \leq d(x,z) - d(y,z) \Longrightarrow II$

□

Beispiele von Metriken

Proposition 1.2.3. *(M_1, d_1) metrischer Raum, (M_2, d_2) metrischer Raum*
$\Longrightarrow Metrik$ *auf $M_1 \times M_2$ wie folgt:*

$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$ $\qquad L_1 Metrik$

$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = max(\underbrace{d_1(x_1,y_1)}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{d_2(x_2,y_2)}_{\in\mathbb{R}})$ $\qquad L_\infty Metrik$

wobei f¸r $a, b \in \mathbb{R}$ gilt,

$$\max(a,b) = \begin{cases} a & a \geq b \\ b & a \leq b \end{cases}$$

$$min(a,b) = \begin{cases} a & a \leq b \\ b & a \geq b \end{cases}$$

Metrik auf Menge M

$d : M \times M \to \mathbb{R}$

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,x) = 0$, $d(x,y) > 0$, f¸r $x \neq y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Beispiel.

- $d(x,y) = |x - y|$ auf $\mathbb{R}$
- $d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$
- $Norm \Longrightarrow Metrik$
  $M = E$ $\mathbb{R}$-Vektorraum

2 Verkn¸pfungen

$$\underset{(x,y)}{E \times E} \underset{\mapsto}{\overset{+}{\longrightarrow}} \underset{x+y}{E}$$

$$\underset{\alpha,x)}{\mathbb{R} \times E} \underset{\mapsto}{\overset{\cdot}{\longrightarrow}} \underset{\alpha x}{E}$$

4 Gesetze

- $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
- $1x = 1$

Norm $\quad E \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R}$

(i)* $\quad \|x\| \geq 0$ (Positivität)

(ii)* $\quad \|0_E\| = 0_R, \|x\| > 0 \ \forall x \neq 0$ (Nullvektor)

(iii)* $\quad \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ f¸r $\alpha \in \mathbb{R}, x \in E$ (Homogenität)

(iv)* $\quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $(\Delta - Ugl.)$

Bezeichnung $\|x\|$ = **Länge von** $x \in E$ **= Abstand vom Nullpunkt**

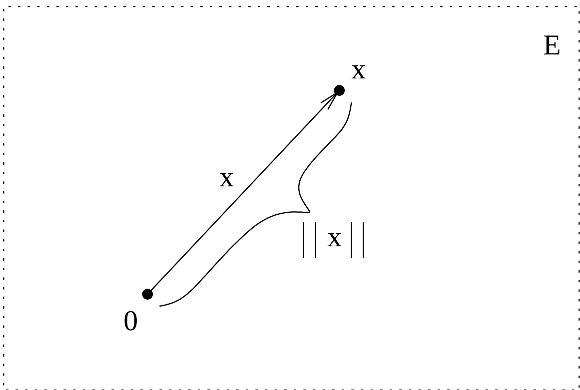


Bild: Norm x in der Ebene $E = \mathbb{R}^2$

Satz

Sei $(E, \|\cdot\|)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum $\Longrightarrow$

(i) $\quad d(x,y) := \|x-y\|$ Metrik auf E

(ii) $\quad \|x\| = d(x,0)$

Proof. (i) $\quad d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$ wegen (i)*

(ii) $d(x,x) = \|x - x\| = \|0_E\| = 0$ wegen (ii)*
$x \neq y \Longrightarrow x - y \neq 0 \Longrightarrow d(x,y) = \|x - y\| > 0$ wegen (ii)*

(iii) Symmetrie
$d(x,y) = \|y - x\| = \|(-1)(x-y)\| \underbrace{=}_{(iii)*} \underbrace{|-1|}_{=1} \|x - y\| = \|x - y\| = d(x,y)$

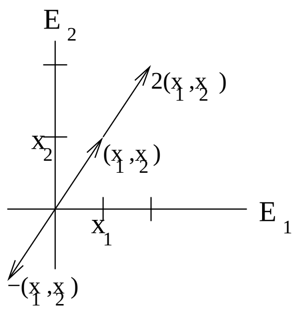
(iv) $d(x,z) = \|x - z\| = \|(x-y) + (y-z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x,y) + d(y,z)$

□

Beispiele von Normen

- $E = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$-Vektorraum, 1-dimensional
  $\|x\|_{\mathbb{R}} := |x|$ Norm auf $\mathbb{R}$
  Absolutbetrag ist eine Norm
- Seien $(E_1, \|\cdot\|_1)$ und $(E_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume
  $E = E_1 \times E_2 \ni (x_1, x_2)$

Bild:



Addition $(x_1, x_2) \underset{E}{+} (y_1, y_2) := (x_1 \underset{E_1}{+} y_1, x_2 \underset{E_2}{+} y_2)$

Skalar-Multiplikation $\alpha \underset{E}{\cdot} (x_1, x_2) = (\alpha \underset{E_1}{\cdot} x_1, \alpha \underset{E_2}{\cdot} x_2)$

$\Longrightarrow E$ $\mathbb{R}$-Vektorraum

$\|(x_1, x_2)\|_E = \|x_1\|_{E_1} + \|x_2\|_{E_2} \Longrightarrow$ Norm auf E $\qquad$ L_1-Norm auf E

$\|(x_1, x_2)\|_\alpha = (\|x_1\|_{E_1}^\alpha + \|x_2\|_{E_2}^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad 1 < \alpha < \infty$ $\qquad$ L_α -Norm auf E

$\|(x_1, x_2)\|^2 = \|x_1\|_{E_1}^2 + \|x_2\|_{E_2}^2$ $\qquad$ L_2-Norm auf E (*euklidische* Norm)

Zur näheren Untersuchung der euklidischen Norm brauchen wir

Proposition 1.2.4. *Sei K total geordneter Körper. Dann gilt*

(i) z $> 0, x < y \Longrightarrow xz < yz$

(ii) $0 \leq x < y \Longrightarrow 0 \leq x^2 < y^2$

(iii) $x, y \geq 0, x^2 \leq y^2 \Longrightarrow x \leq y$

Proof. (i) $x < y \Longrightarrow y - x > 0$
$yz - xz \underset{Dist}{=} (y-x)z \underbrace{\geq}_{\text{wegen Körper}} 0$
zz. "$\neq$": $y - x \neq 0, z \neq 0 \Longrightarrow (y-x)z \neq 0$

(ii) $x^2 = xx < xy < yy = y^2$

(iii) Sei $x^2 \leq y^2$
Widerspruch: $x \leq y$ falsch
$\Longrightarrow x > y$ total geordnet
$\underset{(ii)}{\Longrightarrow} x^2 > y^2$ Widerspruch, da $x^2 \leq y^2$, also $x \leq y$.

□

Satz

$\|(x_1, x_2)\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ definiert Norm auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (**euklidische Norm** $= L_2 - Norm$)

Proof. Seien (x_1, x_2) und $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 = E$
$E_1 = \mathbb{R} = E_2$
Wegen $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$ gilt
$x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - 2x_1 y_1 x_2 y_2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \geq 0$
$\Rightarrow 2x_1 y_1 x_2 y_2 \leq x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2$
$\Rightarrow (x_1 y_1 - x_1 y_1)^2 = x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + 2x_1 y_1 x_2 y_2 \leq x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$
$\underset{Prop(iii)}{\Longrightarrow} x_1 y_1 + x_2 y_2 \leq_{(*)} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$
$\Rightarrow \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\|^2 = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2$
$= x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 y_2 + x_2^2 + y_2^2 + 2x_2 y_2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2(x_1 y_1 + x_2 y_2)$
$\leq_{(*)} x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 x_2^2}\sqrt{y_1^2 y_2^2}$
$= \|(x_1, x_2)\|^2 + \|(y_1, y_2)\|^2 + 2\,\|(x_1, x_2)\|\,\|(y_1, y_2)\| = [\|(x_1, x_2)\| + \|(y_1, y_2)\|]^2$
$\Rightarrow \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\|^2 \leq [\|(x_1, x_2)\| + \|(y_1, y_2)\|]^2$
$\underset{Prop(iii)}{\Longrightarrow} \|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\| = \|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\| \leq \|(x_1, x_2)\| + \|(y_1, y_2)\|$

□

Korollar. *Euklidische Metrik*
auf $M = \mathbb{R}^2$
$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \|(x_1, x_2) - (y_1, y_2)\| = \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

1.3 Grundlagen der Topologie (Offene und abgeschlossene Mengen)

Sei (M, d) ein metrischer Raum
$r > 0$ "Radius", $\varepsilon > 0$ sehr kleiner Radius
$a \in M$ Mittelpunkt

Definition. r-Umgebung (r-Kugel) mit Mittelpunkt a

$M_r(a) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\}$ *offene* Kugel, open r-ball (runde Klammern, "<", deswegen offen)

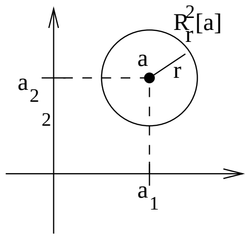
$M_r[a] = \{x \in M \mid d(x, a) \leq r\}$ *abgeschlossene* Kugel, closed r-ball (eckige Klammern,$\leq$)
Dann gilt f¸r $r < s$
$M_r(a) \subset M_r[a] \subset M_s(a)$

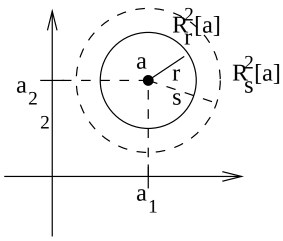
Beispiel

$M = \mathbb{R}^2$ *euklidisch*

Bild Kugel offen/abgeschlossen

”Man hat nur Kugeln im Hinterkopf.”





Beispiel

(M, d) diskrete Metrik

$d(x, y) = 1$ f¸r $x \neq y$

$0 < \varepsilon < 1$

$\Longrightarrow M_\varepsilon(a) = M_\varepsilon\,[a] = \{a\}$

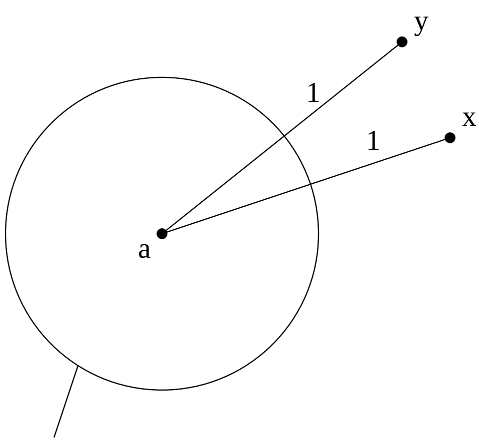


Bild $M_{\frac{1}{2}}(a) = M_{\frac{1}{2}}\,[a] = \{a\}$

Beispiel $M = \mathbb{R}$

Sei $a < b$ in $\mathbb{R}$

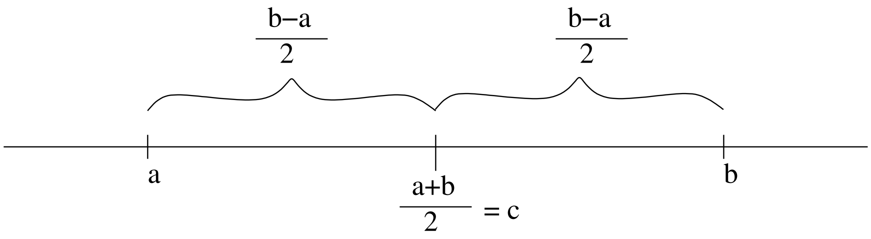
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ **abgeschlossenes Intervall** von a nach b, $a \in [a,b] \ni b$

$(a,b) =]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ **offenes Intervall** von a nach b, $a \notin]a,b[\not\ni b$

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ **halboffenes Intervall** von a nach b, $a \in [a,b[\not\ni b$

$]a,b] = (a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ $a \notin]a,b] \ni b$

Proposition 1.3.1. $[a,b] = \mathbb{R}_{\frac{b-a}{2}}\left[\frac{a+b}{2}\right]$



$[c-r, c+r] = \mathbb{R}_r\,[c]$

Analog

$]a,b[= \mathbb{R}_{\frac{b-a}{2}}(\frac{a+b}{2})$

$]c-r, c+r[= \mathbb{R}_r(c)$

Definition. *offene Teilmenge*

$M \supset U :\Leftrightarrow \forall a \in U \ \exists \underset{\text{abhängig von a}}{r} > 0 : M_r\,[a] \subset U$

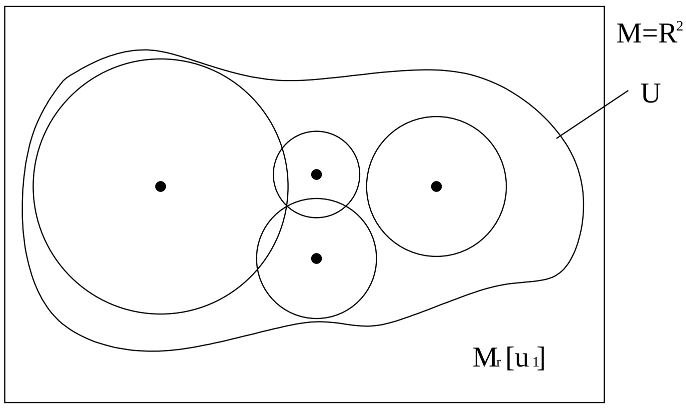


Bild offene Teilmenge

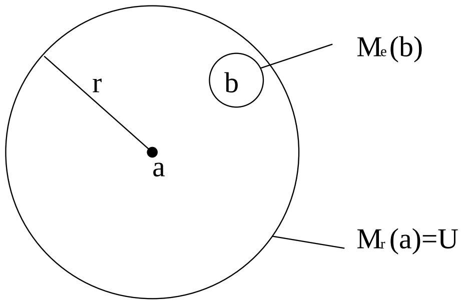
Satz

offene r-Kugel ist offen

$M_r(a) \underset{\text{offen}}{\subset} M$

Proof.
$U = M_r(a)$

zz. $\forall b \in M_r(a) \ \exists \varepsilon > 0$ sodass $M_\varepsilon(b) \subset M_r(a)$



$b \in M_r(a) \Longrightarrow d(b,a) < r$

$\varepsilon := r - d(b,a) > 0$

Beh $M_\varepsilon(b) \subset M_r(a)$

Sei $x \in M_\varepsilon(b) \Longrightarrow d(x,b) < \varepsilon$

$\underset{\Delta-Ugl}{\Longrightarrow} d(x,a) \leq d(x,b) + d(b,a) < \varepsilon + d(b,a) = r$

$\underset{trans}{\Longrightarrow} d(x,a) < r \Longrightarrow x \in M_r(a)$

$\square$

Korollar. *(offene Intervalle sind offen)*

$]a,b[\underset{\textit{offen}}{\subset} \mathbb{R}$

Beweis $]a,b[= R_{\frac{b-a}{2}}(\frac{a+b}{2}) \underset{\textbf{offen}}{\subset} \mathbb{R}$

Satz

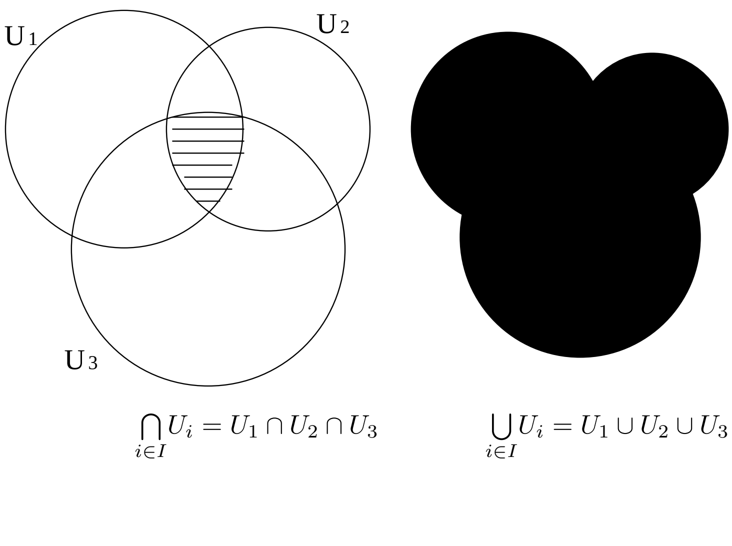
Vereinigung/Durchschnitt offener Mengen

Seien $U_i \underset{\text{offen}}{\subset} M \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \underset{\text{offen}}{\subset} M$, Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Seien $U_1,..,U_n \underset{\text{offen}}{\subset} M \Longrightarrow \bigcap_{i=1..n} U_i \underset{\text{offen}}{\subset} M$, Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Hierbei definiert man $\bigcap_{i\in I} U_i = \left\{ x \in M \mid \forall \bigwedge_{i\in I} x \in U_i \right\}$ $\bigcup_{i\in I} U_i = \left\{ x \in M \mid \exists \bigvee_{i\in I} x \in U_i \right\}$

Bild $I = \{1,2,3\}$



$\bigcap_{i\in I} U_i = U_1 \cap U_2 \cap U_3$ $\bigcup_{i\in I} U_i = U_1 \cup U_2 \cup U_3$

Proof.

(i) Seien $U_i \underset{\text{offen}}{\subset} M$, zz. $\bigcup\limits_{i \in I} U_i =: U \underset{\text{offen}}{\subset} M$

Sei $a \in U \Longrightarrow \bigvee\limits_{i \in I} a \in U_i \underset{\text{offen}}{\subset} M$

$\Longrightarrow \exists r > 0, M_r(a) \subset U_i \subset U \Longrightarrow M_r(a) \subset U$

Da $a \in U$ bel.$\Longrightarrow U \underset{\text{offen}}{\subset} M$

(ii) Seien $U_i, .., U_n \underset{\text{offen}}{\subset} M$, $U = \bigcap\limits_{i=1..n} U_i$

zz. $U \underset{\text{offen}}{\subset} M$

Sei $a \in U = \bigwedge\limits_{1 \leq i \leq n} a \in U_i \underset{\text{offen}}{\subset} M$

$\Longrightarrow \exists r_i > 0,\ M_{r_i}(a) \subset U_i$

(Setze $r := min(r_i, .., r_n) > 0$)

$\underset{r \geq r_i}{\Longrightarrow} M_r(a) \subset M_{r_i}(a) \subset U_i$

$\Longrightarrow M_r(a) \subset \bigcap\limits_{i=1..n} U_i = U$

Da $a \in U$ bel$\Longrightarrow U \underset{\text{offen}}{\subset} M$

$\square$

Spezialfall $I = \emptyset \Longrightarrow \emptyset \underset{\textbf{offen}}{\subset} M$

(leere Menge ist offen)

$\underset{\text{leerer Durchschnitt}}{M \quad \underset{\text{offen}}{\subset} \quad M}$

Anwendung $a \in \mathbb{R}$

Halbgerade

$[a, +\infty[\ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < +\infty\}$

$]a, +\infty[\ := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < +\infty\}$

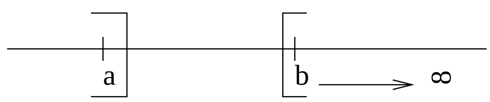
$]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq a\}$

$]-\infty, a[\ := \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < a\}$

Gerade

$]-\infty, +\infty[\ := \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$

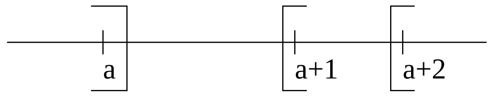
Satz $]a, +\infty[\ \underset{\textbf{offen}}{\subset} \mathbb{R} \underset{\textbf{offen}}{\supset}\ ]-\infty, a[$



Proof.

$]a, +\infty[\ = \bigcup\limits_{b > a}\ ]a, b[$ (alle b's zugelassen)

$= \bigcup\limits_{1 < n \in N}\ ]a, a + n[$



F¸r jedes $b > a$ gilt $]a, b[\underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}$

$\underset{Satz(i)}{\Longrightarrow} \bigcup_{b>a}]a, b[\underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R} \Longrightarrow]a, +\infty[\underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}$

□

Analog $]-\infty, a[= \bigcup_{a<b}]a, b[\underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}$

Proposition 1.3.2. $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[= \bigcup_{a<b}]a, b[\underset{\textit{offen}}{\subset} \mathbb{R}$

(M, d) metrischer Raum

$(E, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum

$d(y, x) = \|x - y\|$

Speziell $(R, |\cdot|), d(x, y) = |x - y| \quad , \quad M_r\,(a) := \{x \in M \mid d(x, a) < r\}$

$E_r(a) := \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$

$\mathbb{R}_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\}$

offene r-Kugel, offenes Intervall

U $\underset{\text{offen}}{\subset} M \Leftrightarrow \forall a \in U \;\; \exists r > 0 \quad M_r(a) \subset U$

U $\underset{\text{offen}}{\subset} E \Leftrightarrow \forall a \in U \, \exists r > 0 \; E_r(a) \subset U$

$\Longleftrightarrow \forall a \in U \, \exists r > 0 \, \forall x \in E \; \|x - a\| < r \Longrightarrow x \in U.$

Proposition 1.3.3. $M_r(a) \underset{\textit{offen}}{\subset} M,]a, b[\underset{\textit{offen}}{\subset} \mathbb{R}$

Proposition. (M, d) diskrete Metrik

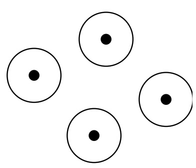
$\Longrightarrow$ *jede Teilmenge* $U \subset M$ *ist offen*

Proof. Sei $U \subset M$, zz. U offen.

Sei $a \in U, \frac{1}{2} > 0 \underset{diskret}{\Longrightarrow} M_{\frac{1}{2}}(a) = \{a\} \subset U$

da $a \in U$ bel.$\Longrightarrow U$ offen

□



Bild

Definition. $A \subset M$ abgeschlossene Teilmenge

$:\Leftrightarrow M \setminus A = \{x \in M \mid x \notin A\} \underset{\text{offen}}{\subset} M$

Beispiel. $[a,b] \underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{R}$

Proof. $\mathbb{R} \setminus [a,b] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$

zz. $U = \mathbb{R} \setminus [a,b] \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}$

$U =$ Vereinigung von zwei offenen Halbgeraden $= \left\{ \bigcup_{n\geq 1} \underset{\text{offen}}{]a-n, a[} \right\} \cup \left\{ \bigcup_{n\geq 1} \underset{\text{offen}}{]b, b+n[} \right\}$ ☐

Satz

(Durchschnitt/Vereinigung abgeschlossener Mengen)

(i) $A_i \underset{\text{abg.}}{\subset} M \Longrightarrow \cap_{i\in I} A_i \underset{\text{abg.}}{\subset} M$

Speziell $I = \emptyset : M \underset{\text{abg.}}{\subset} M$

(ii) $A_1, .., A_n \underset{\text{abg.}}{\subset} M \Longrightarrow A_1 \cup .. \cup A_n \underset{\text{abg.}}{\subset} M$

Speziell $n = 0 \Longrightarrow \emptyset \underset{\text{abg.}}{\subset} M$

Proof. Folgt aus

$\bigcap_{i\in I} M \setminus U_i = M \setminus \bigcup_{i\in I} U_i$

$\bigcup_{i\in I} M \setminus U_i = M \setminus \bigcap_{i\in I} U_i$ ☐

Satz

(abgeschlossene Kugeln sind abgeschlossen)

$M_r [a] \underset{\text{abg.}}{\subset} M$

Speziell $[a,b] = \mathbb{R}_{\frac{b-a}{2}} \left[\frac{a+b}{2}\right] \underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{R}$

Proof. $U := M \setminus M_r [a]$, zz. $U \underset{\text{offen}}{\subset} M$

Sei $x \in U$ beliebig, aber fest

$\underbrace{\Longrightarrow}_{x \notin M_r [a]} d(x,a) > r \Longrightarrow \varepsilon = d(x,a) - r > 0$

Beh: $M_\varepsilon(x) \subset U$

Widerspruchsannahme: $M_\varepsilon(x) \not\subset U = M \setminus M_r [a]$

$\Longrightarrow M_\varepsilon(x) \cap M_r [a] \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists y \in M_\varepsilon(x) \cap M_r [a]$

$\Longrightarrow d(y,x) < \varepsilon$ und $d(y,a) \leq r$

$\Longrightarrow d(x,a) \leq \underbrace{d(x,y)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(y,a)}_{\leq r} < \varepsilon + r = (d(x,a) - r) + r = d(x,a)$

$\Longrightarrow d(x,a) < d(x,a)$ Widerspruch!

Also gilt $M_\varepsilon(x) \subset U$

Da $x \in U$ bel. $\Longrightarrow U$ offen

$\square$

1.4 Konvergenz von Folgen

Definition. (M, d) metrischer Raum. Eine **Folge** ist eine Abbildung $\begin{matrix} \mathbb{N} & \to & M \\ n & \mapsto & a_n \end{matrix}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$

$a(n) = a_n = n - tes$ Folgenglied (n-te Funktionswert)

$(a_n)_{n\in N} = (a_0, a_1, .., a_n, ..)$

Beispiel 1.4.1. konstante Folge in M

$(a, a, a, a, ...)$, $a_n = a$

Beispiel. $M = \mathbb{R}$, $a_n = \frac{1}{n}$

$(\frac{1}{n})_{n\geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$ harmonische Folge

Beispiel 1.4.2. $M = \mathbb{R}$, $a_n = (-1)^n$

$((-1)^n\ )_{n\geq 0} = (1, -1, 1, -1, 1, ...)$

Beispiel. $M = \mathbb{R}$, $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$,$(n \geq 1)$

$\Longrightarrow (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, ...)$

Definition. Folge (a_n) in M **konvergiert** gegen $a \in M$

$a_n \rightsquigarrow a :\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq n_0$ gilt $d(a_n, a) \leq \varepsilon$

Speziell $M = \mathbb{R}$ **, bzw** $M = E \quad , a = 0$

Nullfolge $\quad a_n \rightsquigarrow 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0$ gilt $\|a_n\| \leq \varepsilon$

Konvergenz $\quad a_n \rightsquigarrow a \Leftrightarrow$ Jede $\varepsilon - Kugel$ um a enthält fast alle Folgenglieder (bis auf endlich viele Ausnahmen)

Beispiel 1.4.3. konstante Folge $a \rightsquigarrow a$

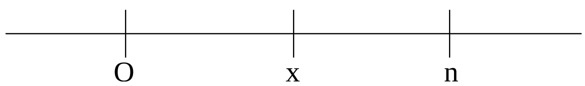
Beispiel. harmonische Folge (typische Nullfolge) $\qquad \frac{1}{n} \rightsquigarrow 0$

Dies folgt nicht aus den bisherigen Axiomen für $\mathbb{R}$. Wir benötigen

Archimedes (-Axiom)

$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} : n > x$

Bild



(Archimedes verlangt, dass es für jedes x eine nat¸rliche Zahl gibt, die rechts von x liegt.)

Korollar. $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N}, -n < x$

Satz

(äquivalent zu Archimedes)

Für $M = \mathbb{R}$ gilt

$\frac{1}{n} \rightsquigarrow 0$ (Nullfolge)

Proof. Sei $\varepsilon > 0$, zz. fast alle $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ (d.h. bis auf endlich viele Ausnahmen)

Da $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon} > 0$

$\underset{Arch.}{\Longrightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

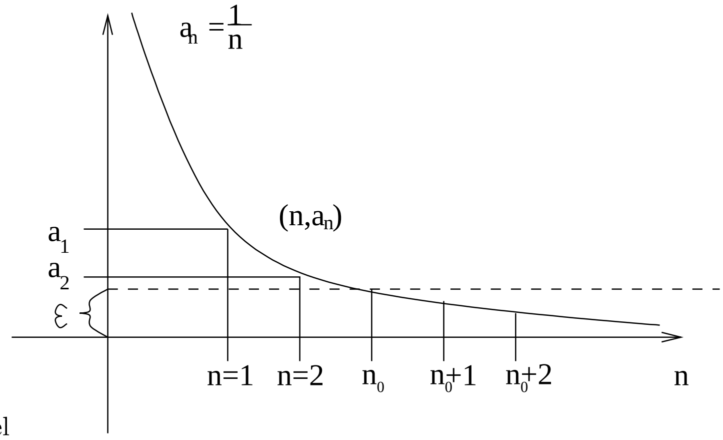
Sei n $\geq n_0 \Longrightarrow a_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

$\Longrightarrow |a_n| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

Abschätzung gilt f¸r fast alle n.

