3. Mehr zu Permutationen

Definition 3.1. *Ein r-Tupel $(a_1, \dots, a_r) \in [n]^{\langle r \rangle}$ heißt Zykel der Permutation $\sigma \in S_n$, falls $\sigma(a_i) = a_{i+1}$, $1 \le i \le r-1$, und $\sigma(a_r) = a_1$. Der Zykel heißt normalisiert, falls $a_1 = \max\{a_1, \dots, a_r\}$.*

Lemma 3.2. *Seien $(a_1, \dots, a_r)$ und $(b_1, \dots, b_s)$ zwei normalisierte Zykel der Permutation $\sigma \in S_n$. Dann gilt entweder $\{a_1, \dots, a_r\} \cap \{b_1, \dots, b_s\} = \emptyset$ oder $r = s$ und $a_i = b_i$, $1 \le i \le r = s$.*

Proof. Sei $\{a_1, \dots, a_r\} \cap \{b_1, \dots, b_s\} \neq \emptyset$. Dann gibt es $1 \le i \le r$ und $1 \le j \le s$ mit Dann gilt aber auch $a_{i+1} = \sigma(a_i) = \sigma(b_j) = b_{j+1}$. Induktio Zeigt man, $a_{i+\ell} = \sigma^\ell(a_i) = \sigma^\ell(b_j) = b_{j+\ell}$, wobei die Indizes bei den a's modulo r und bei den b's modulo s zu rechnen sind. Damit folgt aber $r = s$ und $\{a_1, \dots, a_r\} = \{b_1, \dots, b_s\}$. □

Lemma 3.3. *Seien $(a_1^{(i)}, \dots, a_{r_i}^{(i)})$, $1 \le i \le k$, die normalisierten Zykel der Permutation $\sigma \in S_n$. Dann gilt*

$$\bigcup_{i=1}^{k} \{a_1^{(i)}, \dots, a_{r_i}^{(i)}\} = [n].$$

Proof. Offensichtlich liegt jedes element $i \in [n]$ in einem Zykel der Permutation σ. □

Definition 3.4. *Seien $(a_1^{(i)}, \dots, a_{r_i}^{(i)})$, $1 \le i \le k$, die normalisierten Zykel der Permutation $\sigma \in S_n$. Gilt $a_1^{(1)} < \cdots < a_1^{(k)}$, so heißt*

$$(a_1^{(1)}, \dots, a_{r_1}^{(1)}) \cdots (a_1^{(k)}, \dots, a_{r_k}^{(k)})$$

die normalisierte Zykeldarstellung von σ.

Beispiel 3.5. *Im folgenden die Permutationen der S_3 in normalisierter Zykelschreibweise. $S_3 = \{(1)(2)(3), (2\ 1)(3), (2)(3\ 1), (1)(3\ 2), (3\ 2\ 1), (3\ 1\ 2)\}$.*

Für die Formulierung des nächsten Satzes benötigen wir noch folgende Definition.

Definition 3.6. *Sei $\sigma = a_1 \cdots a_n \in S_n$ eine Permutation in S_n in Wortschreibweise. Wir sagen, a_i ist ein links-rechts Maximum, kurz LR-Maximum, falls $a_i > a_j$ für $1 \le j \le i-1$.*

Man beachte, daß für jede Permutation $\sigma = a_1 \cdots a_n$ die Stelle a_1 ein LR-Maximum darstellt.

Satz 3.7. *Die Abbildung $\phi : S_n \to S_n$, die eine Permutation $\sigma \in S_n$ in normali sierter Zykelschreibweise*

$$\sigma = (a_1^{(1)}, \dots, a_{r_1}^{(1)}) \cdots (a_1^{(k)}, \dots, a_{r_k}^{(k)})$$

auf

$$\phi(\sigma) := a_1^{(1)} \cdots a_{r_1}^{(1)} \cdots a_1^{(k)} \cdots a_{r_k}^{(k)}$$

in Wortschreibweise abbildet, ist eine Bijektion. Insbesondere bildet ϕ Permutationen mit k Zyklen auf Permutationen mit k LR-Maxima ab.

Proof. Da sich zwei verschiedene Permutation in mindestestens einer Position ihrer normalisierten Zykelschreibweise unterscheiden, ist die Abbildung ϕ injektiv. Als Abbildung vder endlichen Menge S_n nach S_n ist sie damit auch surjektiv, also bijektiv.