Da ε beliebig war $\Longrightarrow \frac{1}{n} \rightsquigarrow 0$

□



Hyperbel

Proposition 1.4.4. *Summe konvergenter Folgen ist konvergent*

$M = E$ *(Vektorraum)*

$a_n \rightsquigarrow a\ ,\ b_n \rightsquigarrow b \Longrightarrow a_n + b_n \rightsquigarrow a + b$

Proof. (Hinschreiben, dass beide konvergieren:)

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest.

Da $a_n \rightsquigarrow a \Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : \|a_n - a\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

(Trick: man nehme eins, das ein bisschen kleiner ist...)

Da $b_n \rightsquigarrow b \Longrightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_1 : \|b_n - b\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

(n_0 und n_1 können verschieden sein, die n‘s aber sind frei)

Wähle $n_2 := max(n_0, n_1) \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \forall n \geq n_2$

$d(a_n + b_n, a + b) = \|(a_n + b_n) - (a + b)\| = \|(a_n - a) + (b_n - b)\| = \underbrace{d(a_n, a)}_{\underset{da\, n \geq n_2 \geq n_0}{\leq \frac{\varepsilon}{2}}} + \underbrace{d(b_n, b)}_{\underset{da\, n \geq n_2 \geq n_1}{\leq \frac{\varepsilon}{2}}}$

□

Beispiel 1.4.5. $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \searrow 0$

Proof. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 \; , \; \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

$\Longrightarrow |a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ □

Folgen (a_n) (konvergent/divergent)

(M, d) metrischer Raum

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in M

Abbildung: $\underset{n}{\mathbb{N}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{a_n}{M}$

Definition. $a_n \rightsquigarrow a \in M$ (Folge **konvergiert** gegen a)

$\Leftrightarrow$ Jede $\varepsilon - Kugel$ um a enthält *fast alle* Folgenglieder (endlich viele Ausnahmen)

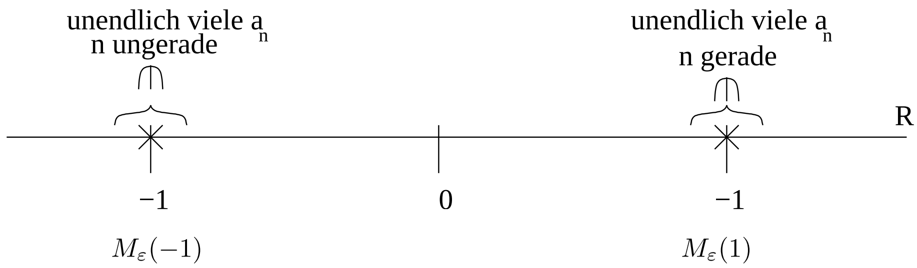
$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$:
$a_n \in M_\varepsilon(a)$
$d(a_n, a) < \varepsilon$
$\|a_n - a\| < \varepsilon \; , \; M = E,$
$|a_n - a| < \varepsilon \; , \; M = \mathbb{R}$

Beispiel 1.4.6. $M = \mathbb{R}$

$a_n := (-1)^n$

$(a_n)_{n \geq 0} = (\underbrace{1}_{n=0}, \underbrace{-1}_{n=1}, 1, -1, 1, ...)$

(a_n) konvergiert nicht (divergent): Für $0 < \varepsilon < 1$ gilt

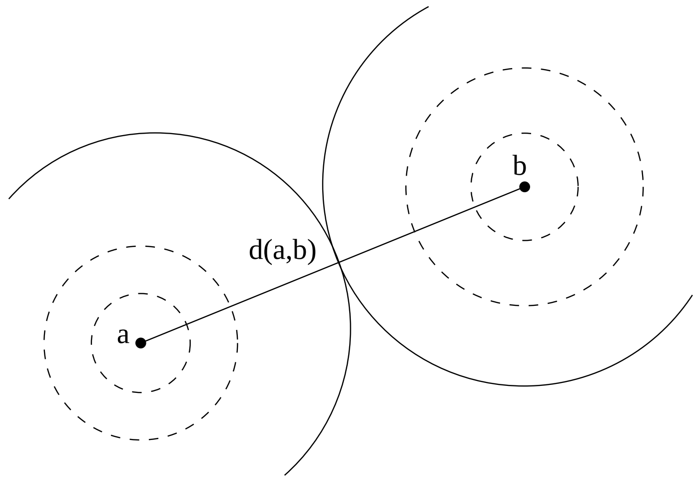


Satz: Grenzwert eindeutig

$a \leftsquigarrow a_n \rightsquigarrow b \Rightarrow a = b$

$a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ Limes = Grenzwert eindeutig

Proof. durch Widerspruch
$a \neq b \Rightarrow d(a, b) > 0$



Bild

$\varepsilon = \frac{d(a,b)}{2} > 0$

$\Longrightarrow a_n \rightsquigarrow a : \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 : d(a_n, a) > \varepsilon$
$a_n \rightsquigarrow b : \exists n_1 \, \forall n \geq n_0 : d(a_n, b) > \varepsilon$

$\Longrightarrow \forall n \geq \max(n_0, n_1)$
$d(a,b) \leq \underbrace{d(a, a_n)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(a_n, b)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon = d(a,b)$

$\Longrightarrow d(a,b) < d(a,b)$ Widerspruch

also: $a = b$ $\square$

Limes-Satz f¸r Summen

$M = E$ normierter Raum, $(a_n), (b_n)$ Folgen in E. Dann gilt

$a_n \rightsquigarrow a, b_n \rightsquigarrow b \Longrightarrow a_n + b_n \rightsquigarrow a + b$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$ falls (a_n) konvergiert und (b_n) konvergiert

Limes-Satz f¸r Produkte

$M = \mathbb{R}, (a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt

$a_n \rightsquigarrow a, b_n \rightsquigarrow b \Longrightarrow a_n b_n \rightsquigarrow ab$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = ab$ falls (a_n) konvergiert und (b_n) konvergiert

Proof. Es gelte $a_n \rightsquigarrow a,\ b_n \rightsquigarrow b$

zz. $a_n b_n \rightsquigarrow ab$

zz. $\forall \varepsilon > 0$ gilt: $M_\varepsilon(ab)$ enthält fast alle $a_n b_n$
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest

definiere $\delta = min(1, \frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}) > 0$

$a_n \rightsquigarrow a \Longrightarrow \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \delta$

$b_n \rightsquigarrow b \Longrightarrow \exists n_1 \, \forall n \geq n_1 : |b_n - b| < \delta$

$$\begin{aligned}{}_* \Longrightarrow |b_n| &= |(b_n - b) + b| \\ &\leq |b_n - b| + |b| \\ &< \delta + |b|\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \forall n \geq \max(n_0, n_1)$

$$\begin{aligned}|a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ &\leq |(a_n - a)b_n| + |a(b_n - b)| \\ &= \underbrace{|a_n - a|}_{<\delta} \underbrace{|b_n|}_{<\delta + |b|} + |a| \underbrace{|b_n - b|}_{<\delta} \\ &< \delta(\delta + |b|) + |a|\,\delta \\ &= \delta(\delta + |b| + |a|) \\ &\underbrace{\leq}_{\delta \leq 1} \delta(1 + |b| + |a|) \underbrace{\leq}_{\delta \leq \frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}} \varepsilon\end{aligned}$$

$\forall n \geq n_2 := \max(n_0, n_1)$

$|a_n b_n - ab| < \varepsilon$, da ε beliebig

$\Longrightarrow a_n b_n \rightsquigarrow ab$

$\square$

Beispiel 1.4.7. Beispiel

(i) $\frac{1}{n^2} \rightsquigarrow 0$
$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$
Beweis $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \rightsquigarrow 0 \cdot 0 = 0$
Allgemeiner: (Induktion nach $k \geq 1$)
$\frac{1}{n^k} = n^{-k} \rightsquigarrow 0$

(ii) $a_n = 2 + \frac{3}{n} \rightsquigarrow 2$
$\lim\limits_{n\to\infty}(2 + \frac{3}{n}) = 2$
$b_n = 2 \rightsquigarrow 2$
$c_n = \frac{3}{n} = 3 \cdot \frac{1}{n} \rightsquigarrow 3 \cdot 0 = 0$
$\Longrightarrow a_n = b_n + c_n \rightsquigarrow 2 + 0 = 2$

Quotientenregel f¸r Limiten

$M = \mathbb{R}$, $a_n \rightsquigarrow a$,
$b_n \rightsquigarrow b \neq 0$

$\Longrightarrow$ (i) Fast alle $b_n \neq 0$
(ii) $\frac{a_n}{b_n} \rightsquigarrow \frac{a}{b}$,
$lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{lim\, a_n}{lim\, b_n}$

Proof. (i) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest
$\delta = min(\frac{|b|}{2}, \frac{|b|^2}{2}) > 0$, da $b \neq 0$
$b_n \rightsquigarrow b \Longrightarrow \exists n_1 \forall n \geq n_1 \ |b_n - b| \leq \delta$
$\Longrightarrow ||b| - |b_n|| \leq |b_n - b| \leq \delta$
$\Longrightarrow -\delta \leq |b_n| - |b| \leq \delta$
$\Longrightarrow |b_n| \geq |b| - \delta \geq \frac{|b|}{2} > 0$
$\Longrightarrow b_n \neq 0 \, \forall n \geq n_1$

(ii) $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b-b_n}{bb_n}\right| = \frac{|b-b_n|}{|b|\cdot|b_n|}$
$\leq \frac{\delta}{|b|\cdot\frac{|b|}{2}}$(Zähler nach oben / Nenner nach unten abschätzen)
$= \delta \cdot \frac{2}{|b|^2} \leq \varepsilon$, falls $\delta \leq \frac{|b|^2}{2}\varepsilon$

da $\varepsilon > 0$ beliebig $\Longrightarrow \frac{1}{b^n} \rightsquigarrow \frac{1}{b}$

$\Longrightarrow$ Produktregel $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightsquigarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

□

Limessätze (Grenzwertsätze)

(i) Summenregel

(ii) Produktregel
allgemeiner:
$\mathbb{R} \ni \alpha_n \rightsquigarrow a, E \ni x_n \rightsquigarrow x$
$\Rightarrow E \ni \alpha_n x_n \rightsquigarrow \alpha x$ (Skalarproduktregel)

(iii) Quotientenregel
$\mathbb{R} \ni \alpha_n \rightsquigarrow \alpha$, $\mathbb{R} \ni \beta_n \rightsquigarrow \beta \neq 0$
$\Rightarrow \frac{1}{\beta_n} \rightsquigarrow \frac{1}{\beta}$
$\frac{\alpha_n}{\beta_n} \rightsquigarrow \frac{\alpha}{\beta}$

Anwendung der Limessätze

Nach Archimedes gilt

$\frac{1}{n} \rightsquigarrow 0$ Nullfolge

$\frac{(-1)^n}{n} \rightsquigarrow 0$ Nullfolge

Aus den Limessätzen folgt

(1) $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \rightsquigarrow 0 \cdot 0 = 0$

(2) $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \rightsquigarrow 0 \cdot 0 = 0$

(3) $\frac{1}{n} + \frac{2}{n^4} \rightsquigarrow 0 + 2 \cdot 0^4 = 0$

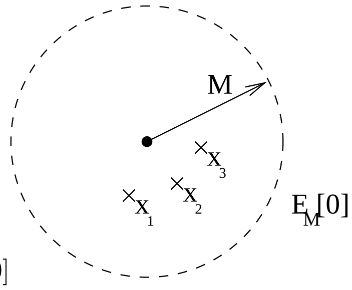
(4) $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\frac{n}{n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \rightsquigarrow \frac{1}{1+0} = 1$
Dividiere Zähler und Nenner durch die höchste Potenz von n.

(5) $\frac{n^3+4n^2+4}{3n^3-17} = \frac{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^3}}{3-\frac{17}{n^3}} \rightsquigarrow \frac{1+4*0+4*0*0*0}{3-17*0*0*0} = \frac{1}{3}$

(6) $\frac{n^2+1}{1-n^3} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}-1} \rightsquigarrow \frac{0+0*0*0}{0*0*0-1} = 0$

(7) $\frac{n^3+1}{1-n^2} = \frac{1+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}} \rightsquigarrow \frac{1+0}{0+0} = \infty$ (divergent, nicht konvergent)

Definition. $E \ni (x_n)$ **beschränkte Folge :** $\Leftrightarrow \exists M > 0\, \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \leq M$ "Norm-Schranke"



$\Leftrightarrow$ alle Folgenglieder liegen in einer M-Kugel $E_M\,[0]$

Proposition 1.4.8.

(i) $E \ni x_n$ beschränkt, $E \ni y_n$ beschränkt
$\Longrightarrow x_n + y_n \in E$ beschränkt

(ii) $\mathbb{R} \ni \alpha_n$ beschränkt, $E \ni x_n$ beschränkt
$\Longrightarrow \alpha_n x_n \in E$ beschränkt

Proof.

(i) (x_n) beschr. $\Longrightarrow \exists M_1 > 0\, \forall n \in \mathbb{N}\, \|x_n\| \leq M_1$
(y_n) beschr. $\Longrightarrow \exists M_2 > 0\, \forall n \in \mathbb{N}\, \|y_n\| \leq M_2$
$\Longrightarrow \|x_n + y_n\| \leq \|x_n\| + \|y_n\| \leq M_1 + M_2 =: M$

□

Satz $E \ni x_n \rightsquigarrow x$ konvergent $\Rightarrow (x_n)$ beschränkt

Proof. Da $x_n \rightsquigarrow x \Longrightarrow \exists n_0\, \forall n \geq n_0$

$\|x_n - x\| \leq 1$ $(\varepsilon = 1)$

Setze $M := max(1 + \|x\|, \|x_0\|, \|x_1\|, \cdots, \|x_{n_0 - 1}\|) = max(1 + \|x\|, \|x_i\|\,(i \in n_0)) > 0$

Hier identifiziere $n_0 = \{0, .., n_0 - 1\}$

Beh. $\forall n\; \|x_n\| \leq M$

If $n < n_0 \Longrightarrow \|x_n\| \leq \max \|x_i\|_{i \in n_0} \leq M$

If $n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n\| = \|(x_n - x) + x\| \leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\leq 1} + \|x\| \leq 1 + \|x\| \leq M$

Da $n \in \mathbb{N}$ bel.$\Rightarrow (x_n)$ beschränkt □

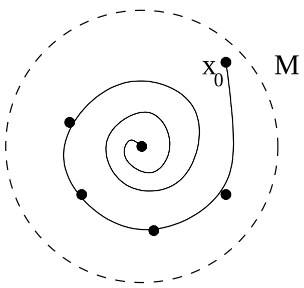


Bild Cauchy-Schnecke

Satz

(i) $\mathbb{R} \ni \alpha_n$ beschränkt
$E \ni x_n \rightsquigarrow 0$ Nullfolge
$\Longrightarrow E \ni \alpha_n x_n \rightsquigarrow 0$

(ii) $\mathbb{R} \ni \alpha_n \rightsquigarrow 0$
$E \ni x_n$ beschränkt
$\Longrightarrow \alpha_n x_n \rightsquigarrow 0$

Proof. (ii) Da (x_n) beschränkt $\Longrightarrow \exists M > 0 \, \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \leq M$

Da $\mathbb{R} \ni \alpha_n \rightsquigarrow 0 \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \, \forall n \geq n_0$

$|\alpha_n| = |\alpha_n - 0| \leq \frac{\varepsilon}{M}$

$\Longrightarrow \|\alpha_n x_n\| =_{homogen} = \underbrace{|\alpha_n|}_{\leq \frac{\varepsilon}{M}} \underbrace{\|x_n\|}_{\leq M} \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt $\alpha_n x_n \rightsquigarrow 0$ □

Corollar

$\mathbb{R} \ni \alpha_n \rightsquigarrow \alpha, E \ni x_n \rightsquigarrow 0 \Longrightarrow \alpha_n x_n \rightsquigarrow 0$

$\mathbb{R} \ni \alpha_n \rightsquigarrow 0, E \ni x_n \rightsquigarrow x \Longrightarrow \alpha_n x_n \rightsquigarrow 0$

Definition. (M, d) metrischer Raum, speziell $M = E$ oder $M = \mathbb{R}$

$M \ni a_n$ **Cauchy-Folge** $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \, \forall m, n \geq n_0 : d(a_m, a_n) \leq \varepsilon$, speziell $\|a_m - a_n\| \leq \varepsilon$ oder $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$

Speziell $M = E : \|a_m - a_n\| \leq \varepsilon$

$M = \mathbb{R} : |a_m - a_n| \leq \varepsilon$

Privat-Notation

$M \ni a_n \rightsquigarrow$ Cauchy-Folge ("Konvergenz ohne Limes")

$a_n \rightsquigarrow a = \lim \; a_n$ Konvergenz

Proposition

Jede konvergente Folge ist Cauchy

$a_n \rightsquigarrow a \Longrightarrow a_n \rightsquigarrow$

Proof. Sei $a_n \rightsquigarrow a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

zz. Cauchy-Kriterium ist erf¸llt

Sei $\varepsilon > 0$. Da $a_n \rightsquigarrow a \Longrightarrow \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 : d(a_n, a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Sei $m, n \geq n_0$

$d(a_m, a_n) \leq \underbrace{d(a_m, a)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(a, a_n)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig $\Longrightarrow (a_n)$ Cauchy

□

Definition. M **vollständig**:$\Leftrightarrow$ Jede Cauchy-Folge ist konvergent

$M \ni a_n \rightsquigarrow \Longrightarrow \exists a \in M, a_n \rightsquigarrow a$

Beispiel

$M = \mathbb{Q}$ rationale Zahlen

$d(x, y) = |x - y|$ $\quad$ $\mathbb{Q}$ nicht vollständig

(d.h. $\exists$ Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ welche nicht konvergiert)

$\sqrt{2} = 1.41...$

$= 1.x_1x_2x_3x_4...$ wobei $x_i \in \{0, 1, ..., 9\} = 10$

$\mathbb{Q} \ni a_n = 1.x_1x_2x_3 \cdots x_n000 \cdots = \frac{1.x_1x_2x_3\cdots x_n}{10^n}$

Beh. (a_n) Cauchy

Sei $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists n_0 : 10^{-n_0} \leq \varepsilon$

$(10^{n_0} \geq \frac{1}{\varepsilon})$

Sei m,n $\geq n_0$, OE $n > m$

$|a_n - a_m| = |1.x_1x_2...x_n - 1.x_1x_2...x_m| = |0.000\ x_{m+1}...x_n| = \frac{x_{m+1}...x_n}{10^n}$

$\leq \frac{10^{n-m}}{10^n} = \frac{1}{10^m} = 10^{-m} \leq 10^{-n_0} \leq \varepsilon$

$\Longrightarrow |a_n - a_m| \leq \varepsilon$ f¸r alle $m, n \geq n_0$

$\Longrightarrow (a_n)$ Cauchy, aber ohne Limes in $\mathbb{Q}$, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Definition. $\mathbb{R}$, **reelle Zahlen**, eindeutig bestimmt durch

(i) total geordneter Körper

(ii) Archimedes $\frac{1}{n} \rightsquigarrow 0$

(iii) vollständig (jede Cauchy-Folge konvergiert)

Konstruktion von $\mathbb{R}$

(Skizze)

Schritt 1 $\quad \mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ rationale Zahlen
$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} =$ *alle* Folgen in $\mathbb{Q}$ (Vektorraum ¸ber $\mathbb{Q}$)

Schritt 2 $\quad \Psi(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}) =$ *alle* Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$
(Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$)

Schritt 3 $\quad \Psi_0(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}) =$ alle Nullfolgen in $\mathbb{Q}$
(Untervektorraum von $\Psi(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$)

Setze $\quad \mathbb{R} = \Psi(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})/\Psi_0(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$

Cauchy-Folge

$a_n \in M$ Cauchy-Folge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0\ d(a_m, a_n) \leq \varepsilon$

Dann gilt (a_n) konvergent $\underset{(\not\Longleftarrow)}{\Longrightarrow}$ (a_n) Cauchy

(M, d) vollständig (complete)

$\Leftrightarrow$ *Jede* Cauchy-Folge konvergiert gegen ein $a \in M$

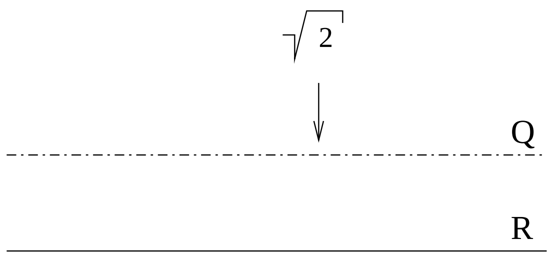
Beispiel

$M = \mathbb{Q}, d(x, y) = |x - y|$ nicht vollständig

Beispiel

$M = \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$ vollständig

$\mathbb{R}$ Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ (completion)



$\sqrt{2}$ fehlt in $\mathbb{Q}$, aber nicht in $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

(i) total geordneter Körper

(ii) Archimedes $\frac{1}{n} \rightsquigarrow 0$

(iii) vollständig: jede Cauchy-Folge hat Grenzwert in $\mathbb{R}$

Folgenkriterium f¸r abgeschlossene Mengen

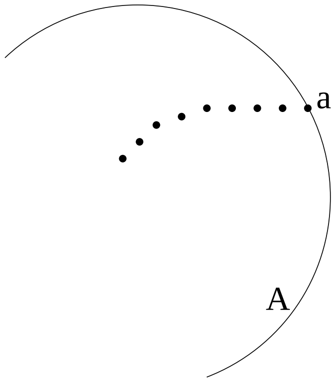
Sei (M, d) metrisch, $A \subset M$

Dann gilt:

$A \underset{\text{abg.}}{\subset} M \Leftrightarrow$ F¸r jede Folge $A \ni a_n \rightsquigarrow a \in M$ gilt $a \in A$

Proof. "$\Rightarrow$" Sei $A \underset{\text{abg.}}{\subset} M$ und sei $A \ni a_n \rightsquigarrow a \in M$.

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n \in M$$



zz. $\quad a \in A,$

Widerspruchsannahme: $a \notin A, a \in M \setminus A \underset{\text{offen}}{\subset} M$

$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0, M_\varepsilon(a) \subset M \setminus A$
Da $a_n \rightsquigarrow a \Longrightarrow \exists n_0 \, \forall n \geq n_0$
$d(a_n, a) < \varepsilon$
$\Longrightarrow A \ni a_n \in M_\varepsilon(a) \subset M \setminus A$
$\Longrightarrow a_n \in A \bigcap M \setminus A = \emptyset, \forall n \geq n_0$ Widerspruch

Also $\quad a \in A.$

"$\Longleftarrow$" $\quad$ Sei Folgenkriterium erf¸llt.
$A \ni a_n \rightsquigarrow a \in M \Longrightarrow a \in A$

zz. $\quad A \underset{\text{abg.}}{\subset} M$

zz. $\quad M \setminus A \underset{\text{offen}}{\subset} M$

Widerspruchsannahme $M \setminus A$ nicht offen

Offen heißt, jeder Punkt hat eine "Sicherheitsumgebung"
Nicht offen heißt, es gibt einen Punkt, der keine "Sicherheitsumgebung" hat.
$\Longrightarrow \exists a \in M \setminus A$ ohne "Sicherheitsumgebung"
$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, M_\varepsilon(a) \not\subset M \setminus A$ (keine Teilmenge)

Wähle $\quad \varepsilon = \frac{1}{n} > 0 \ (n \geq 1)$
$M_{\frac{1}{n}}(a) \not\subset M \setminus A$
$\Longrightarrow \exists a_n \in M_{\frac{1}{n}}(a) \cap A$
$\Longrightarrow A \ni a_n \rightsquigarrow a$ da $d(a_n, a) < \frac{1}{n}$
Nach Voraussetzung gilt $a \in A$.
$\Longrightarrow a \in A \cap (M \setminus A) = \emptyset$ Widerspruch

Also $\quad M \setminus A \underset{\text{offen}}{\subset} M \Longrightarrow A \underset{\text{abg.}}{\subset} M$

$\square$

Korollar. *M vollständig, $A \underset{\text{abg.}}{\subset} M \Longrightarrow A$ vollständig*

Proof. zz. A vollständig (d.h. jede Cauchy-Folge in A hat Limes in A)
Sei $A \ni a_n$ Cauchy-Folge
$\Longrightarrow M \ni a_n$ Cauchy-Folge
$\underset{M\ vollst.}{\Longrightarrow} a_n \rightsquigarrow a \in M$ Konvergenz in M
Da $a_n \in A \Longrightarrow a \in A$ Folgen-Kriterium

$\Longrightarrow a_n \rightsquigarrow a \in A.$ Konvergenz in A
Da (a_n) beliebig $\Longrightarrow A$ vollst.

□

Beispiele

(1) abgeschlossenes Intervall

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ist vollständig

Proof. $\mathbb{R} \setminus [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \bigcup \{x \in \mathbb{R} \mid x > b\} \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}$

$\Longrightarrow [a,b] \underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{R}$ vollst.$\Longrightarrow [a,b]$ vollständig □

(2) abgeschlossene Halbgeraden $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} =]-\infty, b]$ vollst.

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} = [a, +\infty[$ vollst.

(3)
M vollst.$\Longrightarrow M_r[a] = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,a) \leq r\}$ vollst.

(4) $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ nicht abg.

$\mathbb{R} \supset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nicht offen

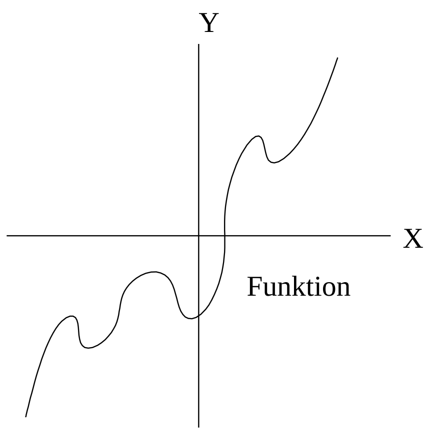
Proof. $\mathbb{Q}$ nicht vollst.$\Longrightarrow \mathbb{Q}$ nicht abgeschlossen. □

1.5 Stetigkeit

Seien X, Y metrische Räume

Metriken d_X, d_Y

$\underset{x}{X} \underset{\mapsto}{\xrightarrow{f}} \underset{f(x)}{Y}$ Abbildung (Funktion)



Graph $G_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$

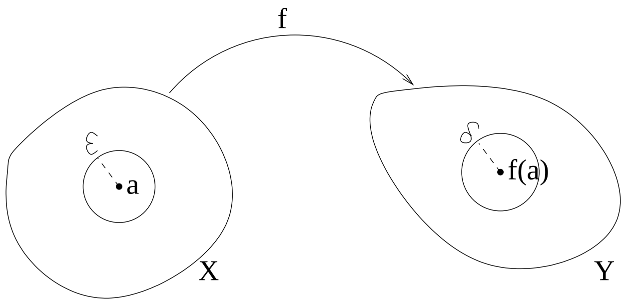
f **stetig** in $a \in X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\, \forall x \in X$

$d_X(x,a) \leq \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$

Äquivalent $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$

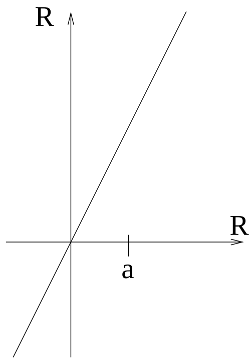
$x \in X_\delta\,[a] \Longrightarrow f(x) \in Y_\varepsilon\,[f(a)]$

Äquivalent $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(X_\delta\,[a]) \subset \underset{Bildmenge}{Y_\varepsilon\,[f(a)]}$



Beispiel $\quad X = Y = \mathbb{R}$

$f(x) = 2x$



Behauptung f stetig in $a \in \mathbb{R}$

$f(a) = 2a$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest

$\delta := \frac{\varepsilon}{2}\ \mathbb{R}_\delta\,[a] = \left[a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right]$

$\mathbb{R}_\varepsilon\,[2a] = [2a - \varepsilon, 2a + \varepsilon]$

$\Longrightarrow f(\mathbb{R}_\delta\,[a]) \subset \mathbb{R}_\varepsilon\,[2a]$

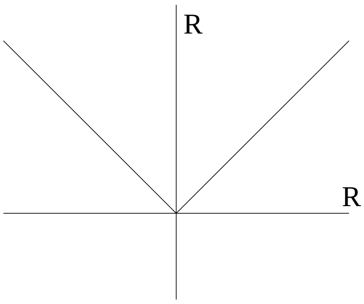
$\Longrightarrow f$ stetig

Beispiel

$\mathbb{R} \underset{\text{stetig}}{\xrightarrow{|\cdot|}} \mathbb{R}$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

Bild Stetigkeit in a=0



Sei $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \mathbb{R}_\delta\left[0\right] = [-\delta, \delta]$

$\delta = \varepsilon$

$\mathbb{R}_\delta\left[|0|\right] = \mathbb{R}_\varepsilon\left[0\right] = [-\varepsilon, \varepsilon]$

$f(\mathbb{R}_\delta\left[0\right]) = \{x \in [-\varepsilon, \varepsilon]\} = [0, \varepsilon] \subset [-\varepsilon, \varepsilon] = \mathbb{R}_\varepsilon\left[|0|\right]$

X, Y metrische Räume

$f : X \to Y$ stetig in $a \in X \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\, \forall x \in X :$

- $d(x, a) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$
- $f(X_\delta\left[a\right]) \subset Y_\varepsilon\left[f(a)\right]$
- $\|x - a\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$ für $X = E, Y = F$
- $|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ für $X = \mathbb{R} = Y$

Satz

$f : X \to Y$ **stetig** (in jedem Pkt $a \in X$)

$\Leftrightarrow \forall V \underset{\text{offen}}{\subset} Y, f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \underset{\text{offen}}{\subset} X$

Proof. "$\Rightarrow$" Sei f stetig und $V \underset{\text{offen}}{\subset} Y$

zz. $U := f^{-1}(V) \underset{\text{offen}}{\subset} X$

Sei $a \in U \Rightarrow b := f(a) \in V \underset{\text{offen}}{\subset} Y$

$\Rightarrow\ \exists \varepsilon > 0, Y_\varepsilon\left[b\right] \subset V$

f stetig in a $\Rightarrow\ \exists \delta > 0, f(X_\delta\left[a\right]) \subset Y_\varepsilon\left[b\right] \subset V$

$\Rightarrow X_\delta\left[a\right] \subset f^{-1}(V) = U$

da $a \in V$ bel $\Rightarrow U$ offen

"$\Leftarrow$" Sei $f : X \to Y$ mit der Eigenschaft "Urbilder offener Mengen sind offen."

zz. f stetig in jedem $a \in X$

$b = f(a) \in Y$, sei $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow V := Y_\varepsilon(b) \underset{\text{offen}}{\subset} Y$

${}_{Vor.} \Rightarrow U = f^{-1}(V) \underset{\text{offen}}{\subset} X \Rightarrow\ \exists \delta > 0, X_\delta(a) \subset U = f^{-1}(V)$

$\Rightarrow f(X_\delta(a)) \subset V = Y_\varepsilon(b) = Y_\varepsilon(f(a))$

${}_{\varepsilon \text{ bel.}} \Rightarrow f$ stetig in $a \Rightarrow_{a \in X bel} f$ stetig

$\square$

Folgenkriterium f¸r Stetigkeit

$f : X \to Y$ stetig $\Leftrightarrow$ $\forall X \ni x_n \rightsquigarrow x$ gilt $Y \ni f(x_n) \rightsquigarrow f(x)$

"Bildfolgen konvergenter Folgen sind konvergent."

$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$

Proof. "$\Rightarrow$" Sei f stetig und $X \ni x_n \rightsquigarrow x$

$\Rightarrow$ f stetig in x $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\, \forall x' \in X : d(x', x) \leq \delta \Rightarrow d(f(x'), f(x)) \leq \varepsilon$

Da $x_n \rightsquigarrow x \Rightarrow\ \exists n_0\, \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) \leq \delta$

$\Rightarrow d(f(x_n), f(x)) \leq \varepsilon$

Da $\varepsilon > 0$ bel.$\Rightarrow f(x_n) \rightsquigarrow f(x)$

"$\Leftarrow$" Sei $f : X \to Y$ mit Eigenschaft "Bilder konvergenter Folgen sind konvergent."

zz. f stetig in jedem Punkt $a \in X$

Widerspruchsannahme: f nicht stetig in a

$\Rightarrow\ \exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\ \exists x \in X : d(x, a) \leq \delta \wedge d(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$

Wähle $\delta = \frac{1}{n}\ \exists x_n \in X\ d(x_n, a) \leq \frac{1}{n} \wedge d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$

Dann gilt $x_n \rightsquigarrow a$, aber $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(a)$

Also Widerspruch zum Folgenkriterium.

Also f stetig.

□

Satz: Verkettung stetig

$X \underset{stetig}{\xrightarrow{f}} Y \underset{stetig}{\xrightarrow{g}} Z \Rightarrow$ Verkettung $X \underset{stetig}{\xrightarrow{g\circ f}} Z$

Proof. 1. nach Definition

zz. $g \circ f$ stetig in $a \in X$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest (Beweis r¸ckwärts, bei g beginnend)

Da g stetig in $b = f(a) \Rightarrow\ \exists \eta_{(eta)} > 0$ mit $\forall y \in Y : d_Y(y, b) \leq \eta \Rightarrow d_Z(g(y), g(b)) \leq \varepsilon$

Da f stetig in $a \Rightarrow\ \exists \delta > 0$ mit $\forall x \in X : d_X(x, a) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) \leq \eta$

$\underset{y=f(x),b=f(a)}{\Rightarrow} d_Z(g(f(x)), g(f(a))) \leq \varepsilon$

$\Rightarrow d_Z((g \circ f(x), (g \circ f)(a)) \leq \varepsilon$

Da $\varepsilon > 0$ bel $\Rightarrow g \circ f$ stetig in a

Da $a \in X$ bel $\Rightarrow g \circ f$ stetig

□

Proof. 2. mit Folgenkriterium

Sei $X \ni x_n \rightsquigarrow a \underset{f\ stetig}{\Rightarrow} Y \ni f(x_n) \rightsquigarrow f(a)$

$\underset{g\ stetig}{\Rightarrow} Z \ni \underbrace{g(f(x_n))}_{=(g\circ f)(x_n)} \rightsquigarrow \underbrace{g(f(a))}_{=(g\circ f)(a)}$

$\underset{Folgen-Krit.}{\Rightarrow} g \circ f$ stetig

□

Anwendung

(i) $\mathbb{R} \underset{stetig}{\xrightarrow{|\cdot|}} \mathbb{R}$

(ii) $X \underset{stetig}{\xrightarrow{f}} \mathbb{R} \Rightarrow X \underset{stetig}{\xrightarrow{|f|}} \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto |\ f(x)\ |$

Proof. (i)

$||x| - |y|| \leq |x - y|$

Sei $\varepsilon > 0, a \in \mathbb{R}$ fest, $\delta := \varepsilon$

$d(x, a) = |x - a| \leq \delta\ (= \varepsilon)$

$\Rightarrow d(|x|\,, |a|) = ||x| - |a|| \leq_* |x - a| \leq \varepsilon$

Da $\varepsilon > 0$ bel $\Rightarrow |\cdot|$ stetig in $a \Rightarrow |\cdot|$ stetig

(ii)

$X \underset{stetig}{\xrightarrow{f}} \mathbb{R} \underset{stetig}{\xrightarrow{|\cdot|}} \mathbb{R} \Rightarrow |\cdot| \circ f = |f|$ stetig □

Proof. (*) allgemeiner gilt für normierten Raum E

$\forall u, v \in E : |\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$ □

Analog

$X \underset{stetig}{\xrightarrow{f}} (E, \|\cdot\|) \Rightarrow X \underset{stetig}{\xrightarrow{\|f\|}} \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \|f(x)\|$

Proof. $E \underset{stetig}{\xrightarrow{\|\cdot\|}} \mathbb{R}$ mit $u \to \|u\|$

$\Rightarrow X \underset{stetig}{\xrightarrow{f}} E \underset{stetig}{\xrightarrow{\|\cdot\|}} \mathbb{R}\ ,\ \|\cdot\| \circ f$ stetig □

Stetigkeits-Regeln

(i) Summenregel
$X \underset{stetig}{\xrightarrow{f,g}} E \Rightarrow X \underset{stetig}{\xrightarrow{f+g}} E\ ,\ x \longmapsto f(x) + g(x)$

(ii) Produktregel
$X \underset{stetig}{\xrightarrow{f}} \mathbb{R}, X \underset{stetig}{\xrightarrow{g}} E(oder\,\mathbb{R}) \Rightarrow X \underset{stetig}{\xrightarrow{fg}} E(oder\,\mathbb{R})$

(iii) Quotienten-Regel
$X \underset{stetig}{\xrightarrow{f}} \mathbb{R}\ ,\ X \underset{stetig}{\xrightarrow{g}} \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{f}{g} : X \underset{stetig}{\to} \mathbb{R}$

Proof. (mit Folgenkriterium)

(i) $f, g : X \xrightarrow{stetig} E$

zz. $f + g : X \to E$ stetig
Sei $X \ni x_n \rightsquigarrow a$
f stetig in $a \Rightarrow f(x_n) \rightsquigarrow f(a)$
g stetig in $a \Rightarrow g(x_n) \rightsquigarrow g(a)$

Limes-Summenregel $f(x_n) + g(x_n) \rightsquigarrow f(a) + g(a)$
$f(x_n) + g(x_n) = (f + g)(x_n) \rightsquigarrow (f + g)(a)$
$\Rightarrow_{Folgen-Krit}\ f + g$ stetig

Produktregel $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig

zz. fg stetig in $a \in X$
Sei $X \ni x_n \rightsquigarrow a$
${}_{f\ stetig, g\ stetig} \Rightarrow f(x_n) \rightsquigarrow f(a), g(x_n) \rightsquigarrow g(a)$

Limes-Produktregel $\underbrace{f(x_n) \cdot g(x_n)}_{(f \cdot g)(x_n)} \rightsquigarrow \underbrace{f(a) \cdot g(a)}_{(f \cdot g)(a)}$

$\Longrightarrow$ Folgen-Kriterium $f \cdot g$ stetig

(iii) analog

□

Stetigkeits-Regeln

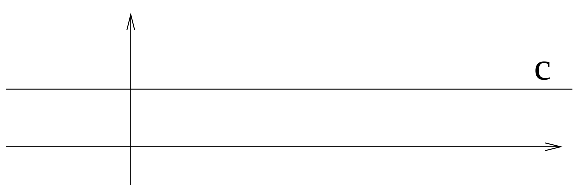
Summen-Regel $f, g : M \underset{stetig}{\to} E$
$\Rightarrow f + g : M \to E$ stetig

Produkt-Regel $f : M \underset{stetig}{\to} E, g : M \underset{stetig}{\to} E$
$\Rightarrow fg : M \underset{stetig}{\to} E$
(Speziell: $E = \mathbb{R}$)

Quotienten-Regel $f, g : M \underset{stetig}{\to} \mathbb{R}$
g ohne Nullstelle,
$g(M) \subset \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\} = G(\mathbb{R})$
$\Rightarrow \frac{f}{g} : M \underset{stetig}{\to} \mathbb{R}$ stetig

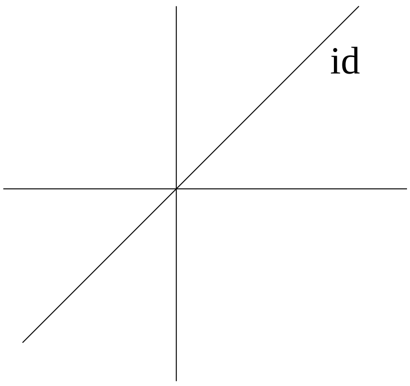
Beispiele stetiger Funktionen

(0) konstante Abbildung $M \underset{stetig}{\to} M$
$x \to c = const \in M$
$\mathbb{R} \underset{stetig}{\to} \mathbb{R}$
$x \to 1 = x^0$



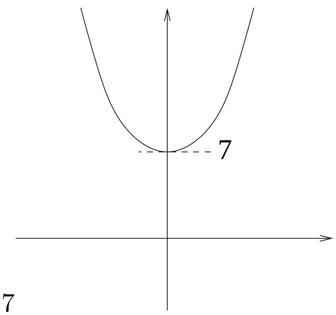
Bild

(1) Identitäts-Abbildung $I = id : \underset{x}{M} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{x}{M}$ stetig



$M = \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(2) $\mathbb{R} \xrightarrow[stetig]{x^2+7} \mathbb{R}$



$x \rightarrow x^2 + 7$

$f(x) = x$ stetig

${}_{Prod-Regel} \Rightarrow g(x) = x^2 = f(x) \cdot f(x)$ stetig

$h(x) = 7$ stetig

${}_{Summ-Regel} \Rightarrow k(x) = x^2 + 7 = g(x) + h(x)$ stetig

(3) $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$ stetig

$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$g(x) = x$ stetig

$h(x) = -3$ stetig

$k(x) = 5$ stetig

$\Longrightarrow \begin{array}{l} p(x) = x - 3 = g(x) + h(x) \quad \text{stetig} \\ q(x) = x + 5 = g(x) + k(x) \quad \text{stetig} \end{array}$

Wegen $x \geq 0$ gilt $q(x) \neq 0$

${}_{Quot-Regel} \Longrightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x-3}{x+5} = f(x)$ stetig

(4) $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f$ stetig auf $\mathbb{R}, \big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|$

Satz (technischer Hilfssatz)

$X \xrightarrow{f} Y \qquad X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$

wobei $A_i \underset{\text{abg.}}{\subset} X \qquad (X \setminus A_i \underset{\text{offen}}{\subset} X)$

Dann ist f stetig, falls f¸r alle $1 \leq i \leq n$

$f\,|_{A_i} \colon A_i \to Y$ stetig **Einschränkung (Restriktion)**

Proof. f stetig $\Leftrightarrow \forall V \subset Y : f^{-1}(V) \underset{\text{offen}}{\subset} X$

Äquivalent, wegen $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

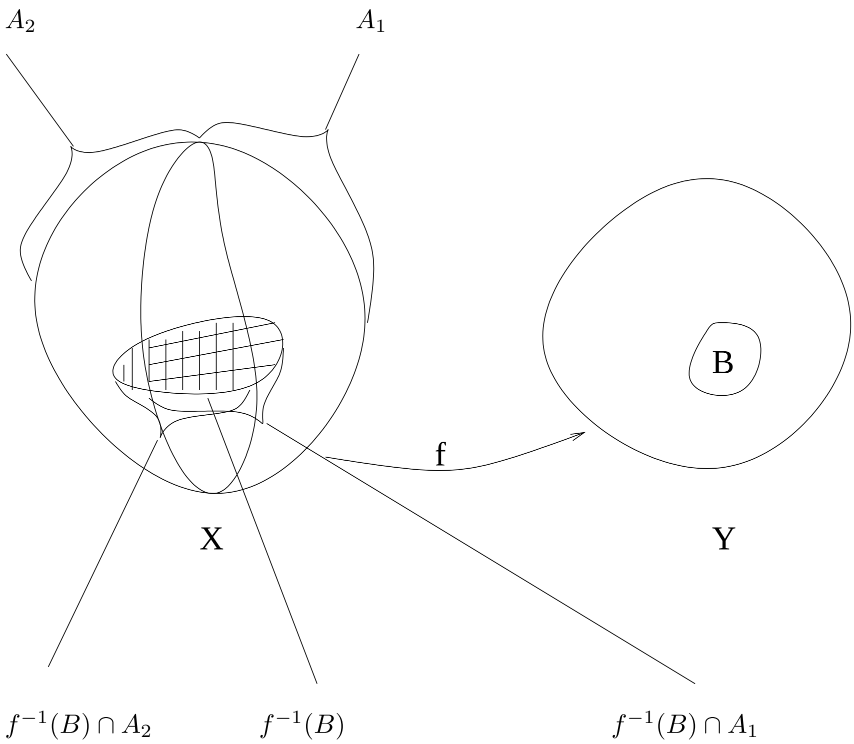
f stetig $\Leftrightarrow \forall B \underset{\text{abg.}}{\subset} Y : f^{-1}(B) \underset{\text{abg.}}{\subset} X$

Sei $B \underset{\text{abg.}}{\subset} Y$

Da $f\,|_{A_i} \colon A_i \to Y$stetig

$\Longrightarrow X \underset{\text{abg.}}{\supset} A_i \underset{\text{abg.}}{\supset} (f\,|_{A_i})^{-1}(B) = A_i \bigcap f^{-1}(B) \underset{\text{abg.}}{\subset} X$

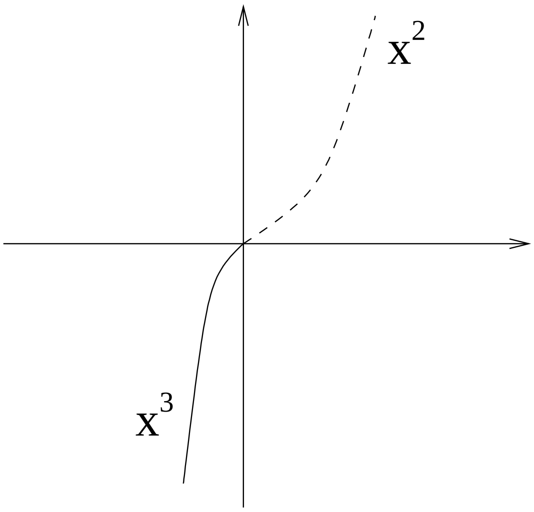
$f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1..n} (A_i \bigcap f^{-1}(B)) \underset{\text{abg.}}{\subset} X$



(Stetigkeit geht nur ¸ber Abgeschlossenheit ein) □

Anwendung

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x^3 & x \leq 0 \end{cases} \text{ stetig auf } \mathbb{R}$$



Proof. $A = \left]-\infty, 0\right] \underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{R}$

$B = \left[0, \infty\right[\underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{R}$

$f\mid_B = x^2$ stetig nach Produktregel

$f\mid_A = x^3$ stetig nach Produktregel

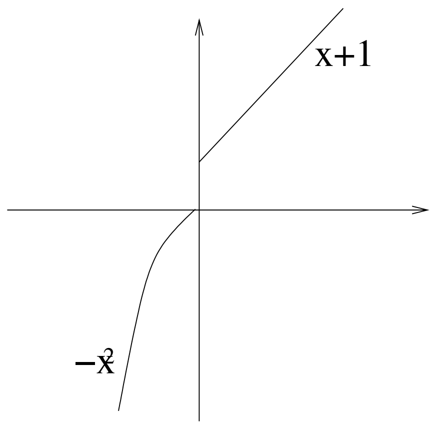
$0 \in A \bigcap B$

$f\mid_A (0) = 0^3 = 0^2 = f|_B\ (0)$

${}_{HS} \Longrightarrow f$ stetig auf $\mathbb{R}$ $\square$

Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \quad \text{unstetig in } a = 0$$



Proof. mit Folgenkriterium

Unstetigkeit: $\exists a_n \to 0$

$f(a_n) \longrightarrow$ konvergiert nicht gegen $f(0) = 1$

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$$f(a_n) = \begin{cases} \frac{1}{n} + 1 \rightsquigarrow 1 & n \text{ gerade} \\ -\frac{1}{n^2} \rightsquigarrow 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$ $\square$

Kapitel 2

Hauptsätze der Topologie

2.1 Supremum und Infimum

$M = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$

monoton (isoton/antiton)

Definition. Folge $a_n \in \mathbb{R}$ monoton $\Leftrightarrow$

$a_n \leq a_{n+1}$ isoton, monoton wachsend, $a_n \uparrow$

$a_n \geq a_{n+1}$ antiton, monoton fallend, $a_n \downarrow$

Beispiel

Sei $q > 0$ fest, $q \neq 1$ "Basis" $\Rightarrow a_n = q^n$ Potenzfolge

$\Rightarrow$

(i) $q^n \uparrow$ f¸r $q > 1$

(ii) $q^n \downarrow$ f¸r $q < 1$

Proof. (ii) $q < 1$, zz. q^n monoton fallend

$a_{n+1} = q^{n+1} = q \cdot q^n < 1 \cdot q^n = q^n = a_n$

□

Satz (monotone Konvergenz)

Sei $\mathbb{R} \ni a_n \uparrow$, nach oben beschränkt

d.h. $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M$

$\Rightarrow (a_n)$ konvergent, $a_n \to a \leq M$

[monoton + beschränkt $\Rightarrow$ konvergent]

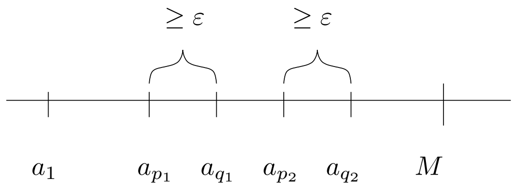
Proof. $a_n \leq a_{n+1} \leq M$

Widerspruch: Angenommen, (a_n) nicht Cauchy

$\exists \varepsilon > 0 \, \forall n \, \exists p, q \geq n : |a_p - a_q| \geq \varepsilon$

Œ $q > p \geq n \underset{isoton}{\Rightarrow} a_q - a_p \geq \varepsilon$

n=1 $\exists q_1 > p_1 \geq 1$ mit $a_{q_1} - a_{p_1} \geq \varepsilon$



$n = q_1 \Rightarrow \exists q_2 > p_2 \geq q_1$ mit $a_{q_2} - a_{p_2} \geq \varepsilon$

$n = q_2 \Rightarrow \exists q_3 > p_3 \geq q_2$ mit $a_{q_3} - a_{p_3} \geq \varepsilon$

Allgemein $\exists p_k < q_k \leq p_{k+1} < q_{k+1} \leq ..$ mit $a_{q_k} - a_{p_k} \geq \varepsilon$ für alle k

$\Rightarrow a_{q_k} \geq a_{p_k} + \varepsilon$

$M \geq a_{q_k} \geq a_{p_k} + \varepsilon \geq a_{q_{k-1}} + \varepsilon$

$\geq a_{p_{k-1}} + \varepsilon + \varepsilon = a_{p_{k-1}} + 2\varepsilon$

$\geq a_{q_{k-2}} + 2\varepsilon \geq (a_{p_{k-2}} + \varepsilon) + 2\varepsilon$

$= a_{p_{k-2}} + 3\varepsilon \geq .. \geq a_{p_{k-j}} + j\varepsilon \geq a_1 + j\varepsilon$

$\Rightarrow a_1 + j\varepsilon \leq M \, \forall j$

$\Rightarrow j \leq \frac{M - a_1}{\varepsilon}$

Archimedes $\exists j > \frac{M-a_1}{\varepsilon}$ Widerspruch □

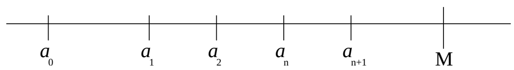
Also (a_n) Cauchy-Folge

$\mathbb{R}$ vollständig (Axiom)

$\Rightarrow a_n \to a \in \mathbb{R}$

zz. $a \leq M$

Bild



allgemein gilt $X \underset{\text{abg.}}{\supset} A \ni a_n \to a \in X \qquad \Rightarrow a \in A$

$A =]-\infty, M] \underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{R}$

$A \ni a_n \to a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow a \in A, a \leq M$ □

Proposition 2.1.1. $0 < q < 1 \Rightarrow q^n \to 0$ *Nullfolge*

Proof. $a_n = q^n$ antiton, $\quad a_{n+1} \leq a_n$

$a_{n+1} = q^{n+1} = q \cdot \underbrace{q^n}_{>0} < 1 \cdot q^n = q^n = a_n$

nach unten beschränkt $q^n \geq 0 = M$

$\underset{monot.\,konv.}{\Rightarrow} \exists q^n \to a \in \mathbb{R}, a \geq 0$

zz. $a = 0$

$q \cdot a = q \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} q^{n+1} \underbrace{=}_{\substack{\text{Index} - \text{Shift} \\ m=n+1}} \lim_{m\to\infty} q^m = a$

$\Rightarrow qa = a$

$(q-1)a = 0 \underset{q\neq 1}{\Rightarrow} a = 0$ □

Beispiel 2.1.2. $q = \frac{1}{2}, 2^{-n} \to 0$

Proposition. $q > 1 \Rightarrow (q^n)$ *divergent (unbeschränkt)*

Proof. (Widerspruch) $q^n \to b \in \mathbb{R} \quad (q > 1)$

da $q^{-n} = (\frac{1}{q})^n \to 0$, da $\frac{1}{q} < 1$

$_{Limes-Produktregel} \Rightarrow 1 = q^n * (\frac{1}{q})^n \to b * 0 = 0$ Widerspruch □

Beispiel 2.1.3. $q = 2,\ 2^n$ divergent

$2^n \underset{Indukt.}{\geq} n$, da n unbeschränkt (Archimedes)

Bernoulli-Ungleichung

$\mathbb{R} \ni x > -1,\ x \neq 0 \qquad \Rightarrow (1+x)^n > 1 + nx,\ \forall n > 1$

Proof. Induktion

<u>$n = 2$</u> $\qquad (1+x)^2 = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{>0} > 1 + 2x$

<u>$2 \leq n \to n+1$</u> $(1+x)^{n+1}$

$$\begin{aligned} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\underset{IV}{>} (1+nx)\underbrace{(1+x)}_{>0} \\ &= 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{>0} \\ &> 1 + nx + x \\ &= 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

□

Satz $(1+\frac{1}{n})^n \downarrow e \uparrow (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

$e =$ Eulersche Zahl $= 2,715\ldots$

Proof. zz. $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ isoton

$a_n = (\frac{n+1}{n})^n = \frac{(n+1)^n}{n^n}$

$a_{n-1} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}$

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}}$

$= \frac{[(n+1)(n-1)]^{n-1}(n+1)}{(n^2)^{n-1} \cdot n}$

$= \frac{(n^2-1)^{n-1}(n+1)}{(n^2)^{n-1}\cdot n}$

$= (\frac{n^2-1}{n^2})^{n-1}\ \frac{n+1}{n}$

$= (1-\frac{1}{n^2})^{n-1}\ \frac{n+1}{n}$

$> (1-\frac{n-1}{n^2})\frac{n+1}{n}$ [Bernoulli für $x = -\frac{1}{n^2} > -1$]

$= \frac{n^2(n+1)-n^2+1}{n^3} = \frac{n^3+1}{n^3} > 1$

Also $a_n = (1+\frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n$ isoton

warum beschränkt?