Sein un
$$\sigma = (a_1^{(1)}, \dots, a_{r_1}^{(1)}) \cdots (a_1^{(k)}, \dots, a_{r_k}^{(k)})$$
auf
$$\phi(\sigma) := a_1^{(1)} \cdots a_{r_1}^{(1)} \cdots a_1^{(k)} \cdots a_{r_k}^{(k)}$$
eine Permutation in S_n mit k Zyklen. Wegen $a_1^{(\ell)} > a_1^{(\ell-1)} > \cdots > a_1^{(1)}$ und $a_1^{(i)} > \cdots a_{r_i}^{(i)}$ ist $a_1^{(\ell)}$ sich einer LR-Maximum des Bildes von σ. Umgekehrt kann wegen $a_1^{(i)} > \cdots a_{r_i}^{(i)}$ auch kein $a_j^{(i)}$ mit $j \neq 1$ ein LR-Maximum sein. Also hat $\phi(\sigma)$ genausoviele LR-Maxima wie *sigma* Zykel hat, also k Stück. □

Beispiel 3.8. *Im Fall $n = 3$ bildet die Abbildung ϕ aus Satz 3.7 wie folgt ab:*
$$\begin{array}{ccc}
(1)(2)(3) & \mapsto & 1\ 2\ 3 \\
(2\ 1)(3) & \mapsto & 2\ 1\ 3 \\
(2)(3\ 1) & \mapsto & 2\ 3\ 1 \\
(1)(3\ 2) & \mapsto & 1\ 3\ 2 \\
(3\ 2\ 1) & \mapsto & 3\ 2\ 1 \\
(3\ 1\ 2) & \mapsto & 3\ 1\ 2
\end{array}$$
.

Definition 3.9. *Für $n \geq 1$ und $k \geq 0$ bezeichnet $c(n, k)$ die Anzahl der Permutationen $\sigma \in S_n$ mit k Zyklen. Wir setzen $c(0, 0) := 1$ und $c(0, k) := 0$ für $k \geq 1$.*

Satz 3.10. *Für $n, k \geq 1$ gilt:*
$$c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k).$$

Proof. Betrachten wir erst den Fall $n = 1$ und $k = 1$. Dann gibt es genau eine Permutation in der S_1 mit einem Zykel; also $c(1, 1) = 1$. Wegen $c(0, 0) = 1$ und $(0-1)c(0, 1) = 0$ folgt die Gleichung. Ist $n = 1$ und $k > 1$, si gilt $c(1, k) = 0$ und $c(0, k-1) = 0$. Wegen $(1-1)c(0, k) = 0$ folgt dann wiederum die Gleichung. Sei nun also $n \geq 2$. Betrachten wir die Position von n in der Zykel.Darstellung einer Permutation $\sigma \in S_n$ mit k Zyklen. Wir unterscheiden zwei Fälle. 1. Fall: n liegt in einem Zykel der Länge 1. In diesem Fall erhalten wir durch Streichen von n aus der Zykel-Darstellung eine Permutation in S_{n-1} mit $k-1$ Zyklen. Umgekehrt konstruieren wir aus eine Permutation in der S_{n-1} eine Permutation in der S_n. in der n in einem Zykel der Länge 1 steht einfach durch Hinzufügen des Zykel. Es gibt also $c(n-1, k-1)$ Permutationen in der S_n mit k Zyklen, in denen n in einem Zykel der Länge 1 steht. 2. Fall: n steht in einem Zykel der Länge ≥ 2. Wiederum erhalten wir durch Streichen von n eine Permutation in der S_{n-1} mit k Zyklen. Zu jeder Permutation in der S_{n-1} mit k Zyklen lassen sich aber $(n-1)$ Permutationen in der S_n mit k Zyklen konstruieren, da man n als Bild jeder der Zahlen in $[n-1]$ wählen kann. Es gibt als $(n-1)c(n-1, k)$ Permutationen in der S_n mit k Zyklen, wobei n in einem Zykel der Länge ≥ 2 steht. Damit folgt die Rekursion. □

Korollar 3.11. *Für $n \geq 0$ gilt:*
$$\prod_{l=1}^{n}(x + l - 1) = x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} c(n, k)x^k.$$

Proof. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach n.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt $\prod_{l=1}^{0}(x + l - 1) = 1$. Wegen $c(0, 0) = 1$ und $c(0, k) = 0$ für $k \geq 1$ gilt auch $\sum_{k=0}^{0} c(0, k)x^k = 1$.