$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} > a_n$

zz. $b_n \geq b_{n+1}$ antiton

$b_n = (\frac{n+1}{n})^{n+1}$

$= b_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}},\ b_{n-1} = \frac{n^n}{(n-1)^n}$

$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{n^n}{(n-1)^n}\cdot\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$

$= \frac{(n^2)^n\, n}{[(n-1)(n+1)]^n(n+1)}$

$= \frac{(n^2)^n}{(n^2-1)^n}\cdot\frac{n}{n+1}$

$= (\frac{n^2}{n^2-1})^n\cdot\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\frac{n}{n+1}$

$> \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1}$ [Bernoulli für $x = \frac{1}{n^2-1}$]

$= \frac{n(n^2-1)+n^2}{(n^2-1)(n+1)}$ nachrechnen

$= \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$

Also $b_n\ \downarrow$ antiton

$\Rightarrow\uparrow a_n < b_n \downarrow$

$\Rightarrow$ jedes b_n obere Schranke von (a_n)

jedes a_n untere Schranke von (b_n)

$\Rightarrow\ a_n \to a,\ b_n \to b$

$0 < b_n - a_n \to b-a$

$\Rightarrow b-a \geq 0$

$b_n - a_n = (\frac{n+1}{n})^{n+1} - (\frac{n+1}{n})^n$

$= (\frac{n+1}{n})^n\ (\frac{n+1}{n}-1)$

$$\underbrace{(\frac{n+1}{n})^n}_{a_n\to a}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \to a\cdot 0 = 0$$

Also $b_n - a_n \to 0 \Rightarrow b = a =: e$

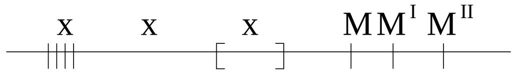
$2 = a_1 < a_n < e < b_n < b_1 = 4$ □

2.2 Supremum

Definition. $\mathbb{R} \supset X$

obere Schranke $M : \forall x \in X, x \leq M$

Kurznotation $X \leq M$



Satz (vom Supremum)

Sei $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ nicht leer, X nach oben beschränkt ($X \leq M$)

$\Rightarrow \exists \mathbb{R} \ni s \geq X \ \forall t \geq X,\ t \geq s$

$s =$ **kleinste obere Schranke** $= \sup X$

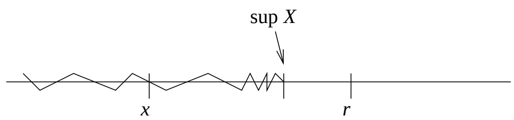
analog $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, X nach unten beschränkt ($X \geq M$)

$\Rightarrow \exists \mathbb{R} \ni r \leq X \ \forall p \leq X,\ p \leq r,$

$r =$ **gröflte untere Schranke** $= \inf X$

Proof. $X \neq 0 \Rightarrow \exists x \in X$

X nach oben beschränkt $\Rightarrow \exists r \geq X$



sei $n \geq 1$ fest

$\underset{Archim.}{\Rightarrow} \quad \exists m \geq 1, m \geq 2^n(r - x)$

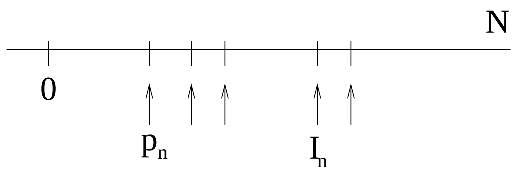
$\Rightarrow m \cdot 2^{-n} \geq r - x$

$\Rightarrow x + m \cdot 2^{-n} \geq r \geq X$

$\Rightarrow X \leq x + m \cdot 2^{-n}$ obere Schranke

Also $I_n := \{m \in \mathbb{N} \mid x + m \cdot 2^{-n} \geq X\} \neq \emptyset$

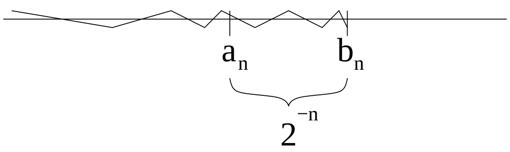
$p_n := min\, I_n$ (kleinstes Element von I_n)



Dann gilt

$b_n := x + p_n 2^{-n} \geq X$, da $p_n \in I_n$

$a_n = x + (p_n - 1) 2^{-n} \not\geq X$, da $p_n - 1 \notin I_n$



Beh.

(i)	$a_n < b_n$,
(ii)	$b_n - a_n \to 0$
(iii)	$a_n \uparrow$
(iv)	$b_n \downarrow$

(i)&(ii) $\quad b_n - a_n = (x + p_n 2^{-n}) - (x + (p_n - 1)2^{-n})$

$= x + p_n 2^{-n} - x - x(p_n - 1)2^{-n} = 2^{-n}$

$\Rightarrow 0 < b_n - a_n \rightsquigarrow_{q=\frac{1}{2}} 0$

(iv) $\quad X \leq x + p_n 2^{-n} = x + (2p_n)2^{-(n+1)}$

$\Rightarrow 2p_n \in I_{n+1} \Rightarrow 2p_n \geq p_{n+1}$

$\Rightarrow b_{n+1} = x + p_{n+1}2^{-(n+1)} \leq x + 2p_n 2^{-(n+1)} = x + p_n 2^{-n} = b_n$

$\Rightarrow b_n \downarrow$

(iii) $\quad X \nleq x + (p_n - 1)2^{-n} = x + 2(p_n - 1)2^{-(n+1)}$ keine obere Schranke

$\Rightarrow 2(p_n - 1) \notin I_{n+1}$

$\Rightarrow 2(p_n - 1) < p_{n+1}$

$\Rightarrow 2(p_n - 1) \leq p_{n+1} - 1$

$a_{n+1} = x + (p_{n+1} - 1)2^{-(n+1)} \geq x + 2(p_n - 1)2^{-(n+1)} = x + (p_n - 1)2^{-n} = a_n$

$\Rightarrow (a_n) \uparrow$

Wegen (i)-(iv) existiert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = s$

$x + (p_n - 1)2^{-n} = a_n \leq s \leq b_n = x + p_n 2^{-n}$

Beh. $s \geq X$

Widerspruch $s \ngeq X$

$\Rightarrow \exists y \in X,\ s < y$

$\underset{Arch.}{\Rightarrow} \exists n, 2^{-n} < y - s$

$\Rightarrow X \leq x + p_n 2^{-n} = x + (p_n - 1)2^{-n} + 2^{-n} \leq s + 2^{-n} < y$

Widerspruch, da $y \in X$

Beh. $t \geq X \Rightarrow t \geq s$

Widerspruch $t < s \Rightarrow \exists n,\ 2^{-n} \leq s - t$

$\Rightarrow X \leq t \leq s - 2^{-n} \leq (x + p_n 2^{-n}) - 2^{-n}$

$= x + (p_n - 1)2^{-n} = a_n$

Widerspruch, da a_n keine obere Schranke

$\square$

Beispiel 2.2.1. $X =$ Intervall mit Endpunkten $a < b$ (offen / abgeschlossen / halboffen)

$\Rightarrow \sup X = b$, $\inf X = a$

Infimum

$\mathbb{R} \supset X \neq \emptyset$, nach unten beschränkt

$\Rightarrow \; \exists p = \inf X =$ gröflte untere Schranke, eindeutig bestimmt durch

(i) $\quad p \leq X$

(ii) $\quad q \leq X \Rightarrow q \leq p$

Proposition 2.2.2. *(i)* $\quad \mathbb{R} \supset Y \supset X \neq \emptyset$

Y nach oben beschränkt $\Rightarrow \sup Y \geq \sup X$

Y nach unten beschränkt $\Rightarrow \inf Y \leq \inf X$

(ii) $\quad X \neq \emptyset$

X n.o. beschr.$\Leftrightarrow -X = \{-x \mid x \in X\}$ *nach unten beschränkt*

und $-\sup X = \inf(-X)$

$\sup X = -\inf(-X)$

Proof. $Y \supset X, \text{zz.} \sup Y \geq \sup X$

$t := \sup Y \geq Y \supset X \Rightarrow t \geq X \qquad$ obere Schranke von X

$\Rightarrow t \geq s := \sup X \qquad$ kleinste obere Schranke von X

□

Beispiel 2.2.3. $X = [a, b] \quad$ Intervall

$\Rightarrow \sup X = b$, $\inf X = a$

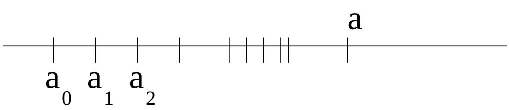
$$-X = [-b, -a] \Rightarrow \begin{array}{l} \sup(-X) = -a = -\inf X \\ \inf(-X) = -b = -\sup X \end{array}$$

Proposition 2.2.4.

$\mathbb{R} \ni a_n$ isoton, beschränkt

$\Rightarrow X := \{a_n \mid n \geq 0\}$ hat Supremum

$\sup X = \sup_{n \geq 0} \; a_n = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$



$a_n \to a = \sup X$

Analog (a_n) antiton, beschränkt

$\Rightarrow \inf_{n \geq 0} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

Proof. zz. $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ kleinste obere Schranke von $X = \{a_n \mid n \geq 0\}$
zz. a obere Schranke

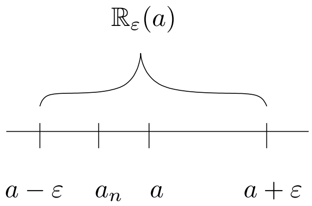
Da $a_n \to a$ und (a_n) isoton $\Rightarrow a_n \leq a$

$\Rightarrow a$ obere Schranke
zz. a *kleinste* obere Schranke

Äquivalent: $b < a \Rightarrow b$ keine obere Schranke
Setze $\varepsilon := a - b > 0$. Da $a_n \to a \Rightarrow$

$\exists n_0\, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$

$\Rightarrow b = a - \varepsilon < a_n \leq a$



$\Rightarrow b$ keine obere Schranke von X ☐

Proposition 2.2.5.

$\mathbb{R} \underset{\text{abg.}}{\supset} A$ beschränkt $\Rightarrow$

(i) $\sup A = max\, A \in A$ größtes Element von A

(ii) $\inf A = min\, A \in A$ kleinstes Element von A

Proof. zz. $\sup A \in A$.
Setze $s := \sup A$ kleinste obere Schranke

$\Rightarrow \forall n \geq 1,\ s - \frac{1}{n} \not\geq A$

$\Rightarrow\ \exists a_n \in A,\ s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$ (ob. Schr)

$\Rightarrow |a_n - s| < \frac{1}{n} \Rightarrow a_n \to s$

Da $a_n \in A \underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{R} \Rightarrow s \in A$ ☐

Beispiel 2.2.6. $X = \left\{(\frac{n+1}{n})^n : n \geq 1\right\}$

Beh. $\sup X = e$ (Eulersche Zahl)

$a_n = (\frac{n+1}{n})^n \uparrow$ isoton

$\underset{Prop}{\Rightarrow} \sup\limits_{n\geq 1} a_n = \sup\limits_{n\geq 1} (\frac{n+1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$

aber X nicht abg., $e \notin X$

$Y = X \bigcup \{e\} \underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{R}$

und $\sup Y = \max\, Y = e$

2.3 Kompaktheit

Sei (M, d) metrischer Raum

(angenommen separabel, z.B. $M = \mathbb{R}$)

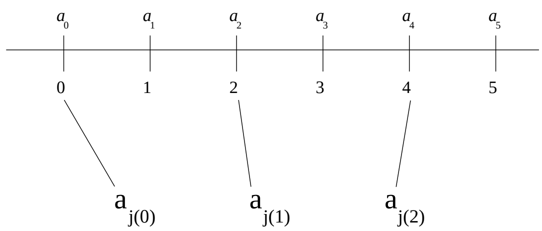
Sei $\underset{n \;\to\; a_n}{\mathbb{N} \to M}$ Folge in M

Definition. Sei $j : \underset{m \;\to\; j(m)}{\mathbb{N} \to \mathbb{N}}$

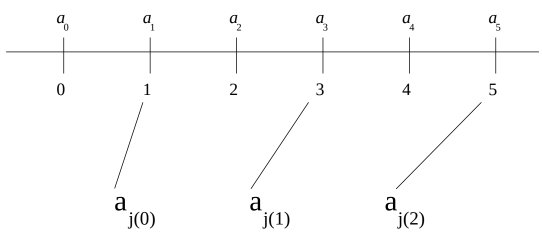
mit Voraussetzung $j(m) \geq m$ für alle m.

Dann heißt $(a_{j(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ **Teilfolge** von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Beispiel 2.3.1. $(a_{2m})_{m \geq 0}$ Teilfolge, da $j(m) = 2m \geq m$



Beispiel 2.3.2. $(a_{2m+1})_{m \geq 0}$ Teilfolge, da $j(m) = 2m + 1 \geq m$



Beispiel 2.3.3. $a_n = (-1)^n = (1, -1, 1, -1, ...)$

$\Rightarrow a_{2m} = (1, 1, 1, 1, 1, ...)$ konstant

$a_{2m+1} = (-1, -1, -1, -1, ...)$ konstant

Proposition 2.3.4. $a_n \to a \Rightarrow a_{j(m)} \to a$

Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent (R¸ckrichtung gilt nicht)

Proof. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0$

$d(a_n, a) \leq \varepsilon$
Setze $m_0 := n_0 \Rightarrow \forall m \geq m_0 = n_0$

$j(m) \geq m \geq n_0$

$\Rightarrow d(a_{j(m)}, a) \leq \varepsilon$ □

Anwendung

Für $0 < q < 1$ gilt

$\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} q^n \quad (= 0)$

Allgemein gilt $a_n \to a \Rightarrow a_{n+1} \to a$

denn setze $j(m) := m + 1 \geq m$

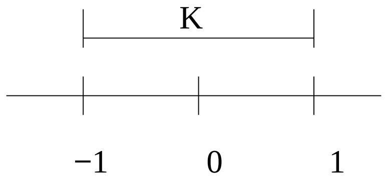
$\Rightarrow (a_{m+1})_{m\geq 0}$ ist Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$

Definition. Sei $K \subset M$ metrisch. K **kompakt** $\Leftrightarrow$

Jede Folge $a_n \in K$ hat eine (in K) konvergente Teilfolge $a_{j(m)} \rightsquigarrow a \in K$

Beispiel 2.3.5. $[-1, 1] = K$ kompakt (wird später gezeigt)

$a_n = (-1)^n \in K$



a_n divergent. Dennoch existiert konvergente Teilfolge $a_{2m} = 1 \to 1$ oder auch $a_{2m+1} = -1 \to -1$

Satz 1

(Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt)

$$X \underset{stetig}{\overset{f}{\to}} Y, \text{ kompakt } K \subset X \Rightarrow \text{kompakt } f(K) \subset Y$$

Proof. Sei $b_n \in f(K)$ beliebige Folge

zz. $\exists$ konvergente Teilfolge $(b_{j(m)})$ mit Grenzwert in $f(K)$

$b_n \in f(K) \Rightarrow b_n = f(a_n), a_n \in K$

K kompakt $\Rightarrow$ $\exists$ konvergente Teilfolge $a_{j(m)} \to a \in K$

f *stetig* $\Rightarrow b_{j(m)} = f(a_{j(m)}) \underset{Folgenkriterium}{\rightsquigarrow} f(a) \in f(K)$ □

Satz 2

(Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt)

$\underset{\text{kompakt}}{K} \underset{\text{abg.}}{\supset} A \Rightarrow \underset{\text{kompakt}}{A}$

Proof. Sei $a_n \in A$ Folge $\underset{A\subset K}{\Rightarrow} a_n \in K$ kompakt

$\Rightarrow$ $\exists$ konvergente Teilfolge $a_{j(m)} \rightsquigarrow a \in K$

Da $a_{j(m)} \in A$ und A abg.

$\underset{Folgen-Krit.}{\Rightarrow} a \in A$

$\Rightarrow a_{j(m)} \rightsquigarrow a \in A$ □

Satz 3

(Kompakte Mengen sind abgeschlossen)

Sei $M \supset K$ kompakt $\Rightarrow M \underset{\text{abg.}}{\supset} K$

Proof. Folgenkriterium: $\forall K \ni a_n \rightsquigarrow a \in M$ gilt $a \in K$

Sei $a_n \in K, a_n \rightsquigarrow a \in M$
Da K *kompakt* $\Rightarrow$ $\exists$ konvergente Teilfolge $a_{j(m)} \rightsquigarrow b \in K$
Da $a_n \rightsquigarrow a \Rightarrow a_{j(m)} \rightsquigarrow a \in M$

Eindeutigkeit des Limes: $a = b \in K$

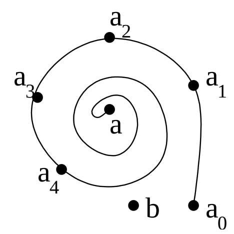
$\Rightarrow a \in K$ □

Proposition 2.3.6. $a_n \in M, a_n \rightsquigarrow a$

$K := \{a_n := n \geq 0\} \cup \{a\}$

$\Rightarrow K \underset{\text{abg.}}{\subset} M$ *(sogar kompakt)*

graphisch



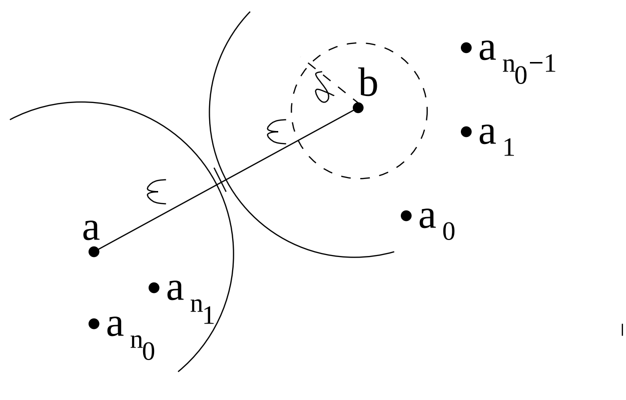
Proof. zz. $M \setminus K \underset{\text{offen}}{\subset} M$

Sei $b \in M \setminus K, a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$\Rightarrow d(a,b) > 0$ da $a \neq b$

$\Rightarrow \exists n_0 \forall n \geq n_0 : d(a_n, a) \leq \frac{d(a,b)}{2} = \varepsilon$

$M_\varepsilon(a) \cap M_\varepsilon(b) = \emptyset$ Dreiecks-Ungleichung



$\delta = \min\left(\frac{d(a,b)}{2}, d(a_i, b), i \in n_0\right) > 0$

$\Rightarrow M_\delta(b) \subset M \setminus K$
Da $b \in M \setminus K$ beliebig $\Rightarrow M \setminus K$ offen

$\Rightarrow K \underset{abg.}{\subset} M$ □

Bolzano-Weierstrass (Heine-Borel)

(i) $[a, b]$ kompakt

(abgeschlossene Intervalle sind kompakt)

(ii) $\mathbb{R} \supset K$ kompakt $\Leftrightarrow$ beschränkt $K \underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{R}$

(kompakt = beschränkt & abgeschlossen)

Proof. (ii) mit Hilfe von (i)

"$\Rightarrow$" Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt

$\underset{\text{Satz3}}{\Rightarrow} K \underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{R}$

zz. K beschränkt

Widerspruchsannahme: K nicht nach oben beschränkt

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists a_n \in K,\ a_n > n$, da n keine obere Schranke

$\Rightarrow (a_n)$ Folge in K ohne konvergente Teilfolge:

Sei $(a_{j(m)})$ Teilfolge $\Rightarrow a_{j(m)} > j(m) \geq m \Rightarrow a_{j(m)}$ unbeschränkt, also nicht konvergent (divergent)

Daher ist K nicht kompakt Widerspruch!

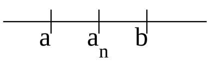
"$\Leftarrow$" Sei K beschränkt und abgeschlossen

K beschränkt $\Rightarrow\ \exists \underset{a<b}{[a, b]} \supset K \underset{(i)}{\Rightarrow}$ kompakt $[a, b] \underset{\text{abg.}}{\supset} K \underset{Satz\,2}{\Rightarrow} K$ kompakt

(i) zz. $I = [a, b]$ kompakt

(abgeschlossene Intervalle sind kompakt)

Sei $[a, b] \ni a_n \in I$ Folge



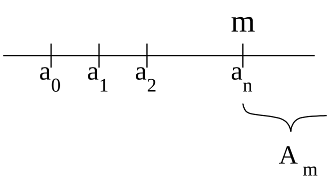
zz. $\exists$ konvergente Teilfolge $a_{j(m)} \rightsquigarrow c \in I$

F¸r jedes feste $m \in \mathbb{N}$ ist $a_m \in A_m := \{a_n \mid n \geq m\} \subset I$

$\Rightarrow A_m \neq \emptyset, A_m$ beschränkt, da I beschränkt

Definiere neue Folge

$\overline{a_m} = sup_{n \geq m}\, a_n =$ kleinste obere Schranke der Menge $A_m = \{a_n \mid n \geq m\}$

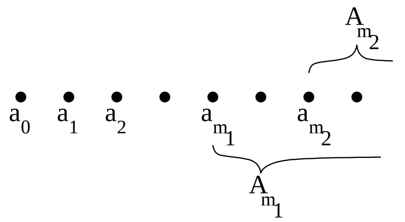


Dann gilt (i) $\overline{a_m} \in [a, b]$, denn b ist obere Schranke von A_m

$\Rightarrow b \geq \overline{a_m} = sup\, A_m$

$\forall m_1 \leq m_2 \Rightarrow A_{m_1} \supset A_{m_2}$ denn $n \geq m_1 \Leftarrow n \geq m_2$

Bild



$\Rightarrow \sup A_{m_1} = \overline{a_{m_1}} \geq sup\, A_{m_2} = \overline{a_{m_2}}$

$\Rightarrow (\overline{a_m})$ antiton = monoton fallend

$\underset{\text{monotone Konvergenz}}{\Rightarrow} \exists c = \lim\limits_{m\to\infty} \overline{a_m} \in I$, da I abgeschlossen

Zeige: $\exists$ konvergente Teilfolge $a_{j(m)} \rightsquigarrow c$

sei $m \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{a_m} - \frac{1}{m}$ keine obere Schranke von A_m

$\Rightarrow \exists j(m) \geq m : \overline{a_m} \geq a_{j(m)} > \overline{a_m} - \frac{1}{m}$

$\Rightarrow \left|\overline{a_m} - a_{j(m)}\right| \leq \frac{1}{m}$

$\Rightarrow \overline{a_m} - a_{j(m)} \rightsquigarrow 0$, $\overline{a_m} \rightsquigarrow c$ konvergiert monoton

$\underset{Limes-Satz}{\Rightarrow} a_{j(m)} = \left(a_{j(m)} - \overline{a_m}\right) + \overline{a_m} \rightsquigarrow 0 + c = c$

da (a_m) in I beliebig $\Rightarrow$ I kompakt

$\square$

Definition.

Sei $a_n \in I$ beschränkte Folge.

limes superior $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \lim\limits_{m\to\infty} \overline{a_m} = \lim\limits_{m\to\infty} \left(\sup\limits_{n\geq m} a_n \right)$ antiton

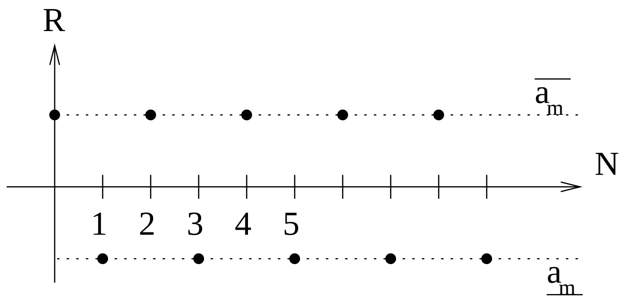
limes inferior $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \lim\limits_{m\to\infty} \underline{a_m} = \lim\limits_{m\to\infty} \left(\inf\limits_{n\geq m} a_n \right)$ isoton

Dann existieren Teilfolgen $\begin{array}{l} \exists a_{j(m)} \to \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, a_n \\ \exists a_{k(m)} \to \underline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, a_n \end{array}$

Beispiel 2.3.7. $I = [-2, 2]$

$a_n = (-1)^n = (1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)$

Bild: alternierende Folge



$\overline{a_m} = \sup\limits_{n \geq m} a_n = 1 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (-1)^n$

$\underline{a_m} = \inf\limits_{n \geq m} a_n = -1 = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (-1)^n$

Satz

(i) $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$

(ii) $\underline{\lim}\, a_n \geq \overline{\lim}\, a_n \Rightarrow (a_n)$ konvergent und $\lim\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$

Proposition 2.3.8. *Sei $\mathbb{R} \ni a_n \rightsquigarrow a$ konvergente Folge. Dann ist $K := \{a_n \mid n \geq 0\} \cup \{a\}$ kompakt*

Proof. bereits gezeigt $K \underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{R}$

zz. K beschränkt

$a_n \rightsquigarrow a \Rightarrow_{\varepsilon=1} \;\exists n_0 \,\forall n \geq n_0 : |a_n - a| \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq a_n - a \leq 1$

$\Rightarrow a - 1 \leq a_n \leq 1 + a, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \underbrace{\min \{a-1, a_m (m < n_0)\}}_{\text{untere Schranke}} \leq a_n \leq \underbrace{\max \{1+a, a_m(m < n_0)\}}_{\text{obere Schranke}}$

$\Rightarrow (a_n)$ beschränkt

$\Rightarrow K$ beschränkt, da $a - 1 \leq a \leq a + 1$

$\Rightarrow K$ kompakt (Bolzano-Weierstrass) □

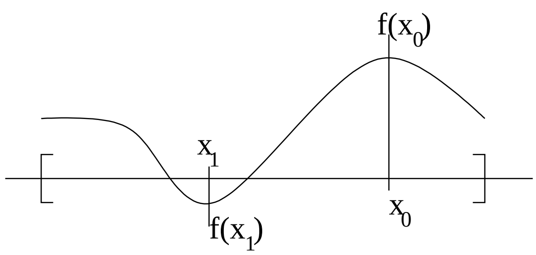
Extremwertsatz (EWS)

(Satz vom Max und Min)

sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ globales Max

$\exists x_1 \in [a,b] : f(x_1) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ globales Min



Proof. Bolzano-Weierstrafl $I = [a,b]$ kompakt

da f stetig $\Rightarrow f(I)_{kompakt} \subset \mathbb{R}$

${}_{allg.BW} \Rightarrow f(I)$ beschränkt/abgeschlossen

da $f(I)$ beschränkt und nicht leer

$_{\sup-Satz} \Rightarrow\ \exists \sup f(I) = \sup\limits_{x\in I} f(x) \in f(I)$, da abgeschlossen

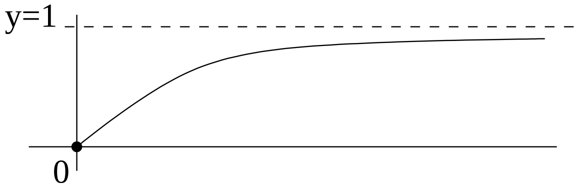
analog $\exists \inf f(I) = \inf\limits_{x\in I} f(x) \in f(I)$, da abgeschlossen

$\Rightarrow\ \exists x_0 \in I, \sup f(I) = f(x_0) = \max\limits_{x\in I} f(x)$

$\exists x_1 \in I$, $\inf f(I) = f(x_1) = \min\limits_{x\in I} f(x)$ $\square$

Beispiel 2.3.9. $I = \mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ unbeschränkt

$f(x) = \frac{x}{x+1}$

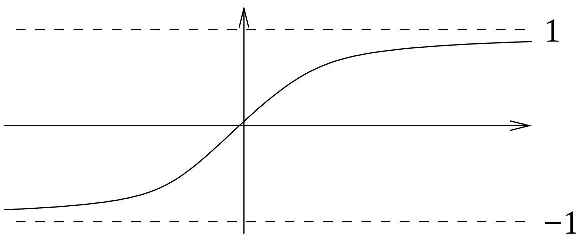


$f(0) = \inf\limits_{x\in I} f(x) = \min\limits_{x\in I} f(x)$

$1 = \sup\limits_{x\in I} f(x) \notin f(I) = [0, 1[$

Beispiel. $I = \mathbb{R} =]-\infty, \infty[$unbeschränkt

$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$



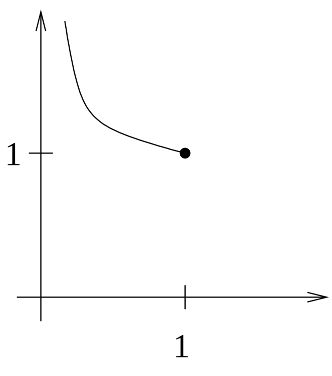
$f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$

$1 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\ f(x) \notin f(\mathbb{R})$ kein Max

$-1 = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}}\ f(x) \notin f(\mathbb{R})$ kein Min

Beispiel 2.3.10. $I =]0, 1]$ nicht kompakt, da nicht abgeschlossen

$f(x) = \frac{1}{x}$



$f(I) = [1, \infty[$

$\inf\limits_{x\in I} f(x) = 1 = f(1) = \min\limits_{x\in I} f(x)$

$\sup\limits_{x\in I} f(x) = +\infty$

$\notin f(I)$

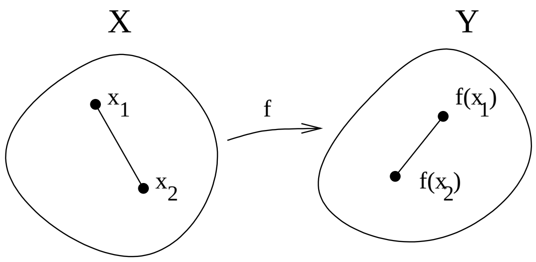
X, Y metrische Räume

$X \xrightarrow{f} Y$ Abbildung (= Funktion)

Definition.

i) f **kontraktiv** $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : d_Y\left(f(x_1), f(x_2)\right) \le d_X(x_1, x_2)$

ii) f **gleichmäßig stetig** $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\, \forall x_1, x_2 \in X : d_X\left(x_1, x_2\right) \le \delta$
$\Rightarrow d_Y\left(f(x_1), f(x_2)\right) \le \varepsilon$
(! δ unabhängig von x_1, x_2 !)



$d(x_1, x_2) \le d(f(x_1), f(x_2))$

Proposition 2.3.11. *f kontraktiv*

$\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig ($\delta = \varepsilon$)

$\Rightarrow f$ stetig (in allen Punkten $x_1 \in X$), δ unabhängig von x_1

(Umkehrung gilt jeweils nicht im allgemeinen)

Beispiel 2.3.12. $f(x) := |x|$ ist kontraktive Abbildung

$\underset{x}{\mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\xrightarrow{|\cdot|}} \underset{|x|}{\mathbb{R}}$

zz. $d_{\mathbb{R}}\left(|x_1|, |x_2|\right) \le d_{\mathbb{R}}\left(x_1, x_2\right)$

$\Leftrightarrow ||x_1| - |x_2|| \le |x_1 - x_2|$

Satz: K kompakt (in X)

$f : K \to Y$ stetig auf K

$\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig

(Stetigkeit auf kompaktem Raum = gleichmäßige Stetigkeit)

Proof. sei $f : K \to Y$ stetig und K kompakt

Widerspruchsannahme: f nicht gleichmäßig stetig

$\Rightarrow\ \exists\, \varepsilon > 0\, \forall\, \delta = \frac{1}{n} > 0$

$\exists\, x_n \in K,\ x_n' \in K$ sodass $d(x_n, x_n') \le \frac{1}{n} \wedge d\left(f\left(x_n\right), f\left(x_n'\right)\right) > \varepsilon$

Da K kompakt $\Rightarrow$ $\exists$ konv TF $x_{j(m)} \to a \in K$

$\Rightarrow d\left(x_{j(m)}, x'_{j(m)}\right) \leq \frac{1}{j(m)} \leq \frac{1}{m}$, da $j(m) \geq m$

$\Rightarrow x'_{j(m)} \to a$, denn $d\left(x'_{j(m)}, a\right) \leq d\underbrace{\left(x'_{j(m)}, x_{j(m)}\right)}_{\leq \frac{1}{m} \to 0} + d\underbrace{\left(x_{j(m)}, a\right)}_{\to 0}$

Bisher gezeigt: $x_{j(m)} \to a \leftarrow x'_{j(m)}$

da f stetig in $a \in K$ $\underset{Folgen-Krit.}{\Rightarrow}$ $f(x_{j(m)}) \to f(a) \leftarrow f(x'_{j(m)})$

$\Rightarrow \varepsilon < d\left(f\left(x_{j(m)}\right), f(x'_{j(m)})\right) \leq \underbrace{d\left(f\left(x_{j(m)}\right), f\left(a\right)\right)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}\, m \geq m_1} + \underbrace{d\left(f\left(a\right), f(x'_{j(m)})\right)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}\, m \geq m_2} \leq \varepsilon$

für $m \geq \max(m_1, m_2)$

$\Rightarrow$ also f nicht gleichmäßig stetig □

Beispiel 2.3.13. $f(x) = \frac{x^4+1}{x^7+2}$ gleichmäßig stetig auf $[0, 1]$

Proof. Stetigkeitsregeln $\Rightarrow$ f stetig

Bolzano-W.: $[0, 1]$ kompakt

$\Rightarrow$ f gleichmäßig stetig □

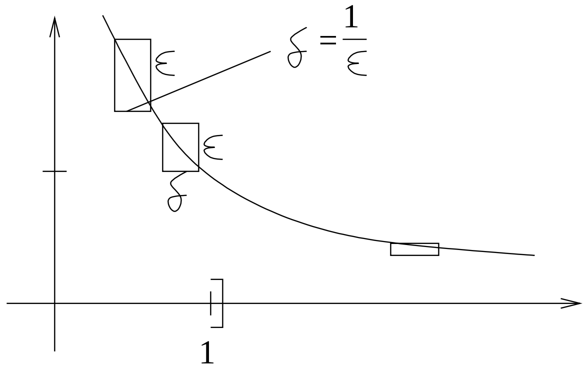
Beispiel. $X = (0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ nicht kompakt (nicht abgeschlossen)

$f(x) = \frac{1}{x}$ Hyperbel

$f(x)$ stetig (Quotienten-Regel)

f nicht gleichmäßig stetig auf $(0, 1]$ (ohne Beweis)

Auf $[1, \infty)$ dagegen ist $f(x) = \frac{1}{x}$ gleichm. stetig, sogar kontraktiv : Bild



Satz $\mathbb{R} = X \ni a_n$ beschränkte Folge

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\sup_{m \geq n} a_m)$ limes superior

$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\inf_{m \geq n} a_m)$ limes inferior

i) $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$

ii) falls $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n =: a$

$\Rightarrow a_n \rightsquigarrow a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Proof.

i) $\overline{a_m} = \sup\limits_{n\geq m} a_n \downarrow \overline{\lim}\, a_n$

$\underline{a_m} = \inf\limits_{n\geq m} a_n \uparrow \underline{\lim}\, a_n$

F¸r jedes m gilt:

$\underline{a_m} \leq a_m \leq \overline{a_m}$

$\Rightarrow \underline{a_m} - \overline{a_m} \geq 0$

$\Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n - \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \overline{a_m} - \lim\limits_{n\to\infty} \underline{a_m}$

$= \lim\limits_{m\to\infty} \underbrace{\left(\overline{a_m} - \underline{a_m}\right)}_{\geq 0} \geq 0$, da $[0,\infty[$ abgeschlossen.

$\Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \geq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$

ii) es gelte $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := a$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \underline{a_m} = a = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{a_m}$

$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists m_1\, \forall m \geq m_1 \quad |\ \underline{a_m} - a\ | \leq \varepsilon$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists m_2\, \forall m \geq m_2 \quad |\ \overline{a_m} - a\ | \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall m \geq \max(m_1, m_2) \quad \left|\underline{a_m} - a\right| \leq \varepsilon \geq |\overline{a_m} - a|$

$-\varepsilon \leq \underline{a_m} - a \leq \varepsilon$

$-\varepsilon \leq \overline{a_m} - a \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq m : -\varepsilon \leq \underline{a_m} - a \leq a_n - a \leq \overline{a_m} - a \leq \varepsilon$

$\Rightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \max(m_1, m_2)$

$\Rightarrow a_n \rightsquigarrow a$

$\square$

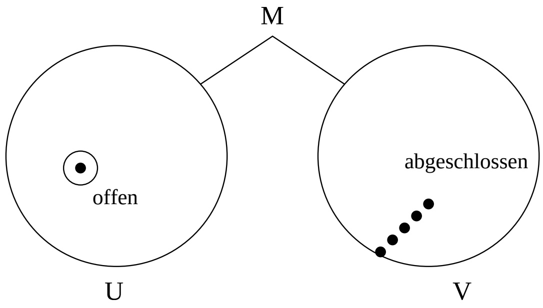
2.4 Zusammenhang und Zwischenwert-Satz

Definition. M metrischer Raum

M **nicht zusammenhängend** $\Leftrightarrow$ $\exists$ Partition $M = U \cup V$ mit $U \overset{abg}{\underset{\text{offen}}{\subset}} M \overset{abg}{\underset{\text{offen}}{\supset}} V$

$U \cap V = \emptyset, U \neq \emptyset \neq V$

$[U = M \setminus V, V = M \setminus U]$



M **zusammenhängend** $\Leftrightarrow \forall U \underset{\text{offen}}{\subset} M \underset{\text{offen}}{\supset} V, M = U \cup V, U \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow U = \emptyset, V = M$ oder $V = \emptyset, U = M$

Jede Partition von M in offene (abg) Mengen ist trivial

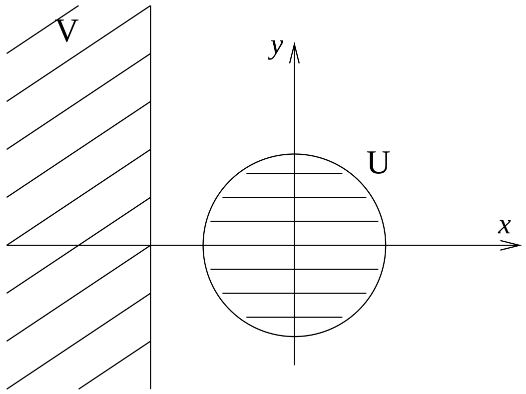
M zusammenhängend $\Leftrightarrow \forall \emptyset \neq U \overset{abg}{\underset{\text{offen}}{\subset}} M \Rightarrow U = M$

Beispiel 2.4.1. Betrachte Teilmengen des $\mathbb{R}^2$

$U = \mathbb{R}^2_1(0)$ offen

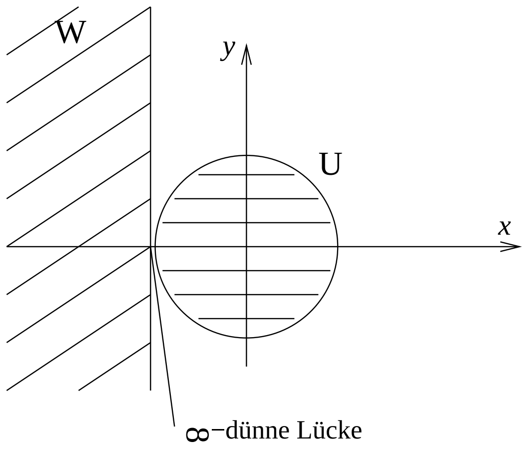
$V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -2\right\}$ offen

$M = U \cup V$ nicht zusammenhängend



$W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -1\right\}$ offen

$\Rightarrow N = U \cup W$ nicht zusammenhängend



Satz: (Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.)

$X \underset{stetig}{\xrightarrow{f}} Y, X$ zusammenhängend $\Rightarrow f(X)$ zush (als Teilmenge von Y)

Proof. Sei X zusammenhängend und f stetig

$M := f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$

zz. M ist zusammenhängend

Sei $U \underset{\text{offen}}{\subset} M \underset{\text{offen}}{\supset} V, M = U \cup^* V$ disjunkte Vereinigung

zz. $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$

$_{f\ stetig} \Rightarrow f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\} \underset{\text{offen}}{\subset} X$

$f^{-1}(V) \underset{\text{offen}}{\subset} X$

$f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(\underbrace{U \cup V}_{M=f(X)}) = f^{-1}(f(X)) = X$

$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(\underbrace{U \cap V}_{\emptyset}) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$X = \underbrace{f^{-1}(U)}_{\text{offen}} \cup^* \underbrace{f^{-1}(V)}_{\text{offen}}$ disjunkte Vereinigung

Da X zusammenhängend Œ $\Rightarrow f^{-1}(U) = \emptyset \Rightarrow U = \emptyset$, da $U \subset f(X)$

Also $f(X)$ zusammenhängend □

Satz 2

Sei M metrischer Raum

$M = \bigcup_{i \in I} M_i$, alle M_i zusammenhängend

$\bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow M$ zusammenhängend

Proof. Sei $x_0 \in \bigcap_{i \in I} M_i$

Sei $M = U \cup^* V, U \underset{\text{offen}}{\subset} M \underset{\text{offen}}{\supset} V,$

Œ $x_0 \in U$

zz. $V = \emptyset$

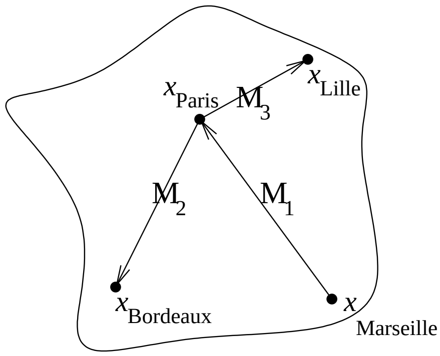
$\forall i \in I, U \cap M_i \underset{\text{offen}}{\subset} M_i \underset{\text{offen}}{\supset} V \cap M_i$

$(U \cap M_i) \cup^* (V \cap M_i) = M_i, x_0 \in U \cap M_i$

Da M_i zusammenhängend $\Rightarrow V \cap M_i = \emptyset$

$\Rightarrow V = \bigcup_i V \cap M_i \Rightarrow \emptyset$ □

Bild: Frankreich ist zusammenhängend:



Proposition 2.4.2. $\mathbb{R} \supset I$ *Intervall*

$\Leftrightarrow \forall x < y < z$ *mit* $x \in I \ni z \Rightarrow y \in I$ *(Konvexität)*

Satz $\mathbb{R} \supset I$ zusammenhängend $\Leftrightarrow I$ Intervall

Proof. "$\Rightarrow$ " Sei I zush. , zz. I Intervall

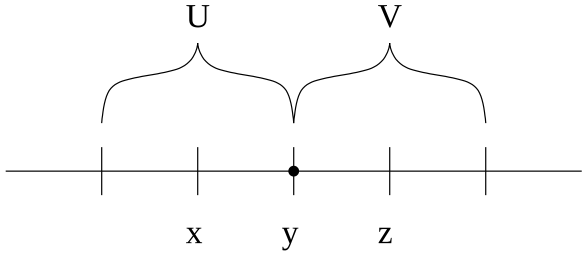
Widerspruch: I kein Intervall

$\Rightarrow \exists x < y < z$ mit $x \in I \ni z$ und $y \notin I$

$\Rightarrow U = \{u \in I \mid u < y\} \overset{abg}{\underset{\text{offen}}{\subset}} I, x \in U \neq \emptyset$

$V = \{v \in I \mid y < v\} \overset{abg}{\underset{\text{offen}}{\subset}} I, z \in V \neq \emptyset$

$U \cap V = \emptyset, U \cup^* V = I$ da $y \notin I \Rightarrow I$



nicht zush. (Widerspruch)

"$\Leftarrow$ " Sei I Intervall, zz. I zush.

1.Fall $I = [a, b]$, zz. I zush.

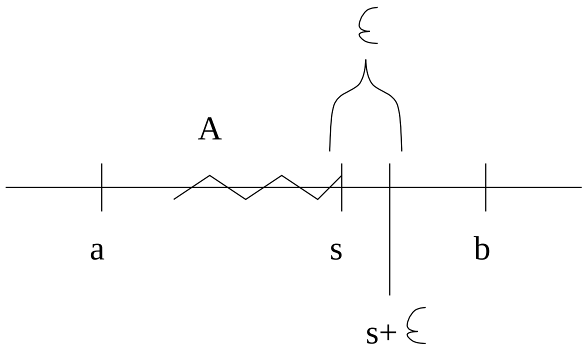
Sei $\emptyset \neq A \overset{abg}{\underset{\text{offen}}{\subset}} I$, zz. $A = I$

A beschränkt $\Rightarrow \exists s = sup\, A$ kleinste obere Schranke

$(s \geq A, \forall z \geq A \Rightarrow z \geq s)$

$\Rightarrow s \leq b$, da $b \geq A$

Da $A \underset{\text{abg.}}{\subset} I \underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{R} \Rightarrow A \underset{\text{abg.}}{\subset} \mathbb{R} \;_{Satz} \Rightarrow s \in A$



Widerspruchsannahme: $s < b$

$A \underset{\text{offen}}{\subset} I \Rightarrow \exists 0 < \varepsilon < b - s$ sodass $I_\varepsilon[s] \subset A$

$\Rightarrow s + \varepsilon \in I_\varepsilon[s] \subset A$

$\Rightarrow s + \varepsilon \leq s$ Widerspruch

Also $s = b \Rightarrow A = I$

Also $[a, b]$ zusammenhängend

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $x_0 \in I$

$\Rightarrow I = \bigcup_{\substack{a \leq x_0 \leq b \\ [a,b] \subset I}} [a, b] \Rightarrow I$ zush.

□

Zwischenwert-Satz (ZWS)

(i) Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f(I)$ Intervall

(ii) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < f(b)$

Sei $f(a) < y < f(b) \Rightarrow \exists x \in [a, b], f(x) = y$ ("Zwischenwert")

Proof.

(i) Sei I Intervall in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow I$ zusammenhängend

$\Rightarrow f(I)$ zush. $\subset \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(I)$ Intervall

(ii) $I = [a, b]$

$\Rightarrow f(I)$ Intervall, $f(I) = [u, v]$

$\Rightarrow f(a) \in [u, v] \ni f(b)$

$\Rightarrow f(a) < y < f(b)$

$\Rightarrow y \in f([a, b])$

$\Rightarrow \exists x \in [a, b], y = f(x)$

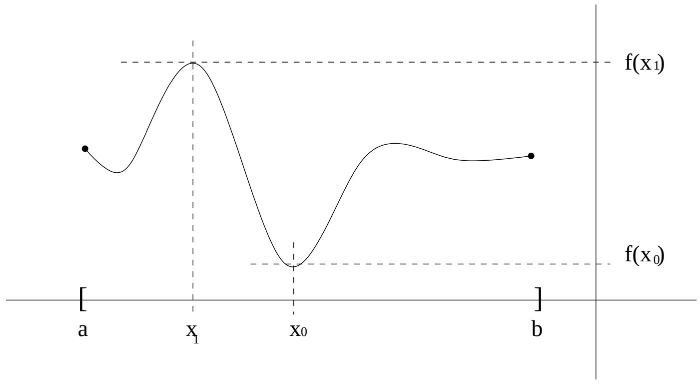
□

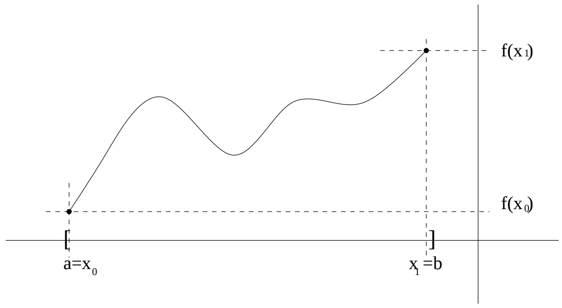
Korollar. **(iii)** $I = [a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **stetig**
$\Rightarrow f([a, b]) = [\min_{x\in I} f(x)\,, \max_{x\in I} f(x)] = [f(x_0), f(x_1)]$

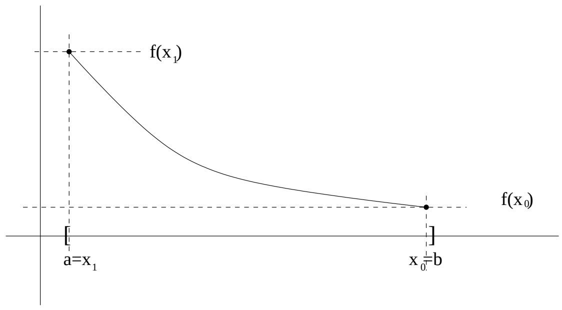
(iv) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **stetig, isoton** $\Rightarrow f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

(v) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **stetig, monoton fallend** $\Rightarrow f([a, b]) = [f(b), f(a)]$

Beispiele







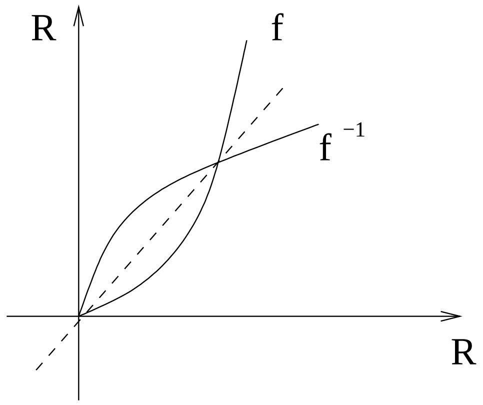
2.5 Umkehrfunktionen

X, Y Mengen, $f : X \to Y$ **bijektiv** (umkehrbar, invertierbar)
$\Leftrightarrow f$ **injektiv** $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$ und
f **surjektiv** $(\forall y \in Y\ \exists x \in X\ f(x) = y))$, $f(X) = Y$

Falls $f : X \to Y$ bijektiv $\Rightarrow$ $\exists$ Umkehrfunktion (Umkehrabbildung)
$f^{-1} : Y \to X$ sodass $f \circ f^{-1} = id_Y$, $f^{-1} \circ f = id_X$

f^{-1} wieder bijektiv und $(f^{-1})^{-1} = f$

graphisch



Graph von f^{-1} = *Spiegelung* an Diagonal-Achse

Proposition 2.5.1. *f streng monoton wachsend (fallend)*

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\,((f(x_1) > f(x_2))$

$\Rightarrow f$ *injektiv*

Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall (nicht notwendig beschränkt oder abgeschlossen)

und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton

$\Rightarrow$

(i) f injektiv

(ii) $J := f(I) \subset \mathbb{R}$ Intervall

(iii) $f : I \to J$ bijektiv

(iv) $f^{-1} : J \to I$ streng monoton (im gleichen Sinne)

(v)* f^{-1} stetig (Beweis später)

Proof. Œ f streng monoton wachsend (und stetig)

(i) Sei $x_1 \neq x_2$, zz. $f(x_1) \neq f(x_2)$
If $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
If $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

(ii) $J = f(I)$ Intervall nach Zwischenwert-Satz, da f stetig

(iii) Nach (i) ist f injektiv, nach (ii) $J = f(I) \Rightarrow I \xrightarrow{f} J$ surjektiv $\subset \mathbb{R}$
insgesamt $I \xrightarrow{f} J$ bijektiv

(iv) zz. $J \xrightarrow{f^{-1}} I$ streng monoton wachsend

Sei $y_1, y_2 \in J$ mit $y_1 < y_2$

Da $J = f(I) \Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in I$ mit $f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2$

$_{f\,bij} \Rightarrow x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$

zz.$\underbrace{f^{-1}(y_1)}_{=x_1} < \underbrace{f^{-1}(y_2)}_{=x_2}$

Widerspruch: $x_1 \geq x_2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$

Also $x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}$ streng monoton wachsend

□

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \infty[$ (positive Halbgerade)

Satz

$\forall n \geq 1,\ f(x) = x^n$ n-te Potenz

$\Rightarrow f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ bijektiv, stetig, streng monoton wachsend

$\Rightarrow \exists$ Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ bijektiv, streng monoton wachsend und stetig*

Notation $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ n-te Wurzel

Proof. Induktion nach $n \geq 1$

<u>$n = 1$</u> $f(x) = x^1 = x \Rightarrow f = id$ bijektiv, streng isoton, stetig

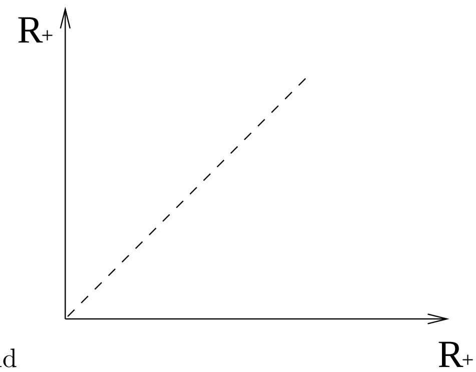


Bild id

$id^{-1} = id$

<u>$1 \leq n \to n+1$</u> Vor: $f_n(x) = x^n$ stetig, streng isoton, surjektiv

$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x \cdot x^n = x \cdot f_n(x)$

$f_{n+1} = id \cdot f_n$ stetig nach Produktregel

streng isoton

Sei $0 \leq x_1 < x_2$, $zz.\, 0 \leq x_1^{n+1} < x_2^{n+1}$

Nach Ind-Vor $0 \leq x_1^n < x_2^n$

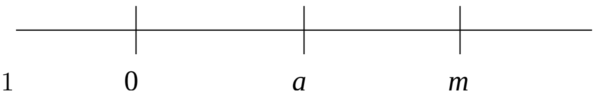
$\Rightarrow x_1^{n+1} = x_1^n \cdot x_1 < x_2^n \cdot x_1 < x_2^n \cdot x_2 = x_2^{n+1}$

$\Rightarrow x_1^{n+1} < x_2^{n+1}$, gilt auch f¸r $x_1 = 0$

Also f_{n+1} streng isoton

Zeige $f_n(x) = x^n$ surjektiv $f_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$

$J := f(\mathbb{R}_+) \ni 0$



Sei $a > 0 \underset{Archimedes}{\Rightarrow} \exists m \in \mathbb{N},\, m \geq a,\, m \geq 1$

$f_n(m) = m^n = m \cdot \underbrace{(m^{n-1})}_{\geq 1} \geq m \geq a$

$f_n(m) \in J,\, f_n(m) \geq a$

Zwischenwertsatz (ZWS) $\Rightarrow J$ Intervall $\Rightarrow a \in J$

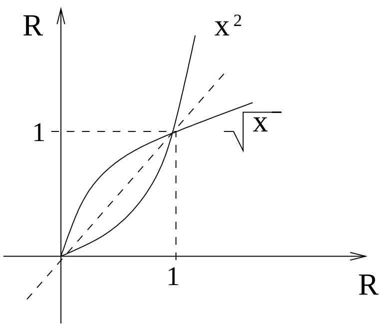
$f_n(m) \in J \ni f_n(0) = 0$

$\Rightarrow a \in [0, f_n(m)] \subset J \Rightarrow a \in J$

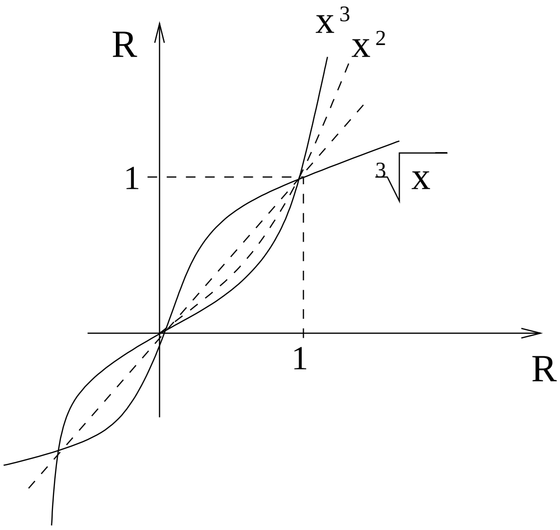
Da $a > 0$ beliebig $\Rightarrow J = \mathbb{R}_+ \Rightarrow f_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$

$\square$

Beispiel 2.5.2. $x^2, \sqrt{x}$



$x^3, 3te$ Wurzel, Dritte Potenz bijektiv auf ganz $\mathbb{R}$



$\mathbb{R} \underset{bijektiv}{\xrightarrow{f_3}} \mathbb{R}, \mathbb{R} \xrightarrow{f_3^{-1}} \mathbb{R}$

ungerade Potenzen bijektiv auf ganz $\mathbb{R}$

zz. f bijektiv und stetig $\Rightarrow f^{-1}$ stetig

Lemma 2.5.3. *Sei K kompakter metrischer Raum*

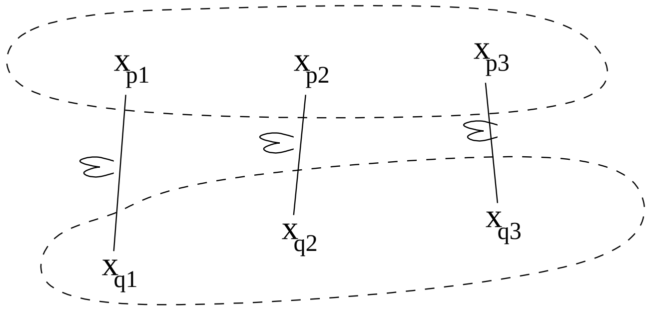
Sei (x_n) Folge in K mit Eigenschaft: Alle konv TF $(x_{j(m)})$ haben gleichen Limes $= a$

$\Rightarrow x_n \rightsquigarrow a$

Proof. Widerspruchsannahme: (x_n) nicht Cauchy-Folge

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \, \forall n \in \mathbb{N} \; \exists p_n, q_n \geq n$

$d(x_{p_n}, x_{q_n}) > \varepsilon$



K kompakt $\Rightarrow \; \exists TF \, \alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\alpha(m) \geq m$ mit $x_{p_{\alpha(m)}} \rightsquigarrow a$

Betrachte die Folge $(x_{q_{\alpha(m)}})_{m \in \mathbb{N}}$

Da K kompakt $\Rightarrow \; \exists$ konv TF $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\beta(k) \geq k$ mit $x_{q_{\alpha(\beta(k))}} \rightsquigarrow a$

Da $x_{p_{\alpha(m)}} \rightsquigarrow a \Rightarrow x_{p_{\alpha(\beta(k))}} \rightsquigarrow a$

$$\varepsilon < d(x_{p_{\alpha(\beta(k))}}, x_{q_{\alpha(\beta(k))}}) \leq \underbrace{d(x_{p_{\alpha(\beta(k))}}, a)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ f¸r } k \geq k_0} + \underbrace{d(a, x_{q_{\alpha(\beta(k))}})}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ f¸r } k \geq k_1} \leq \varepsilon \quad \text{f¸r } k \geq \max(k_0, k_1)$$

Widerspruch!