Induktionsschluß : Sei nun $n \geq 1$ und

$$\prod_{l=1}^{n-1}(x + l - 1) = x(x + 1)\cdots(x + n - 1 - 1) = \sum_{k=0}^{n-1} c(n - 1, k)x^k.$$

$$\begin{aligned}
\prod_{l=1}^{n-1}(x + l - 1) &= (x + n - 1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} c(n - 1, k)x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} c(n - 1, k)x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(n - 1)c(n - 1, k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} c(n - 1, k - 1)x^k + \sum_{k=0}^{n}(n - 1)c(n - 1, k)x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}(c(n - 1, k - 1)x^k + (n - 1)c(n - 1, k))x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} c(n, k)x^k
\end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit aus Satz 3.10. □

Definition 3.12. *Für $m, n \geq 0$ setzen wir $s(m, n) := (-1)^{m-n}c(m, n)$. Die Zahlen $s(m, n)$ heißen die Stirling-Zahlen der 1. Art.*

Korollar 3.13. *Für $m, n \geq 0$ gilt:*

$$\prod_{l=1}^{m}(x - l + 1) = x(x - 1)\cdots(x - m + 1) = \sum_{n=0}^{m} s(m, n)x^n.$$

Proof. Nach Folgerung 3.11 gilt:

$$\prod_{l=1}^{m}(x + l - 1) = x(x + 1)\cdots(x + m - 1) = \sum_{n=0}^{m} c(m, n)x^n.$$

Betrachten wir die Gleichheit für $-x$, so erhalten wir:

$$\prod_{l=1}^{m}(-x + l - 1) = (-x)(-x + 1)\cdots(-x + m - 1) = \sum_{n=0}^{m} c(m, n)(-x)^n.$$

Nach Multiplikation mit $(-1)^n$ auf beiden Seiten erhalten wir:

$$\prod_{l=1}^{m}(x - l + 1) = x(x - 1)\cdots(x - m + 1) = \sum_{n=0}^{m}(-1)^(m - n)c(m, n)x^n.$$

Wegen $(-1)^(m - n)c(m, n) = s(m, n)$ folgt dann die Behauptung. □

Damit ergibt sich, daß die Stirling-Zahlen 1. und 2. Art die Basistransformationen von der Basis $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ und der Basis $\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), \dots\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}[x]$ vermitteln. Insbesondere sind die Matrizen $\mathfrak{S} := (S(m,n))_{m,n\geq 0}$ und $\mathfrak{s} = (s(m,n))_{m,n\geq 0}$ invers zueinander. Genauer, sind für alle $N \geq 0$ die Matrizen $\mathfrak{S}_N := (S(m,n))_{N\geq m,n\geq 0}$ und $\mathfrak{s}_N = (s(m,n))_{N\geq m,n\geq 0}$ invers zueinander.

Definition 3.14. *Eine Folge $\lambda := (\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k)$ von natürlichen Zahlen heißt Zahl-Partition der Zahl n, falls $1 \leq \lambda_1$ und $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. Die λ_i, $1 \leq i \leq k$, heißen die Teile von λ. Wir schreiben auch $\lambda \vdash n$, für λ ist eine Zahl-Partition von n. Für eine Zahl-Partition $\lambda := (\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k) \vdash n$ schreiben wir auch $\lambda = (1^{m_1}, \dots, n^{m_n})$, wobei $m_i = \#\{j \mid \lambda_j = i\}$. In dieser Notation werden i^{m_i} mit $m_i = 0$ oft weggelassen.*

Die folgende Bemerkung ergibt sich offensichtlich aus der Tatsache, daß jedes $i \in [n]$ in genau einem Zykel einer Permutation $\sigma \in S_n$ auftaucht.

Bemerkung 3.15. *Ist $\sigma = (a_1^{(1)}, \dots, a_{r_1}^{(1)}) \cdots (a_1^{(k)}, \dots, a_{r_k}^{(k)})$ die normalisierte Zykel-Darstellung der Permutation $\sigma \in S_n$, so gilt $r_1 + \dots + r_k = n$.*

Definition 3.16. *Sei $\sigma = (a_1^{(1)}, \dots, a_{r_1}^{(1)}) \cdots (a_1^{(k)}, \dots, a_{r_k}^{(k)})$ die normalisierte Zykel-Darstellung der Permutation $\sigma \in S_n$. Sei $\tau \in S_k$ so, daß $r_{\tau(1)} \leq r_{\tau(2)} \leq \dots \leq r_{\tau(k)}$. Dann heißt $(r_{\tau(1)} \leq r_{\tau(2)} \leq \dots \leq r_{\tau(k)}) \vdash n$ der Typ der Permutation σ.*

Satz 3.17. *Sei $\lambda = (1^{m_1}, \dots, , n^{m_n}) \vdash n$ eine Zahl-Partition von n, Dann gibt es*

$$z_\lambda = \frac{n!}{1^{m_1} m_1! \cdots n^{m_n} m_n!}$$

viele Permutation in S_n vom Typ λ.