Also (x_n) Cauchy-Folge

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \, \forall p, q \geq n_0 : \; d(x_p, x_q) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Da K kompakt$\Rightarrow \; \exists$ TF $x_{j(m)} \to a$

$\Rightarrow \; \exists m_0 \, \forall m \geq m_0 : d(a_{j(m)}, a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow d(x_n, a) \leq \underbrace{d(x_n, x_{j(m)})}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ n \geq n_0 \; und \; j(n) \geq n \geq n_0}} + \underbrace{d(x_{j(n)}, a)}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ n \geq m_0}} \leq \varepsilon \text{ f¸r } n \geq \max(m_0, n_0)$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow x_n \to a$ □

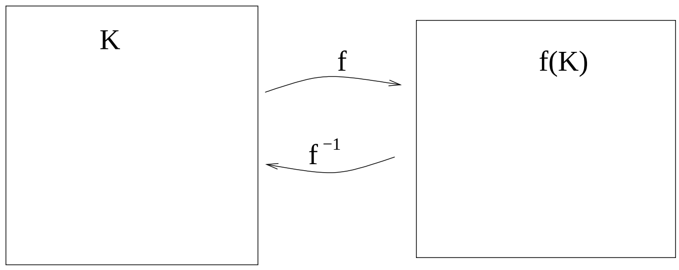
Satz (automatische Stetigkeit der Umkehrfunktion)

K kompakt, $f : K \to Y$ stetig , injektiv $\Rightarrow$

(i) $f(K) \subset Y$ kompakt

(ii) $K \xrightarrow{f} f(K)$ bijektiv

(iii) $K \xleftarrow[stetig]{f^{-1}} f(K)$



Proof. (iii) Benutze Folgenkriterium, angewandt auf $f^{-1}: f(K) \to K$

Sei $f(K) \ni y_n \rightsquigarrow y \in f(K)$

zz. $x_n := f^{-1}(y_n) \rightsquigarrow x := f^{-1}(y)$

$x_n \in K$ kompakt, $y_n = f(x_n)$, $y = f(x)$

Sei $x_{j(m)}$ konv TF von x_n

$x_{j(m)} \rightsquigarrow x' \in K$

Da f stetig $\Rightarrow y_{j(m)} = f(x_{j(m)}) \rightsquigarrow f(x')$

Da $y_{j(m)}$ Teilfolge von $y_n \rightsquigarrow y$

$\Rightarrow y_{j(m)} \rightsquigarrow y = f(x)$

Eindeutigkeit des Limes (von $y_{j(m)}$): $f(x) = f(x')$

Da f injektiv $\Rightarrow x = x'$

Alle konv TF von (x_n) haben gleichen Limes x

$\Rightarrow x_n \rightsquigarrow x$, da K kompakt

Also f^{-1} stetig nach Folgenkriterium. □

Anwendung

$n \geq 1$

$f_n(x) := x^n$ n-te Potenz (Monom)

$\mathbb{R}_+ \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}_+$

(i) stetig

(ii) streng monoton wachsend

(iii) injektiv

(iv) surjektiv (ZWS)

(v) bijektiv

$\mathbb{R}_+ \xleftarrow{f^{-1}} \mathbb{R}_+$

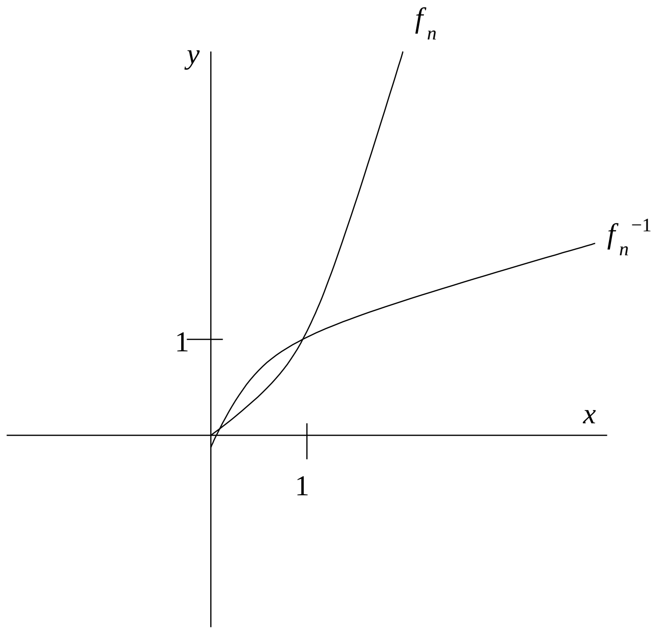
$\sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}} \longmapsto y$ (andersrum)

eindeutig bestimmt durch

$[y^{\frac{1}{n}}]^n = y$, $(x^n)^{\frac{1}{n}} = x$

$f_n(f_n^{-1}(y)) = y$, $f_n^{-1}(f_n(x)) = x$

Satz $\mathbb{R}_+ \xrightarrow[stetig]{\sqrt[n]{}} \mathbb{R}_+$



Proof. $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ nicht kompakt, da nicht beschränkt

zz.$f_n^{-1} = \sqrt[n]{}$ ist stetig in $y_0 \in \mathbb{R}_+$

Setze $a := 0,\ b := y_0 + 1$ $\quad\Rightarrow [a, b] = [0, y_0 + 1]$ kompakt

$x_1 = 0,\ x_2 = f^{-1}(b) = \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{y_0 + 1}$

$\underset{f_n \text{ streng isoton}}{\Rightarrow} \quad 0 \leq y_0 < b$

$x_1 = 0 \leq x_0 < x_2$

wobei $x_0 = f^{-1}(y_0)$

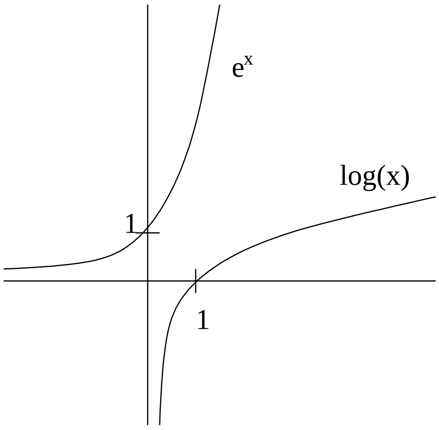
$\Rightarrow K := [0, x_2],\ f_n(K) = [0, b]$ und $[0, x_2] \xrightarrow[\text{bijektiv}]{f_n} [0, b]$

$\underset{\text{automatisch stetig}}{\Rightarrow} \quad [0, x_2] \xleftarrow[stetig]{f_n^{-1}} [0, b] \ni y_0$

$\Rightarrow f_n^{-1}$ stetig in y_0 . Da $y_0 \in \mathbb{R}_+$ beliebig $\Rightarrow f_n^{-1}$ stetig $\square$

Ein wichtiges Paar von Funktionen (Exponential und Logarithmus) wird später behandelt:

$e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$



2.6 Abzählbarkeit

M Menge, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ nat¸rliche Zahlen

Definition. M **abzählbar** $\Leftrightarrow$ $\exists$ Folge $\mathbb{N} \ni n \rightsquigarrow a_n \in M$ surjektiv, d.h. $M = \{a_n \mid n \geq 0\}$

Beispiel 2.6.1. $\mathbb{N}$ abzählbar , $a_n := n$, $\underset{n}{\mathbb{N}} \underset{\mapsto}{\xrightarrow{Id}} \underset{a_n}{\mathbb{N}}$,

Beispiel. M endlich $\Rightarrow$ M abzählbar

Proof. $M = \{x_0, ..., x_N\}$

$\underset{n}{\mathbb{N}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{a_n}{M}$

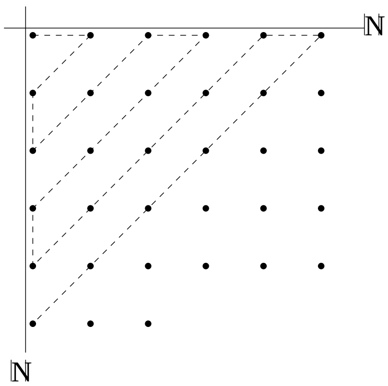
surjektiv, nicht injektiv

$\square$

Satz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar

allgemein: $X \times Y$ abzählbar, falls X und Y abz.

Proof. Konstruiere Folge $\mathbb{N} \xrightarrow{surj} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$



$a_0 = (0, 0)$

$a_1 = (0, 1)$

$a_2 = (1, 0)$

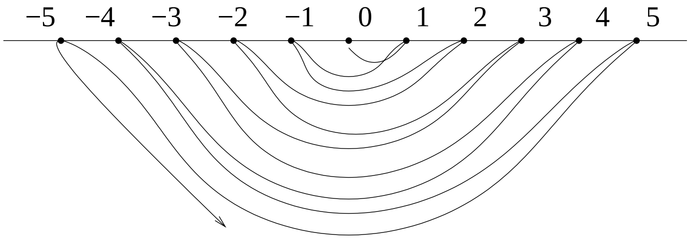
$a_{17} = (2, 3)$

$a_k = (m_k, n_k)$

(explizite Formel als Übungsaufgabe) □

Beispiel 2.6.2. $\mathbb{Z}$ abzählbar, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$

allgemeiner gilt: A, B abz. $\Rightarrow A \cup B$ abz.



Proof.

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$, $a_2 = -1$

$a_3 = 2$, $a_4 = -2$

$a_{2k+1} = k + 1$ $(k \geq 0)$

$a_{2k+2} = -(k + 1)$, $(k \geq 0)$ □

Beispiel. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \underbrace{(\mathbb{N} \times \mathbb{N})}_{\text{abz.}} \cup \underbrace{(\mathbb{N} \times -\mathbb{N})}_{\text{abz.}} \cup \underbrace{(-\mathbb{N} \times \mathbb{N})}_{\text{abz.}} \cup \underbrace{(-\mathbb{N} \times -\mathbb{N})}_{\text{abz.}}$

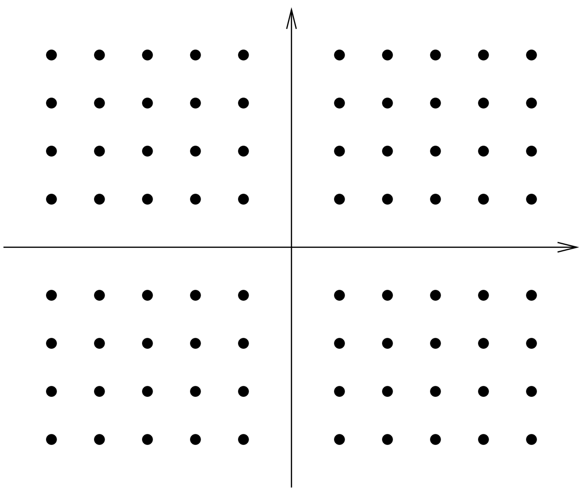


Bild Gitter

Proposition 2.6.3. *(i)* $M_1 \subset M_2$ *abzählbar* $\Rightarrow M_1$ *abzählbar*

(ii) M_1, M_2 *abzählbar* $\Rightarrow M_1 \cup M_2$ *abzählbar*

(iii) M_1 *abzählbar und* $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ *surjektiv* $\Rightarrow M_2$ *abzählbar*

Proof. (iii) Nach Vor gilt

$$\exists \text{ Folge } \underset{n}{\mathbb{N}} \overset{g}{\underset{\mapsto}{\to}} \underset{a_n = g(n)}{M_1} \quad \text{surjektiv}$$

$$\exists M_1 \xrightarrow{f} M_2 \text{ surjektiv}$$

$$\Rightarrow \text{ Folge } \mathbb{N} \xrightarrow{f \circ g} M_2 \text{ surjektiv } \Rightarrow M_2 \text{ abzählbar}$$

□

Beispiel 2.6.4. $\mathbb{Q} = \{\text{rationale Zahlen}\}$ abzählbar

Proof. $\mathbb{Z}$ abz., $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ abz.

$\Rightarrow \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ abz.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \times & (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) & \to & \mathbb{Q} \\ p & , & q & \mapsto & \frac{p}{q} \end{array} \quad \text{surjektiv}$$

$\underset{(iii)}{\Rightarrow} \mathbb{Q}$ abz. □

Satz: (Cantor)

$[0,1]$ nicht abzählbar = überabzählbar

Proof. $10 = \{0, 1, 2, .., 9\}$ Ziffern

$10^{\mathbb{N}} = \{$ Folgen $\mathbb{N} \to 10\}$ Ziffernfolgen

$\Rightarrow 10^{\mathbb{N}} \underset{bijektiv}{\overset{\approx}{\to}} [0,1]$

$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto 0, a_0 a_1 a_2 \ldots$ (Dezimalbruchentwicklung)

Sei $x^{(k)} \in [0,1]$ Folge $(k \geq 0)$

Zeige: Nicht surjektiv

$a_k := x_k^{(k)} + 1$ (k-te Stelle von $x^{(k)}$ plus 1)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \\ 9 \end{pmatrix} +1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x = .a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots x = .(x_0^{(0)} + 1)(x_1^{(1)} + 1)(x_2^{(2)} + 1) \ldots \in [0,1]$ □

Beh. $x \notin \left\{x^{(k)} \mid k \geq 0\right\}$

Proof. Widerspruch: $x \in \left\{x^{(k)} \mid k \geq 0\right\} \Rightarrow \exists k \geq 0 : x = x^{(k)} \in [0,1]$

$\Rightarrow x_k^{(k)} + 1 = a_k = x_k = x_k^{(k)}$ Widerspruch! d.h. Folge nicht surjektiv

$\Rightarrow [0,1]$ nicht abzählbar □

Korollar. $\exists$ *irrationale Zahlen*

genauer $\forall x < y \, \exists z \notin \mathbb{Q}, \; x < z < y$

Proof. $[x,y]$ überabzählbar, da $[0,1] \xrightarrow{bij} [x,y]$

abz. $\mathbb{Q} \cap [x,y] \subset \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \mathbb{Q} \cap [x,y] \subset_{\neq} [x,y]$

Analog $\mathbb{Q} \cap]x,y[\subset_{\neq}]x,y[$ □

Korollar. $\mathbb{Q}$ *nicht zusammenhängend*

Proof. Widerspruch $\mathbb{Q}$ zush. $\Rightarrow \mathbb{Q}$ Intervall

Sei $x, y \in \mathbb{Q},\ x < y$

$\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad x < z < y$ Widerspruch! Kein Intervall □

Satz: ($\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$)

d.h $\forall x < y\ \exists z \in \mathbb{Q},\ x < z < y$

Proof. If

$$x \geq 0 \Rightarrow \tfrac{1}{y-x} > 0$$

$$\underset{Arch.}{\Rightarrow} \exists \mathbb{N} \ni q > \tfrac{1}{y-x}$$

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid \tfrac{n}{q} \geq y\} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists p = min\, S \Rightarrow \tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \tfrac{p-1}{q} \overbrace{<}^{p-1 \notin S} y \overbrace{\leq}^{p \in S} \tfrac{p}{q}$$

$$\Rightarrow x = y - (y-x) \overbrace{<}^{\frac{1}{q} < y-x} \tfrac{p}{q} - \tfrac{1}{q} = \tfrac{p-1}{q} - (y-x) < -\tfrac{1}{q}$$

$$\Rightarrow x < \underbrace{\frac{p-1}{q}}_{\in \mathbb{Q}} < y$$

If

$$x < 0,\ x < y \Rightarrow \exists \mathbb{N} \ni k > -x$$

$$\underset{Teil\,1}{\Rightarrow} \exists r \in \mathbb{Q},\ 0 \leq x + k < r < y + k$$

$$x < r - k < y$$

□

Korollar. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *nicht zush.*

Proof. Widerspruch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zush. $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ Intervall

Sei $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x < y$

$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q},\ x < z < y \Rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kein Intervall □

Kapitel 3

Differenzierbarkeit

3.1 Diffbarkeit

Definition. (Stetigkeit von f in o)

M metrischer Raum, $f : M \to \mathbb{R}$ Funktion $\quad o \in M$ fest gewählt (o=origin / Ursprung)

$\lim\limits_{z \to o} f(z) = b \Leftrightarrow f(z) \rightsquigarrow b$ für z $\rightsquigarrow o$

falls

(i) $\quad\forall$ Folgen $M \ni a_n \rightsquigarrow o$ gilt $f(a_n) \rightsquigarrow b$

äquivalent

(ii) $\quad\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in M:\ d(z, o) \leq \delta \Rightarrow |f(z) - b| \leq \varepsilon$

Analog definiert man $\quad \lim\limits_{o \neq z \rightsquigarrow o} f(z) = b \Leftrightarrow$

(i) $\quad \lim f(a_n) = b \,\forall$ Folgen $o \neq a_n \rightsquigarrow o$

(ii) $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,\forall z \in M \quad 0 < d(z, o) \leq \delta \Rightarrow |f(z) - b| \leq \varepsilon$

Definition. Sei $U \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}$, z.B $U =]a, b[$

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und $o \in U$ (z.B. $a < o < b$)

f **differenzierbar (diffbar)** in $o \in U \Leftrightarrow$

$\exists\, f'(o) = \lim\limits_{o \neq x \to o} \frac{f(x) - f(o)}{x - o} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U$

$0 < |x - o| \leq \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(o)}{x - o} - f'(o) \right| \leq \varepsilon$ (**)

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U$

$|x - o| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(o) - f'(o)(x - o)| \leq \varepsilon\, |x - o|$ (*)

Beachte (*) gilt immer f¸r $x = o$

Proof. F¸r $x \neq o$ sind (*) und (**) äquivalent, da $|a|\, |b| = |ab|$

(**) $\left| \frac{f(x) - f(o)}{x - o} - f'(o) \right| \leq \varepsilon$

Multipliziere mit $|x - o|$

$|f(x) - f(o) - f'(o)\,(x-o)| = |x-o| \left|\frac{f(x)-f(o)}{x-o} - f'(o)\right| \le \varepsilon\,|x-o|$

Umgekehrt (*)$\Rightarrow$ (**) Division durch $|x-o| > 0$

□

$f'(o) =$ **Ableitung** von f in $o = \frac{df}{dx}(o)$.

Zusammenfassend: $\mathbb{R} \underset{\text{offen}}{\supset} U \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ o \in U$ $\quad f$ differenzierbar in $o \in U :\Leftrightarrow$

(I) $\quad \exists \lim\limits_{o \ne x \to o} \frac{f(x)-f(o)}{x-o} =: f'(o) \in \mathbb{R}$ $\qquad$ (Ableitung von f in o)

(I') $\quad \frac{f(x)-f(o)}{x-o} \to f'(o)$ f¸r $x \to o,\ x \ne 0$

(II) $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U,\ 0 < |x-o| \le \delta$

$\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(o)}{x-o} - f'(o)\right| \le \varepsilon$

(II') $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U,\ |x-o| \le \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(o) - f'(o)(x-o)| \le \varepsilon\,|x-o|$

Dabei ist (II') optimal denn

(i) $\quad |x-o| \le \delta,\ x = o$ zugelassen

(ii) $\quad$ Sinnvoll für $U \subset \mathbb{R}^n,\ x - o = Vektor,\ f'(o) =$ Matrix (in Mathe III)

Satz 1:

(f diffbar in $o \in U \Rightarrow$ f stetig in o)

Proof. Benutze (I) und Folgenkriterium: F¸r $o \ne x_n \to o$

$$f(x_n) - f(o) = \underbrace{\frac{f(x_n) - f(o)}{x_n - 0}}_{\rightsquigarrow f'(o)} \underbrace{(x_n - o)}_{\rightsquigarrow 0} \rightsquigarrow f'(o)0 = 0$$

$\Rightarrow f(x_n) \rightsquigarrow f(o)$ f¸r $x \rightsquigarrow o$

Nach Folgenkriterium ist f stetig in o □

Beispiel 3.1.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x \le 0 \end{cases}$

f stetig auf $\mathbb{R}$, sogar kontraktiv

zz. f nicht diffbar in $o = 0$,

$x < 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(o)}{x-o} = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

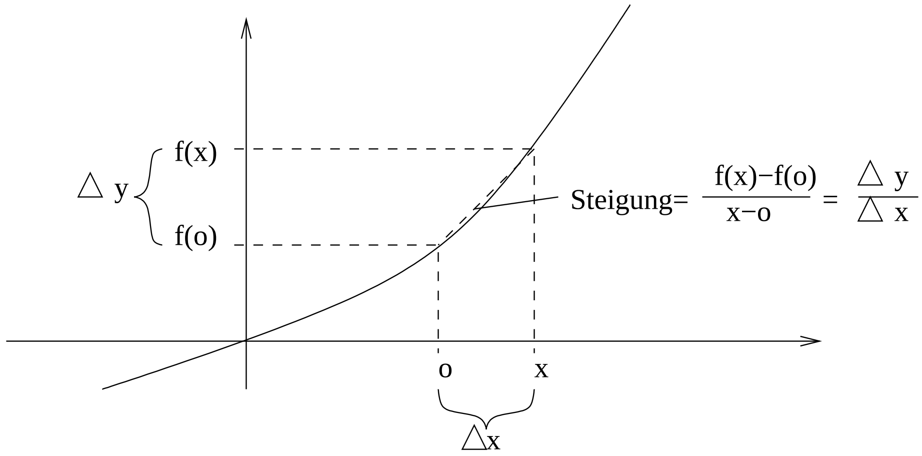
$x > 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(o)}{x-o} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(o)}{x-o} = -1, \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(o)}{x-o} = 1$$

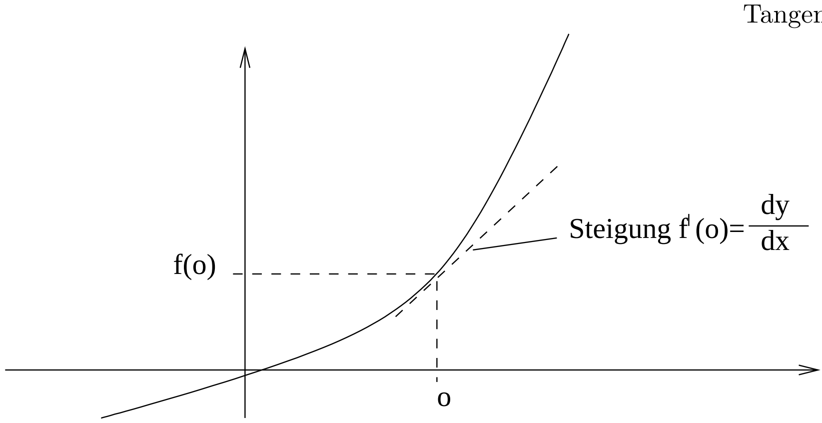
$$\text{Aber } \nexists \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(o)}{x-o}, \qquad \text{genauer } \frac{f(x)-f(o)}{x-o} \not\rightsquigarrow \text{(divergent)}$$

Geometrische Deutung der Ableitung:

Sekanten-Steigung



Tangenten-Steigung



Diffbarkeits-Regeln

Summenregel

$\mathbb{R} \supset U \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}$

(i) f, g diffbar in $o \in U$ $\Rightarrow f + g$ diffbar in o und $(f+g)'(o) = f'(o) + g'(o)$

(ii) f diffbar in o, $c \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ cf diffbar in o und $(cf)'(o) = c\, f'(o)$

(allg. Linearkombination $c_1 f_1 + c_2 f_2$)

Proof. mit (I)

F¸r $x_n \rightsquigarrow o$, $x_n \neq o$ gilt

$$\frac{(f+g)(x_n)-(f+g)(o)}{x_n - o} = \frac{f(x_n)+g(x_n)-f(o)-g(o)}{x_n - o} = \frac{f(x_n)-f(o)+g(x_n)-g(o)}{x_n - o} =$$

$$\underbrace{\frac{f(x_n)-f(o)}{x_n - 0}}_{\rightsquigarrow f'(o)} + \underbrace{\frac{g(x_n)-g(o)}{x_n - o}}_{\rightsquigarrow g'(o)} \underset{\text{Summenregel für Folgen}}{\rightsquigarrow} f'(o) + g'(o)$$

ÜA konstante Vielfache cf □

Produktregel

f, g diffbar in $o \in U$

$\Rightarrow fg$ diffbar in o und $(fg)'(o) = \underset{1.\text{Abl}}{f'(o)} \underset{0.\text{Abl}}{g(o)} \underset{0.\text{Abl}}{+f(o)} \underset{1.\text{Abl}}{g'(o)}$

Proof. F¸r $x_n \to o$, $x_n \neq o$ gilt

$\frac{(fg)(x_n)-(fg)(o)}{x_n - o} = \frac{f(x_n)g(x_n)-f(o)g(o)}{x_n - o}$

$$= \underbrace{\frac{f(x_n) - f(o)}{x_n - o}}_{\rightsquigarrow f'(o)} \underbrace{g(x_n)}_{\underset{\text{stetig}}{\rightsquigarrow} g(o)} + \underbrace{f(o)}_{=f(o)} \underbrace{\frac{g(x_n) - g(o)}{x_n - 0}}_{\rightsquigarrow g'(o)} \rightsquigarrow f'(o) \cdot g(o) + f(o) \cdot g'(o)$$

□

Korollar. *Jedes* **Polynom** n-ten Grades

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

ist diffbar auf $U = \mathbb{R}$ und

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1$$

ist Polynom vom Grad $n - 1$.

Proof. Aus Produktregel folgt durch Induktion

$\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1} \; \forall n \geq 1$

z.B. $\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(xx) = \frac{dx}{dx}x + x\frac{dx}{dx} = 2x$

$\Rightarrow$ konstante Vielfache $\frac{d}{dx} \underbrace{(ax^n)}_{Monom} = nax^{n-1}$

Aus Summenregel folgt Beh. □

Quotientenregel

Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ diffbar in $o \in U$ und $g(o) \neq 0$. Dann gilt:

(i) $\exists U \underset{\text{offen}}{\supset} V \ni o$ mit $g(x) \neq 0 \, \forall x \in V$

(ii) $\frac{f}{g} : V \to \mathbb{R}$ diffbar in $o \in V$ und $\left(\frac{f}{g}\right)'(o) = \frac{f'(o)\, g(o) - f(o)\, g'(o)}{g(o)^2}$

Proof. Sei zunächst $f = 1$, zeige

$(\frac{1}{g})'(o) = \frac{-g'(o)}{g(o)^2}$

Wegen $g(o) \neq 0$ und g stetig in o

$\Rightarrow \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in U, |x - o| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - g(o)| \leq \frac{|g(o)|}{2} \quad (\varepsilon := \frac{|g(o)|}{2})$

Setze $V = \{x \in U : \, |x - o| < \delta\} = U_\delta(o)$

Dann $g(x) \neq 0$ auf V :

$|g(o)| - |g(x)| \leq ||g(o)| - |g(x)|| \leq |g(o) - g(x)| \leq \frac{|g(o)|}{2}$

$\Rightarrow |g(o)| - |g(x)| \leq \frac{|g(o)|}{2}$

$\Rightarrow \frac{|g(o)|}{2} \leq |g(x)|$

$\Rightarrow g(x) \neq 0$ da $|g(x)| \geq \frac{|g(o)|}{2} > 0$

Sei $V \ni x_n \rightsquigarrow o$, $x_n \neq o$

$\frac{(\frac{1}{g})(x_n) - (\frac{1}{g})(o)}{x_n - o} = \frac{\frac{1}{g(x_n)} - \frac{1}{g(o)}}{x_n - o} = \frac{\frac{g(o)-g(x_n)}{g(x_n)-g(o)}}{\frac{x_n - o}{1}} = \frac{1}{g(x_n)g(o)} \frac{g(o)-g(x_n)}{x_n - o}$

$= \underbrace{\frac{-1}{g(x_n)g(o)}}_{\rightarrow \frac{-1}{g(o)g(o)}} \underbrace{\frac{g(x_n) - g(o)}{x_n - o}}_{\rightarrow g'(o)} \rightarrow \frac{-g'(o)}{g(o)^2}$

Damit Spezialfall $\quad f = 1$ bewiesen.

Allg. Fall $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$

f diffbar in $o \in U$, $\frac{1}{g}$ diffbar in $o \in V$

$\Rightarrow \frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$ diffbar in $o \in V$ und nach Produktregel und Spezialfall

$\left(\frac{f}{g}\right)'(o) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(o) = f'(o)(\frac{1}{g})(o) + f(o)(\frac{1}{g})'(o) \underset{\text{Fall 1}}{=} f'(o)\frac{1}{g(o)} + f(o)(\frac{-g'(o)}{g(o)^2}) = \frac{f'(o)g(o) - f(o)g'(o)}{g(o)^2}$

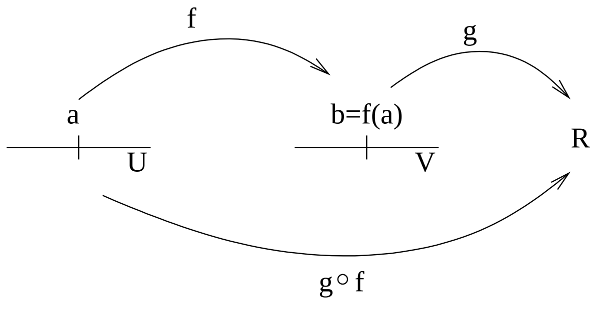
□

Kettenregel

$\mathbb{R} \underset{\text{offen}}{\supset} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ diffbar in $a \in U$

$\mathbb{R} \underset{\text{offen}}{\supset} V \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ diffbar in $b = f(a) \in V$

$\Rightarrow g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in a und $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$



Proof. Mit (II)'

f diffbar in $a \in U \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in U, \mid x - a \mid \leq \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| \leq \varepsilon \, |x - a|$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Definiere $\eta = min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + |f'(a)| + |g'(b)|}\right)$

Da f diffbar in $a \in U \Rightarrow \; \exists \, \delta > 0 \; \forall \, x \in U$, $|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| \leq \eta \mid x - a \mid$

Da g diffbar in $b \in V \Rightarrow \; \exists \, \delta' > 0 \; \forall \, y \in V$, $|y - b| \leq \delta' \Rightarrow |g(y) - g(b) - g'(b)(y - b)| \leq \eta \, |y - b|$

$\Rightarrow \forall x \in U,\ |x-a| \leq \delta$

$|f(x)-f(a)| \leq |f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)| + |f'(a)(x-a)| \leq \eta\,|x-a| + |f'(a)|\cdot|x-a|$

$\leq (\eta + |f'(a)|)\,|x-a| \leq (\eta+|f'(a)|)\delta$

Also

$(*)\ |f(x)-f(a)| \leq (\eta+|f'(a)|)\,|x-a|$ ("quantitative" Stetigkeit)

$\Rightarrow \forall x \in U,\ |x-a| \leq min\left(\delta, \frac{\delta'}{\eta+|f'(a)|}\right)$

$\underset{(*)}{\Rightarrow} |f(x)-f(a)| \leq (\eta+|f'(a)|)\,|x-a| \leq \delta'$

$$\Rightarrow \left|\underbrace{g(f(x))}_{(g\circ f)(x)} - \underbrace{g(f(a))}_{(g\circ f)(a)} - \underbrace{g'(f(a))\,f'(a)}_{\text{Kandidat der Ableitung}}\ (x-a)\right|$$

$$\leq \left|g(f(x)) - g(f(a)) - g'(f(a))\underbrace{(f(x)-f(a))}_{|\cdot|\leq\delta'}\right| + |g'(f(a))\,(f(x)-f(a)) - g'(f(a))\,f'(a)(x-a)|$$

$\leq \eta\,|f(x)-f(a)| + |g'(f(a))|\cdot|f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)|$

$\leq \eta\,(\eta+|f'(a)|)\,|x-a| + |g'(f(a))|\,\eta\,|x-a|$

$$= \eta\left(\underbrace{\eta}_{\leq 1} + |f'(a)| + |g'(f(a))|\right)|x-a| \leq \eta\,(1+|f'(a)|+|g'(b)|)\,|x-a| \leq \varepsilon\,|x-a|$$

Also erf¸llt "Kandidat" $g'(b)f'(a)$ die Diffbarkeits-Abschätzung f¸r $g \circ f$

$\underset{Eind.}{\Rightarrow}$ $g\circ f$ ist diffbar in a und $(g\circ f)'(a) = g'(b)f'(a)$ □

Beispiel 3.1.2. $\frac{d}{dx}x^4 = 4x^3$

$p(x) = x^4 \qquad p'(x) = 4x^3$

Setze $f(x) = x^2$, $g(y) = y^2$

$p = g\circ f$, $p(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^4$

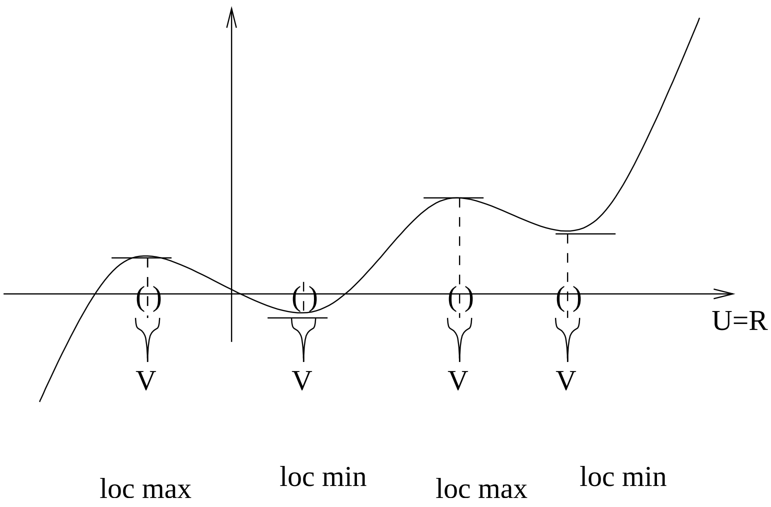
Kettenregel: $p'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a) = 2f(a)\cdot 2a = 2a^2\cdot 2a = 4a^3$

3.2 Mittelwertsatz (MWS) und Anwendungen

Definition. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ Funktion, U offenes Intervall

$$o \in U \textbf{ lokales Extremum} \begin{cases} \max \\ \min \end{cases} \Leftrightarrow \exists U \underset{\text{offen}}{\supset} V \ni o \text{ sodass } f(o) = \begin{matrix} \max\limits_{x \in V} f(x) \\ \min\limits_{x \in V} f(x) \end{matrix}$$

Beispiel 3.2.1. Polynom 5. Grades



Satz. $\underset{\text{offenes Intervall}}{]a,b[} = (a,b) \underset{\text{diffbar}}{\xrightarrow{f}} \mathbb{R}, \quad o \in]a,b[$ loc Extremum $\Rightarrow f'(o) = 0$

Muss im Inneren des Intervalls liegen, deswegen offenes Intervall

Proof. Widerspruch $f'(o) \neq 0$, Œ $f'(o) > 0$

Da f diffbar in $o \Rightarrow \exists \delta > 0 \; \forall x \in]a,b[, \; |x - o| \leq \delta$

$\left| \frac{f(x)-f(o)}{x-o} - f'(o) \right| \leq \frac{f'(o)}{2} =: \varepsilon$

$\Rightarrow -\frac{f'(o)}{2} \leq \frac{f(x)-f(o)}{x-o} - f'(o) \leq \frac{f'(o)}{2}$

$\Rightarrow \frac{f'(o)}{2} \leq \frac{f(x)-f(o)}{x-o}$

F¸r $x > o$ gilt $f(x) - f(o) \geq \underbrace{\frac{f'(o)}{2}}_{>0}(x - o) > 0 \Rightarrow f(x) > f(o) \Rightarrow o$ kein loc max

F¸r $x < o$ gilt $f(x) - f(o) \leq \frac{f'(o)}{2}(x - o) < o \Rightarrow f(x) < f(o) \Rightarrow o$ kein loc min

$\Rightarrow f$ kein loc Extremum Widerspruch! $\square$

Anwendung des Satzes Polynom 3. Grades

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ hat $f([-1,3]) = [-3,1]$

Proof. f stetig $\underset{ZWS}{\Rightarrow} f([-1,3])$ Intervall

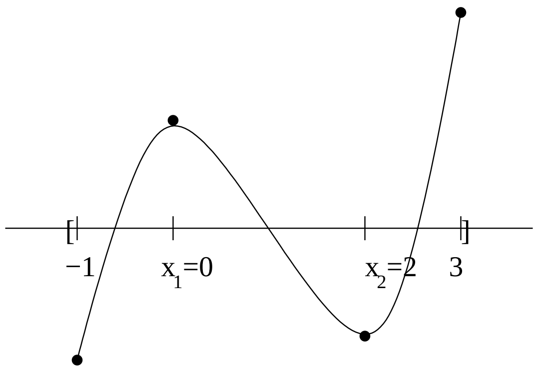
$\underset{EWS}{\Rightarrow} f([-1,3]) = [c,d], \begin{cases} c = min_{[-1,3]} f \\ d = max_{[-1,3]} f \end{cases}$

Berechne c, d

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

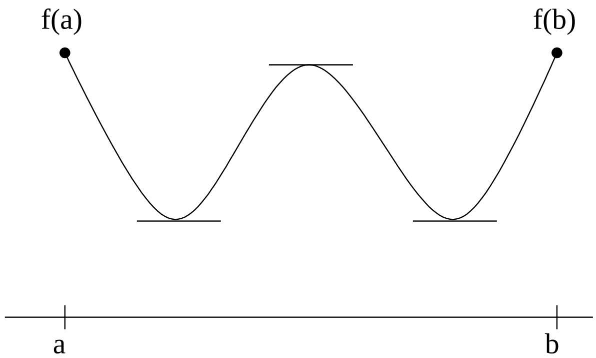


$\Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ kritische Punkte (mögliche Extrema) $\begin{array}{ll} f(-1) = -3 & \text{min} \\ f(0) = 1 & \text{max} \\ f(2) = -3 & \text{min} \\ f(3) = 1 & \text{max} \end{array}$ □

Satz (von Rolle, "nullter" MWS)

$f : [a,b] \xrightarrow{\text{stetig}} \mathbb{R}$, diffbar auf $]a,b[$

$f(a) = f(b) \qquad \Rightarrow \exists\, o \in \,]a,b[\,,\ f'(o) = 0$



Proof. Da $[a,b]$ kompakt und f stetig

$\underset{EWS}{\Rightarrow} \exists c \in [a,b]\,,\ f(c) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ und $\exists d \in [a,b],\ f(d) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$

If $c, d \notin \,]a,b[$ beides Randpunkte $\Rightarrow f$ konstant wegen $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \; \forall x \in]a, b[$

If $c \in]a, b[$ kein Randpunkt $\Rightarrow c$ loc max

$\underset{Satz}{\Rightarrow} f'(c) = 0$, Setze $o = c$

If $d \in]a, b[$ kein Randpunkt $\Rightarrow d$ loc min

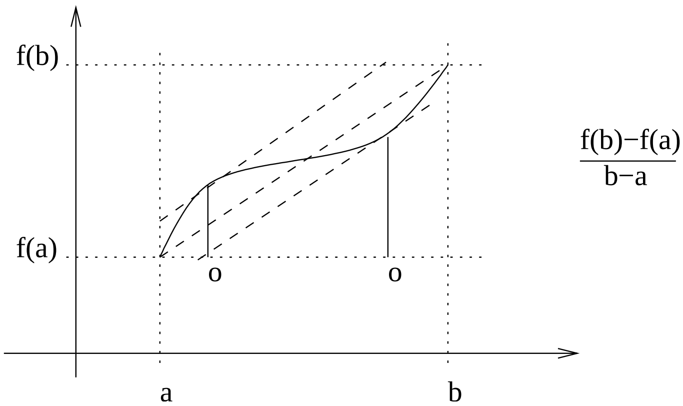
$\underset{Satz}{\Rightarrow} f'(d) = 0$, Setze $o = d$ □

Erster MWS

$f : [a, b] \xrightarrow{\text{stetig}} \mathbb{R}$, diffbar auf $]a, b[$

$\Rightarrow \exists o \in]a, b[$ sodass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(o)$

Sekantensteigung ¸ber das ganze Intervall = Tangentensteigung in o



Zweiter MWS

$[a, b] \xrightarrow[\text{stetig}]{f,g} \mathbb{R}$, diffbar auf $]a, b[$

$\Rightarrow \exists o \in]a, b[, \; f'(o) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(o) \cdot (f(b) - f(a))$

Bemerkung 2. MWS $\Rightarrow$ 1. MWS ($g = \mathrm{id}$)

$_{2.MWS} \Rightarrow f'(o) \underbrace{(b-a)}_{\neq 0} = 1 \cdot (f(b) - f(a)) \Rightarrow f'(o) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 1.MWS

Proof. 2.MWS $f, g : [a, b] \underset{stetig}{\Rightarrow} \mathbb{R}$, diffbar auf $]a, b[$

$h(x) := f(x) \, [g(b) - g(a)] - g(x) \, [f(b) - f(a)]$

$\Rightarrow h$ stetig auf $[a, b]$, diffbar auf $]a, b[$ (Summenregel)

$h(a) = f(a) \, (g(b) - g(a)) - g(a) \, (f(b) - f(a)) = f(a)g(b) \underline{- f(a)g(a)} - g(a)f(b) \underline{+ g(a)f(a)}$

$h(b) = f(b) \, (g(b) - g(a)) - g(b) \, (f(b) - f(a)) = \underline{f(b)g(b)} - f(b)g(a) \underline{- g(b)f(b)} + g(b)f(a)$

$\Rightarrow h(a) = h(b)$

$\underset{Rolle}{\Rightarrow} \exists o \in]a, b[, \; h'(o) = 0$

$0 = h'(o) = f'(o)\,(g(b) - g(a)) - g'(o)\,(f(b) - f(a))$

$\Rightarrow f'(o)\,(g(b) - g(a)) = g'(o)\,(f(b) - f(a))$ $\square$

Korollar.

$f : [a, b] \underset{\text{diffbar}}{\rightarrow} \mathbb{R}$ und sei f' beschränkt auf $[a, b]$

$\Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq |b - a| \cdot \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$

Proof. 1.MWS $\Rightarrow \exists o \in]a, b[$ mit $f'(o) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = (b - a) f'(o)$

$\Rightarrow |f(b) - f(a)| = |(b - a) \cdot f'(o)| = |b - a|\,|f'(o)| \leq |b - a| \cdot \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$ $\square$

Definition. $f : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$ **stetig diffbar** (oder C^1-Funktion) $:\Leftrightarrow$

(i) f diffbar auf $[a, b]$

(ii) $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$x \mapsto f'(x)$

$\boxed{\text{stetig diffbar} \equiv \text{diffbar mit stetiger Ableitung}}$

Beispiel 3.2.2. Jedes Polynom p stetig diffbar

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 x^0$

$\Rightarrow p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n - 1) a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1$

$\Rightarrow p'$ Polynom vom Grade $n - 1$

$\Rightarrow p'$ stetig auf $\mathbb{R} \Rightarrow p$ stetig diffbar auf $\mathbb{R}$

Korollar. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *stetig diffbar*

$\Rightarrow$ $\exists$ *Lipschitz-Konstante* M $\forall x, y \in [a, b]$ *gilt* $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$

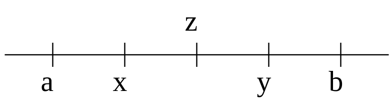
Proof. Nach Vor. gilt $f' : [a, b] \xrightarrow{stetig} \mathbb{R}$

$\underset{EWS}{\Rightarrow} M := \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)| < +\infty$

stetige Fkt. $|f'|$ nimmt Maximum auf $[a, b]$ an

$M = |f'(x_{max})|$

Sei nun $x, y \in [a, b]$, Œ $x < y$



$\underset{\text{1.Korollar für } [a,b]}{\Rightarrow} |f(x) - f(y)| \leq |x - y| \sup\limits_{z \in [x,y]} |f'(z)| \leq |x - y| \sup\limits_{z \in [a,b]} |f'(z)| = M\,|x - y|$ $\square$

Regeln von de l'HÙspital

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diffbar auf $]a,b[$

$o \in [a,b]$ mit $f(o) = 0 = g(o)$.

Es gelte:

(i) $g'(x) \neq 0 \,\forall x \neq o$

(ii) $L = \lim\limits_{o \neq x \to o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert

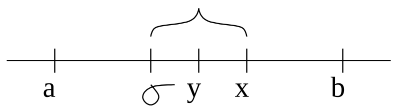
Dann gilt: $g(x) \neq 0 \,\forall x \neq o$ und $\lim\limits_{x \to o} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim\limits_{x \to o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Proof. Sei $x \in [a,b] \setminus \{o\}$

Nach Vor. (i) gilt $\begin{cases} g'(z) \neq 0 \,\forall z \in]o,x[\\ g(o) = 0 \end{cases}$

$\underset{Rolle}{\Rightarrow} g(x) \neq 0$

$\Rightarrow g \neq 0$ auf $[a,b] \setminus \{0\}$



Nach Vor. (ii) gilt $L = \lim\limits_{y \to o} \frac{f'(y)}{g'(y)}$ existiert

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta > 0 \,\forall 0 < |y - o| \leq \delta$

$\left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - L \right| \leq \varepsilon$

Sei nun $0 < |x - o| \leq \delta$

2.MWS, angewandt auf $[o, x]$

$\Rightarrow \;\exists y \in]o,x[$ sodass $\underbrace{f'(y)\,(g(x) - g(o))}_{= f'(y)g(x)} = \underbrace{g'(y)\,(f(x) - f(o))}_{g'(y)f(x)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}$

$\Rightarrow 0 < |y - o| \leq |x - o| \leq \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - L \right| \leq \varepsilon$ $\square$

3.3 Umkehrfunktionen

Bisher an diferenzierbaren Funktionen bekannt:

$$\underline{\text{Polynome}} \quad p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j} \quad \text{diffbar auf } \mathbb{R}$$

p' ist wieder Polynom (Summen- und Produktregel) rationale Funktionen $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, wobei p, q Polynome, diffbar auf $\mathrm{U} = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$

$$= \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } q\} = \mathbb{R} \setminus \overbrace{q^{-1}\{0\}}^{endlich,\, da\, q\, Polynom} = \mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$$

= endliche Vereinigung offener Intervalle

$$\text{Ableitung } \left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p'q - pq'}{q^2} \text{ wieder rational. (Quotienten-Regel)}$$

Lemma 3.3.1. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig diffbar auf offenem Intervall I. Dann gilt:*

(i) $f' > 0$ (d.h. $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$) $\Rightarrow$ f streng monoton wachsend auf I

(ii) $f' < 0$ (d.h. $\forall x \in I,\ f'(x) < 0$) $\Rightarrow$ f streng monoton fallend auf I

(i)* $f' \geq 0$ (d.h. $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$) $\Rightarrow$ f monoton wachsend auf I

(ii)* $f' \leq 0$ (d.h. $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$) $\Rightarrow$ f monoton fallend auf I

(iii) $f' \equiv 0$ (d.h. $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$) $\Rightarrow$ f konstant auf I

Proof. Folgt aus MWS □

Satz: (automatische Diffbarkeit der Umkehrfunktion)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig diffbar (mit stetiger Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$).
Sei $o \in I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall mit $f'(o) \neq 0$. Dann gilt:

(i) $\exists\, I \supset \underset{\text{off Int}}{J} \ni o$ sodass Einschränkung $f\,|_J : J \to \mathbb{R}$ injektiv

(ii) Bildintervall $f(J) \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}$ und $J \underset{\text{bijektiv}}{\overset{f}{\to}} f(J)$

(iii) $J \underset{\text{diffbar in } b = f(o)}{\overset{f^{-1}}{\leftarrow}} f(J)$

(iv) $\left(f^{-1}\right)'(f(o)) = \frac{1}{f'(o)}$

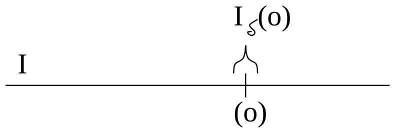
äquivalent für $b := f(o)$: $\left(f^{-1}\right)'(b) = f'\left(f^{-1}(b)\right)^{-1}$ (*)

Proof. (i) Œ $f'(o) > 0$

Setze $\varepsilon = \frac{f'(o)}{2}$. Da f' stetig in $o \Rightarrow \; \exists\, \delta > 0 \; \forall\, x \in I,\, |x - o| < \delta \; \Rightarrow \; |f'(x) - f'(o)| \leq \varepsilon$

$-\varepsilon \leq f'(x) - f'(o) \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \; f'(x) \geq f'(o) - \varepsilon = \frac{f'(o)}{2} > 0$



$\Rightarrow \; f' > 0$ auf $J := I \cap \mathbb{R}_\delta(o) = I_\delta(o)$ offenes Intervall

$\underset{\text{Lemma (i)}}{\Rightarrow} \; f\mid_J$ streng monoton wachsend

$\Rightarrow \; f\mid_J$ injektiv

(ii) ZWS $\Rightarrow \; f(J)$ Intervall. Warum offen?

$\overline{J} = I_\delta[o] = [o - \delta,\, o + \delta] \Rightarrow f'\mid_J > 0,\; f'\mid_{\overline{J}} \geq 0$

$\underset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} \; f\mid_J$ streng isoton, $f\mid_{\overline{J}}$ isoton, sogar streng isoton

$$\Rightarrow \; f(\overline{J}) = \left[\min_{\overline{J}} f,\, \max_{\overline{J}} f\right] = [f(o - \delta),\, f(o + \delta)]$$

$\Rightarrow \; f(J) =]f(o - \delta,\, f(o + \delta)[$ offenes Intervall

(ii) $f\,:\, I \to \mathbb{R}$ stetig diffbar , $o \in I$

$f'(o) \neq 0 \; \Rightarrow$ (i) $\;\exists\, I \supset J \ni o,\; f : J \underset{\text{bijektiv}}{\to} f(J)$ und $f(J)$ offenes Intervall

zz. $f^{-1}\,:\, f(J) \to J$ diffbar in $b = f(o)$ und es gilt (*)

(Satz von automatischer Stetigkeit) $f^{-1} : f(J) \to J$ stetig

Sei nun $f(J) \ni y_n \rightsquigarrow b,\; y_n \neq b$

Setze $x_n := f^{-1}(y_n) \in J \quad \underbrace{\quad\Rightarrow\quad}_{f^{-1}\text{stetig in } b} \quad x_n \rightsquigarrow f^{-1}(b) = o$

Da f injektiv $\Rightarrow \; x_n \neq o$

f diffbar in $o \; \Rightarrow \; \frac{f(x_n) - f(o)}{x_n - o} \rightsquigarrow f'(o)$

$\Rightarrow \; \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - o}{f(x_n) - f(o)} \underset{\text{Quotientenregel für Folgen}}{\rightsquigarrow} \frac{1}{f'(o)}$

$\Rightarrow \; \frac{1}{f'(o)} = \left(f^{-1}\right)'(b)$

$\square$

Anwendung

Sei $f(x) = x^n$ $(n \geq 1)$ n-te Potenzfunktion

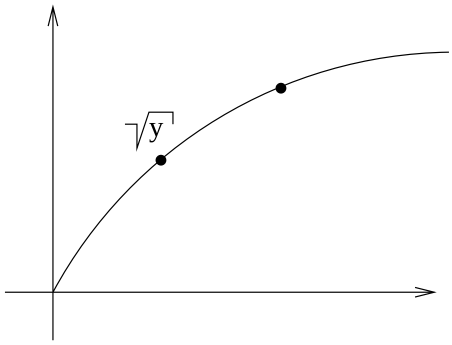
$\mathbb{R}_> := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} =]0, +\infty[\;\; \Rightarrow f : \mathbb{R}_> \to \mathbb{R}_>$ bijektiv und diffbar

und Ableitung $f'(x) = nx^{n-1} > 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R}_>$

$\underset{\text{automatisch diffbar}}{\Rightarrow} \; \mathbb{R}_> \underset{\text{diffbar}}{\overset{f^{-1}}{\longrightarrow}} \mathbb{R}_>\,, \qquad f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}$ und

$\left(f^{-1}\right)'(y) = f'\left(f^{-1}(y)\right)^{-1}$ d.h. f¸r $\sqrt[n]{\;}$ gilt:

$\frac{d}{dy}y^{1/n} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\frac{y^{1/n}}{y} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{y}}{y}$



Speziell $n = 2$ $\quad \frac{d}{dy}\sqrt{y} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

Allgemeiner $\quad r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q \neq 0$

$f(x) = x^r := (\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q} \Rightarrow f$ diffbar auf $\mathbb{R}_>$ und Ableitung: $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$

Proof. (<A) Umkehrregel $\Rightarrow x^{1/q}$, Produktregel $\Rightarrow x^{p/q} = (x^{1/q})^p$ $\square$

3.4 Höhere Ableitungen und Taylorformel

Sei $\mathbb{R} \supset I$ offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ diffbar $\Rightarrow f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$ wieder Funktion

Definition. f **2-fach diffbar** in $o \in I \Leftrightarrow f'$ diffbar in o.

In diesem Fall setze $f''(o) := (f')'(o)$ (2. Ableitung)

Symbolisch

$$\frac{d^2}{dx^2}f = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

Allgemeiner $\quad f$ **k-fach diffbar** in $o \in I \Leftrightarrow f'$ (k-1)-fach diffbar in o.

k-te Ableitung: $f^{(k)}(x) = (f')^{(k-1)}(x) = (f^{(k-1)})'(x)$

Symbolisch

$$\frac{d^k}{dx^k}f = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\right) = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

Beispiel. $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, auf $\mathbb{R}_>$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} f'(x) &= rx^{r-1} \\ f''(x) &= \tfrac{d}{dx}rx^{r-1} = r(r-1)x^{r-2} \\ f'''(x) &= r(r-1)(r-2)x^{r-3} \\ f^k(x) &= \underbrace{r(r-1)\dots(r+1-k)}_{\text{k Faktoren}}x^{r-k} \end{aligned}$$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall

$f\ : I \to \mathbb{R}$ n-fach diffbar $\Rightarrow\ \exists$ Ableitungen

$f^{(0)} := f\ : I \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto f(x)$

$f^{(1)} := f'\ : I \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto f'(x)$

$f^{(2)} := f''\ : I \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto f''(x)$

$f^{(3)} := f'''\ : I \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto f'''(x)$

$f^{(n)} \qquad : I \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto f^{n}(x)$

induktiv definiert durch

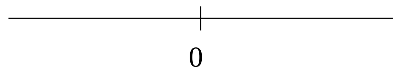
Ind-Schritt $f^{(k+1)}(x) := f^{(k)'}(x) = \frac{d}{dx} f^{(k)}(x)$

Ind-Beginn $f^{(0)}(x) := f(x)$

n-tes Taylorpolynom von f um $o \in I$ “Mittelpunkt”

z.B.

$I = \mathbb{R}$, $o = 0$



$I = \mathbb{R}_{>} = \{x \in \mathbb{R}\ \mid x > 0\}$, $o = 1$

$I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, $o = 2$

abhängig von f, o, n

$$P_n^o(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(o)}{k!}(x-o)^k = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(o)\frac{(x-o)^k}{k!}$$

Beachte $P_n^o(x)$ Polynom in x vom Grade $\leq n$. Nach Definition $0! = 1$ leeres Produkt

Spezialfall $o = 0$:

$$P_n^0(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \qquad \text{n} - \text{tes Taylorpolynom von } f \text{ um } 0$$

Beispiel.

$$P_2^o(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(o)}{k!}(x-o)^k = \frac{f^{(0)}(o)}{0!}(x-o)^0 + \frac{f^{(1)}(o)}{1!}(x-o)^1 + \frac{f^{(2)}(o)}{2!}(x-o)^2$$

$$= \frac{f(o)}{1} \cdot 1 + \frac{f'(o)}{1!}(x-o) + \frac{f''(o)}{2}(x-o)^2$$

Bemerkung 3.4.1. Für ein Polynom $P(x) = a_n \frac{x^n}{n!} + a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + a_1\frac{x^1}{1} + a_0$ gilt

$P(0) = P^{(0)}(0) = a_0$

$P^{(1)}(0) = P'(0) = a_1$

$P^{(2)}(0) = P''(0) = a_2$

d.h. allgemein $P^{(k)}(0) = a_k$

Beispiel 3.4.2. $P(x) = a\frac{x^3}{6} + b\frac{x^2}{2} + cx + d$

$P^{(0)}(x) = P(x),\ P^{(0)}(0) = d$

$P^{(1)}(x) = P'(x) = 3a\frac{x^2}{6} + 2b\frac{x}{2} + c = a\frac{x^2}{2} + bx + c \ \Rightarrow\ P^{(1)}(0) = c$

$P^{(2)}(x) = P^{(1)'}(x) = a\frac{2x}{2} + b = ax + b \ \Rightarrow\ P^{(2)}(0) = b$

$P^{(3)}(x) = P^{(2)'}(x) = a \ \Rightarrow\ P^{(3)}(0) = a$

Satz von Taylor

(Approximation einer Funktion f durch Taylorpolynom)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-fach diffbar auf I

Sei $o \in I$ fest $\Rightarrow \forall x_0 \in I\ \exists\, x_{n+1} \in I$, zwischen x_0 und o, mit

$$\underbrace{f(x_0)}_{\text{Funktionswert in } x_0} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(o)}{k!}(x_0 - o)^k}_{\text{n−tes Taylorpolynom}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}(x_0 - o)^{n+1}}_{\text{Restglied}}$$

Proof. (mit dem Satz von Rolle)

$\boxed{g \text{ diffbar auf } [a,b] \text{ mit } g(a) = g(b) \Rightarrow \exists c \in [a,b] \text{ mit } g'(c) = 0}$

$$\text{Sei } P(x) = P_n^{(o)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(o)}{k!}(x - o)^k$$

$\Rightarrow$ P n-fach diffbar (sogar ∞-fach diffbar) und $P^{(k)}(o) = f^{(k)}(o)$ f¸r $0 \le k \le n$

Definiere für x_0 beliebig, aber fest

$g(x) := [f(x) - P(x)](x_0 - o)^{n+1} - [f(x_0) - P(x_0)](x - o)^{n+1}$

$\Rightarrow g$ $(n+1)$-fach diffbar auf I, denn f $(n+1)$-fach diffbar, P ∞-oft diffbar

und die Ableitungen für $0 \le k \le n$ sind:

$$g^{(k)}(x) = [f^{(k)}(x) - P^{(k)}(x)](x_0 - o)^{n+1} - [f(x_0) - P(x_0)] \cdot \underbrace{\frac{d^k}{dx^k}(x - o)^{n+1}}_{(n+1)n(n-1)\ldots(n+2-k)(x-o)^{n+1-k}}$$

$$g^{(k)}(o) = \underbrace{\left(f^{(k)}(o) - P^{(k)}(o)\right)}_{=0}\dot{(}x_0 - o)^{n+1} - (f(x_0) - P(x_0))\,((n+1)\ldots(n+2-k))\,\underbrace{(o - o)^{n+1-k}}_{=0}$$

$\Rightarrow g^{(k)}(o) = 0\ \forall 0 \le k \le n$

$g(x_0) = 0$ nach Konstruktion

$g(o) = g^{(0)}(o) = 0 \quad (k = 0)$

$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Rolle für } g} \ \exists\, x_1 \in \,]o,\, x_0[\text{ mit } g'(x_1) = 0$

$g'(o) = g^{(1)}(o) = 0 \quad (k = 1) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Rolle für } g'} \quad \exists x_2 \in \,]o,\, x_1[\, \subset \,]o, x_0[$

$g''(x_2) = 0 = g''(o) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Rolle für } g''} \quad \exists x_3 \in \,]o,\, x_2[\, \subset \,]o,\, x_1[\, \subset \,]o, x_0[$

$g'''(x_3) = 0 = g'''(o) \ \ldots\ldots\ \exists x_n \in \,]o,\, x_{n-1}[\, \subset \cdots \subset \,]o, x_0[$

mit $g^{(n)}(x_n) = 0 = g^{(n)}(o) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Rolle für } g^{(n)}} \quad \exists x_{n+1} \in \,]o,\, x_n[\, \subset \,]o,\, x_0[$

$$0 = g^{(n+1)}(x_{n+1}) = \left(f^{(n+1)}(x_{n+1}) - \underbrace{P^{(n+1)}(x_{n+1})}_{=0, \text{ da Grad P}=n} \right)(x_0 - o)^{n+1} - (f(x_0) - P(x_0))\,(n+1)!$$

$\Rightarrow f^{(n+1)}(x_{n+1})(x_0 - o)^{n+1} = (n+1)!(f(x_0) - P(x_0))$

$\Rightarrow f(x_0) = P(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}$ $\square$

Kapitel 4

Unendliche Reihen und Potenzreihen

Motivation

Taylorformel um $o = 0$, f $(n+1)$ -fach diffbar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{\text{klein}}{\text{Restglied}}$$

"Taylor-Reihe" f ∞-oft diffbar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad \text{ist kein Polynom}$$

4.1 Unendliche Reihen

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ Folge in $\mathbb{R}$

(allgemeiner im normierten Raum E)

$\underset{n \ \mapsto \ a_n}{\mathbb{N} \to \mathbb{R}}$

n-te Partialsumme

$$s_n := \sum_{m=0}^{n} a_m = \underbrace{\overbrace{\underset{s_0}{a_0} + a_1}^{s_1} + a_2}_{s_2} + \cdots + a_n$$

$\Rightarrow (s_n)_{n\geq 0}$ Folge in $\mathbb{R}$

Beide Folgen (a_n) und (s_n) gleiche Information

$s_n = a_0 + \cdots + a_n$

$a_n = s_n - s_{n-1} \qquad (n \geq 1),\ s_{-1} = \text{leere Summe} = 0$

Definition. "unendliche Summe" = Reihe

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow (s_n)$ konvergiert in $\mathbb{R}$

In diesem Falle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$$

Beispiel. Geometrische Reihe $\qquad x \in \mathbb{R}$

$a_n = x^n \qquad (n \geq 0)$

$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

$\Rightarrow (1-x)s_n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)$

$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n - x - x^2 - x^3 - \cdots - x^n - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}$

$\Rightarrow\ s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für $x \neq 1$

Satz:

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) $\quad |x| \geq 1,$ d.h. $x \leq -1$ oder x $\geq 1 \ \Rightarrow \sum x^n$ divergent

(ii) $\quad |x| < 1,$ d.h. $-1 < x < 1 \underset{konvergent}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\quad$ Reihenwert

Proof. (i) $\quad$ folgt aus folgendem Satz, da f¸r $|x| \geq 1$ gilt $|x^n| = |x|^n \geq 1$

$\Rightarrow x^n \not\rightsquigarrow 0 \qquad$ keine Nullfolge

(ii) $\quad$ Sei $|x| < 1 \ \Rightarrow x^n \rightsquigarrow 0$

$\Rightarrow x^{n+1} = x \cdot x^n \rightsquigarrow x \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \rightsquigarrow \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

□

Beispiel.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{1024} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \underset{x=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Beispiel.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\underset{\text{nicht optimal}}{=} \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^0\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3-2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\underset{\text{optimal}}{=} \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^m = \frac{2}{3\cdot 3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{3-2} = \frac{2}{3}$$

Satz: $\sum a_n$ **konvergent** $\Rightarrow a_n \rightsquigarrow 0$

$\boxed{\text{n-te Glied-Test}}$ (notwendig, nicht hinreichend)

Proof. Sei $\sum a_n$ konvergent

$$\underset{\text{Reihenwert}}{\Rightarrow} s := \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n \Rightarrow a_n = s_n - s_{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

□

Reihen mit positiven Gliedern $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Satz

Sei $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert } \Leftrightarrow (s_n) \text{ beschränkt}$$

(Notation $\sum a_n < +\infty$)
In diesem Falle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}} s_n < \infty$$

Proof. Da $a_n \geq 0 \Rightarrow (s_n) \nearrow$ isoton □

Daher s_n konvergent $\Leftrightarrow (s_n)$ beschränkt und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n \overset{s_n \text{ isoton}}{=} \sup_{\mathrm{n}\to\infty} s_n$$

Quotienten-Kriterium

Sei $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(i) Falls $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$existiert $\Rightarrow$

$L < 1 \Rightarrow \sum a_n < \infty$

$L > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

$L = 1 \Rightarrow ?$

Allgemeiner gilt

(ii) $L = \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$

(iii) $L = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty$ (divergent)

Proof. (ii) Sei $L = \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

größte untere Schranke $= \inf_m \sup_{n \geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{m \to \infty} \underbrace{\sup_{n \geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n}}_{\text{antiton}} = \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < \frac{1+L}{2} < 1$

$\Rightarrow \frac{1+L}{2}$ keine untere Schranke der Folge $\sup_{n \geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{n \geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1+L}{2}$

$\Rightarrow \forall n \geq m$ gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1+L}{2}$

Teleskop-Argument $n > m$

$a_n = \underbrace{\frac{a_n}{a_{n-1}}}_{<\frac{1+L}{2}} \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}_{<\frac{1+L}{2}} \dots \underbrace{\frac{a_{m+1}}{a_m}}_{<\frac{1+L}{2}} a_m \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^{n-m} a_m$

$$\Rightarrow \sum_{n=m}^{\infty} a_n \leq a_m \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{1+L}{2}\right)^{n-m} = a_m \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+L}{2}\right)^k \overset{\frac{1+L}{2}<1}{=} \frac{a_m}{1 - \frac{1+L}{2}} < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{m-1} a_n + \frac{a_m}{1 - \frac{1+L}{2}} < \infty \Rightarrow \text{ konvergiert}$$

(iii) $L = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, zz. Divergenz

$1 < L = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{m \to \infty} \underbrace{\inf_{n \geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n}}_{\text{isoton}} = \sup_m \inf_{n \geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$ kleinste obere Schranke

$\Rightarrow$ 1 keine obere Schranke der Folge $\inf_{n \geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \quad \inf_{n \geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \forall n \geq m$ gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

$\Rightarrow a_{n+1} > a_n > 0 \quad \Rightarrow \quad (a_n)_{n \geq m}$ streng monoton wachsend $\Rightarrow a_n \not\to 0$

oder $a_n = \underbrace{\frac{a_n}{a_{n-1}}}_{>1} \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}_{>1} \dots \underbrace{\frac{a_{m+1}}{a_m}}_{>1} a_m > a_m > 0 \Rightarrow a_n \not\to 0$

$\Rightarrow \sum a_n$ divergent □

Definition. a_n nicht notwendig positiv

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \textbf{konvergiert absolut} \quad \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

Stärker als Konvergenz: Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz.

Quotienten-Kriterium f¸r absolute Konvergenz

Sei (a_n) Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und es gelte

$$L := \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ existiert}$$

Dann:

(i) $L < 1 \;\Rightarrow\; \sum a_n$ konvergiert (sogar absolut)

(i) $L > 1 \;\Rightarrow\; \sum a_n$ divergent

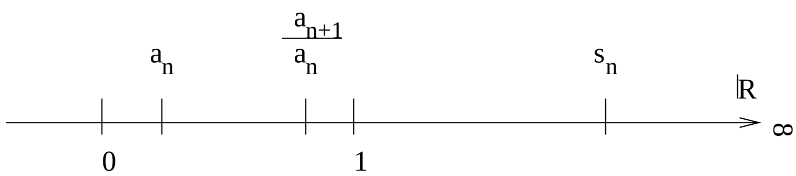
(i) $L = 1 \;\Rightarrow$?

graphisch:

a_n "nahe bei 0"

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ "nahe bei 1"

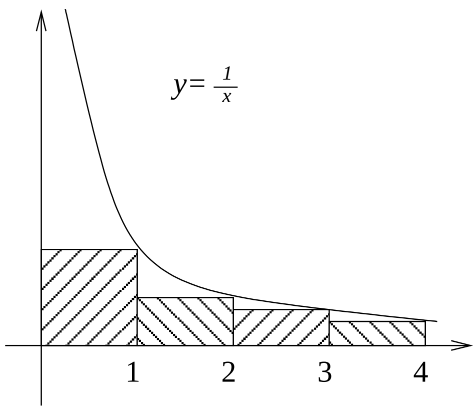
s_n "nahe bei ∞"



Satz: harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \text{ divergent} \qquad \left(\text{obwohl } \frac{1}{n} \rightsquigarrow 0\right)$$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$



Quotientenfolge $a_n = \frac{1}{n}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} / \frac{1}{n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1\frac{1}{n}} \rightsquigarrow \frac{1}{1+0} = 1$ keine Konklusion

Zeige

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \text{ keine Cauchy-Folge}$$

(s_n) monoton wachsend. Sei $n_0 \geq 1$ beliebig, aber fest

$\underbrace{s_{2n_0} - s_{n_0}}_{>0} = \sum_{m=1}^{2n_0} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{n_0} \frac{1}{m}$

$= \sum\limits_{m=n_0+1}^{2n_0} \underbrace{\frac{1}{m}}_{\geq \frac{1}{2n_0}} \geq \underbrace{\sum_{m=n_0+1}^{2n_0}}_{n_0\,Terme} \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2}$

Wähle $\varepsilon < \frac{1}{2} \Rightarrow$ keine Cauchyfolge □

4.2 Potenzreihen und Taylorreihen

Definition. Sei (c_n) Koeffizientenfolge

Sei $x \in \mathbb{R}$ $\quad a_n := c_n x^n$

$$\Rightarrow \sum a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ \textbf{Potenzreihe}}$$

Beispiel. geometrische Reihe

$\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ Potenzreihe, $c_n = 1$ $\quad$ (falls $|\, x \,| < 1$)

Lemma 4.2.1. *von Abel*

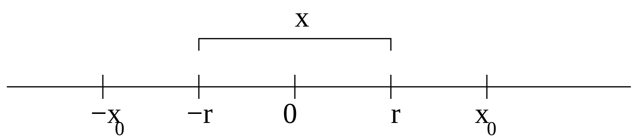
Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *Potenzreihe und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ *konvergent f¸r festes* $x_0 > 0$.

Dann gilt: $\forall\, 0 < r < x_0 \;\forall\; |x| \leq r$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *konvergiert absolut*

d.h. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |x^n| < +\infty$

Graphisch



Proof. Nach Vor. gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ konvergiert

$\Rightarrow\; c_n x_0^n \rightsquigarrow 0 \;\Rightarrow\; c_n x_0^n$ beschränkt

$\Rightarrow\; \exists M \geq 0 \;\forall n \in \mathbb{N},\; |c_n x_0^n| \leq M$

Sei nun $|x| \leq r < x_0 \Rightarrow \frac{|x|}{x_0} \leq \frac{r}{x_0} < 1$

$\Rightarrow$ geom Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{x_0}\right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{x_0}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{r}{x_0}} = \frac{x_0}{x_0 - r} < +\infty$

$\Rightarrow |c_n x^n| = |c_n| \cdot |x^n| = \underbrace{|c_n\, x_0^n|}_{\leq M} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left(\frac{r}{x_0}\right)^n$ unabhängig von x

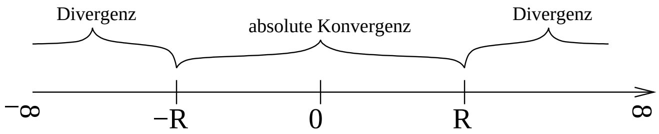
$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| \leq M \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{x_0}\right)^n = \frac{M x_0}{x_0 - r} < \infty \Rightarrow$ absolute Konvergenz □

Korollar. *Sei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *Potenzreihe* $\Rightarrow$ $\exists$ *Konvergenz-Radius* $0 \leq R \leq +\infty$ *mit folgender Eigenschaft*

(i) $|x| < R \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *absolute Konvergenz*

(ii) $|x| > R \Rightarrow \sum c_n x^n$ *Divergenz*

(iii) $|x| = R \Rightarrow$ *?*



$R = 0 \Rightarrow$ *Divergenz f¸r* $x \neq 0$

$R = +\infty \Rightarrow$ *abs Konv f¸r alle* $x \in \mathbb{R}$

Beispiel.

$$R = 1 \quad \text{für} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Proof. $|x| < 1 \Rightarrow$ Konv, sogar absolut

$|x| > 1 \Rightarrow$ Divergenz □

Klassische Potenzreihen

(1) **Exponentialfunktion**

$R = +\infty$ $\qquad \exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad c_n = \frac{1}{n!}$

(2) **Trigonometrische Reihen**

$R = +\infty$ $\qquad \cos(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}, \qquad c_n = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!} & n \text{ gerade} \end{cases}$

$\sin(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}$

(3) **Logarithmus**

$R = 1$ $\qquad \log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$ Potenzreihe um $o = 1$

oder, äquivalent,

$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

Proof. für exp: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad a_n = \frac{x^n}{n!}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} = \frac{x^{n+1}}{x^n} \frac{n!}{(n+1)!} = x \frac{1}{n+1} \rightsquigarrow x \cdot 0 = 0$ da $n \rightsquigarrow \infty$

$\underset{Quot-Krit}{\Rightarrow} \sum a_n$ konvergent f¸r alle x □

Proof. für log:

$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad$ abhängig von x

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \frac{n}{(-1)^{n-1} x^n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}} \frac{x^{n+1}}{x^n} \frac{n}{n+1} = (-1) \cdot x \cdot \frac{n}{n+1} = (-x) \cdot \frac{n}{n+1}$

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \cdot \frac{n}{n+1} = |x| \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \rightsquigarrow |x| \cdot \frac{1}{1+0} = |x|$

Quotientenkriterium $\begin{array}{lcc} |x| < 1 & \Rightarrow & \text{absolute Konvergenz} \\ |x| > 1 & \Rightarrow & \text{Divergenz} \end{array} \Rightarrow R = 1$ □

Potenzreihen

$R = +\infty$

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad |x| < +\infty$$

$$\sin(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} \qquad |x| < +\infty$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + - \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} \qquad |x| < +\infty$$

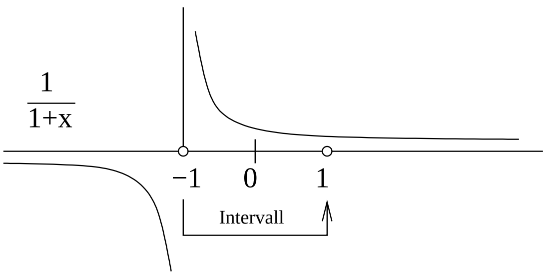
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + - \dots$$

$R = 1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$\frac{1}{1+x}$ Konvergenzintervall:



$x = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ divergent.

$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots$

$\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

alternierende harmonische Reihe (konvergiert sehr langsam)

Satz: (gliedweise Differentiation

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ Potenzreihe,

Konvergenzintervall $I = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < R\} = \mathbb{R}_R(0) =]-R, R[$

$\Rightarrow$ f ∞-oft diffbar auf I und

$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ [gliedweise Ableitung] Potenzreihe mit gleichem Konvergenzradius R

$f''(x) = \sum_{n=0(n=2)}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$

$\vdots \qquad \vdots$

$f^{(m)}(x) = \sum_{n=0(n=m)}^{\infty} n(n-1)\dots(n+1-m) c_n x^{n-m}$

Satz:

Ableitungen von e^x, $sin(x)$, $cos(x)$

Es gilt f¸r $I = \mathbb{R}$, $R = +\infty$

(i) $\frac{d}{dx} e^x = exp'(x) = e^x$

(ii) $\frac{d}{dx} sin(x) = \sin'(x) = \cos(x)$

(iii) $\frac{d}{dx} \cos(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$

Proof. (i) $\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dx}\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n x^{n-1}$

$$\underbrace{=}_{m=n-1\geq 0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{(m+1)!} x^m \underbrace{=}_{(m+1)! = m!(m+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$$

(ii) $\frac{d}{dx} \sin(x) = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$

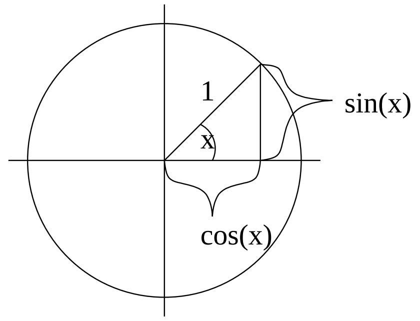
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(2m+1)x^{2m} \underbrace{=}_{(2m+1)! = (2m)!(2m+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} = \cos(x)$$

(iii) $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$ analog

$\square$

Korollar. *Pythagoras*

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$



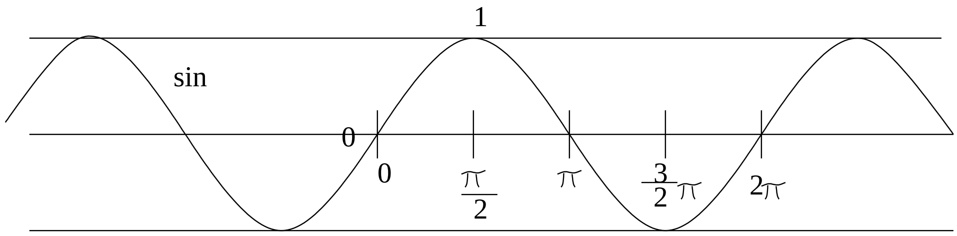
Proof. $f(x) := [\sin(x)]^2 + [\cos(x)]^2$

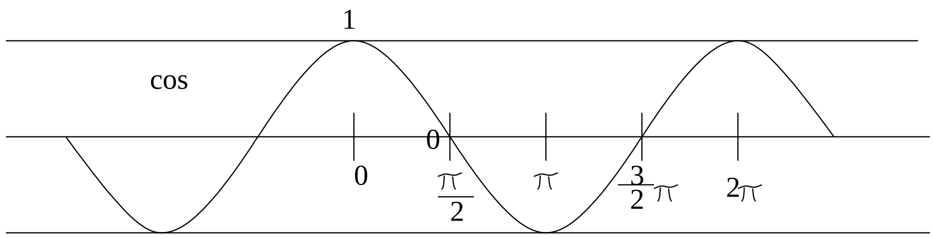
$f'(x) = \frac{d}{dx}\sin^2(x) + \frac{d}{dx}\cos^2(x)$

$= \sin'(x)\cdot\sin(x) + \sin(x)\cdot\sin'(x) + \cos'(x)\cdot\cos(x) + \cos(x)\cdot\cos'(x)$

$= 2\,[\cos(x)\cdot\sin(x) - \sin(x)\cdot\cos(x)] = 0$

$\overset{MWS}{\Rightarrow}$ f konstant $\Rightarrow$ $f(x) = f(0) = [\underbrace{\sin(0)}_{=0}]^2 + [\underbrace{\cos(0)}_{=1}]^2 = 1$ $\square$





Satz:

Auf $I := \mathbb{R}_1(1) =]0,2[$ gilt $\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{x}$

Proof. $\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ f¸r $x \in I$

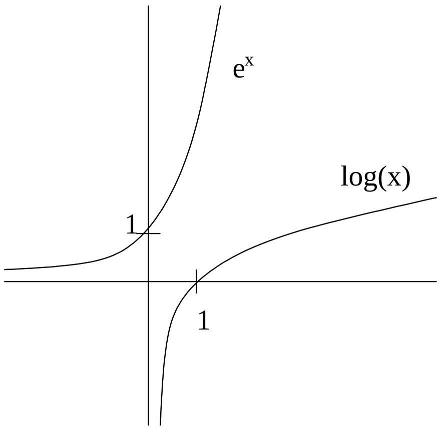
$$\frac{d}{dx}\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \underbrace{=}_{\frac{d}{dx}(x+a)^n \underset{y=x+a}{=} n(x+a)^{n-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} n\cdot(x-1)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^{n-1} \underset{m=n-1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{=}_{|1-x|<1} \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$$ $\square$

Korollar. *Es gilt* $\log = \exp^{-1}$ *, d.h*

$\log(\exp(x)) = x$ *für* $x \in \mathbb{R}$

$\exp(\log(x)) = x$, *für* $x > 0$



Proof. $f(x) = \log(\exp(x))$

Kettenregel:

$$f'(x) = (\log \circ \exp)'(x) = \underbrace{\log'(e^x)}_{=\frac{1}{e^x}} \cdot \underbrace{(\exp)'(x)}_{=e^x} = 1 = \frac{d}{dx}x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(f(x) - x) = 0 \underset{MWS}{\Rightarrow} f(x) - x \underset{constant}{=} f(0) - 0 = f(0) = \log(\exp(0)) = \log(1) = 0$$

$\Rightarrow \quad f(x) = x \quad$ f¸r alle $x \in \mathbb{R}$

□

Index

"OK ?" Prof. Upmeier

Die Suche des Herrn Rosenbaum oder **Sieg unter der Dusche**

Nachdem er aus seinem Traum erwacht war, hatte er Mühe damit Haut und Laken so zu trocknen, daß er nicht daran festklebte. Nun lag er da. Trocken, aber nicht mehr müde. Lieber hätte er geschlafen. Auch wenn er wußte, so nicht fliehen zu können, wollte er so doch wenigstens eine andere Sichtweise bekommen. Hier an der weißen Decke veränderte sich nichts.

Festgetrocknete, weiße Farbtupfer formten ein Relief. Schatten der vorbeifahrenden Autos zogen als Unwetter darüber hinweg. Zu dieser Zeit sah es hier niemals anders aus, würde es niemals anders aussehen. Schlaf.

Am Morgen konnte Herr Rosenbaum stolz auf sich sein. Er hatte geschlafen, er hatte sich gewehrt! Gegen wen?

Ganz und gar konnte sich Herr Rosenbaum ja diesem Gedanken nicht verschließen. Jetzt fühlte er sich wie ein Soldat. Er hatte ein Ziel verfolgt, war erfolgreich gewesen und erhielt hier direkt vor seinem Bett einen Orden an die Brust geheftet. Er hatte getan, wie ihm gesagt war. Selbstlos - ein ehrbarer Soldat. Immer wenn er sich daran erinnerte, wußte er nicht mehr, aus welcher Quelle die Tränen stammten, die ihm morgens in den Augen standen.

Dieser und andere waren es, die dafür sorgten, daß er sich von seinen Zielen immer weiter entfernte und er eben darum zu einem immer besseren Soldaten wurde.

Sofort unter die Dusche. Aus dem Radio donnerten fröhliche Stimmen. Herr Rosenbaum sang. Oft war es so, daß er immer wieder gegen es ansetzten mußte. Heute war es anders. Er sang, sie sangen. „Krieg ist grausam - aber der Sound ist geil“.

So begann ein guter Tag auf der Suche des Herrn Rosenbaum.

Steve Hoffmann (Herbst 2002)

An dieser Stelle herzlichen Dank an Natalia, Lars, Olli und Steve, ohne deren Hilfe und Mitarbeit dieses Skript nicht mööglich gewesen wäre.

Christoph Scheid (Frühjahr 2003)