Proof. Es gibt $\binom{n}{1}$ Möglichkeiten das Element des ersten Zykels der Länge 1 auszuwählen. Danach gibt es $\binom{n-1}{1}$ Möglichkeiten das Element des zweiten Zykels der Länge 1 auszuwählen, etc. Dann gibt es $\binom{n-1\cdot(m_1-1)}{1}$ Möglichkeiten das Element des m_1-ten Zykels der Länge 1 auszuwählen. Es gibt also

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} \cdot \binom{n-1\cdot(m_1-1)}{1} \cdots \binom{n-1\cdot(m_1-1)}{1} &= \\ \frac{n!}{1!(n-1)!} \frac{(n-1)!}{1!(n-2)!} \cdots \frac{(n-1\cdot m_1)!}{1!(n-m_1)!} &= \\ \frac{n!}{1!^{m_1}} \end{aligned}$$

Möglichkeiten die Elemente der Zykel der Länge 1 auszuwählen. Dabei unterscheiden wir aber die Reihenfolge der Zykel. Daher müssen wir noch durch $m_1!$ teilen.

Nun gibt es $\binom{n-1\cdot m_1}{2}$ Möglichkeiten die Elemente des ersten Zykels der Länge 2 auszuwählen, etc. Schließlich gibt es $\binom{n-1\cdot m_1 - 2\cdot(m_2-1)}{2}$ Möglichkeiten die Elemente des m_2-ten Zykels der Länge 2 auszuwählen.

Analog zum Fall der Zykel der Länge 1 erhalten wir $\frac{(n-m_1)!}{(2!)^{m_2}}$ Möglickeiten die Elemente der Zykel der Länge 2 auszuwählen. Wiederum wird bei dieser Zählung die Reihenfolge beachtet und wir müssen daher noch durch $m_2!$ teilen.

Gehen wir so weiter zu den Zyklen der Länge 3, 4, ..., erhalten wir für die Anzahl der Möglichkeiten die Elemente der Zykel der Länge i auszuwählen ohne die Reihenfolge der Zykel zu beachten:

$$\frac{(n - 1 \cdot m_1 - \cdots - (i-1)m_{i-1})!}{(i!)^{m_i} m_i!}.$$

Multiplizieren wir die Anzahlen von $i = 1, \ldots, n$ auf, so erhalten wir:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{(n - 1 \cdot m_1 - \cdots - (i-1)m_{i-1})!}{(i!)^{m_i} m_i!} = \frac{n!}{(1!)^{m_1} m_1! (2!)^{m_2} \cdots (n!)^{m_n} m_n!}$$

vielen Möglichkeiten die Elemente der Zykel so auszuwählen, dass wir genau m_i Zykel der Länge i erhalten.

Nun müssen wir uns noch überlegen, wieviele verschiedene Möglichkeiten es gibt auf einer i-elementigen Menge einen Zykel zu definieren. In der normalisierten Zykelschreibweise steht das größte Element immer am Anfang des Zykels. Die restlichen $i - 1$ Elemente folgen in beliebiger Reihenfolge, wobei jede Reihenfolge einen anderen Zykel definiert. Wir erhalten also $(i-1)!$ Möglichkeiten. Die Anzahl der Permutationen z_λ vom Typ λ erhalten wir also durch:

$$\begin{aligned} z_\lambda &= \frac{n!(1-1)!^{m_1}(2-1)!^{m_2} \cdots (n-1)!^{m_n}}{(1!)^{m_1} m_1! (2!)^{m_2} \cdots (n!)^{m_n} m_n!} \\ &= \frac{n!}{1^{m_1} m_1! 2^{m_2} 2! \cdots n^{m_n} m_n!}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.18. *Die Anzahl der Permutationen vom Typ* $(1 \leq 1 \leq 2) \vdash 4$ *in der* S_4 *is gegeben durch*

$$4!/(1^2 \cdot 2! \cdots 2^1 \cdot 1!) = 24/4 = 6.$$

Definition 3.19. *Ein* $i \in [n]$ *heißt Fixpunkt der Permutation* $\sigma \in S_n$*, falls* $\sigma(i) = i$.

Bemerkung 3.20.

(i) *Ein* $i \in [n]$ *ist Fixpunkt von* $\sigma \in S_n$ *genau dann, wenn* (i) *ein Zykel von* σ *ist.*

(ii) *Eine Permutation* $\sigma \in S_n$ *ist fixpunktfrei genau dann, wenn* σ *vom Typ* $(1^{m_1}, \ldots, n^{m_n}) \vdash n$ *mit* $m_1 = 0$ *ist.*

Im folgenden sind wir nun daran interessiert die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen in der S_n zu zählen.

Definition 3.21. *Mit* D_n *bezeichnen wir die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen in der* S_n.

Wir erhalten eine Formel für D_n, indem wir Satz 3.17 und Bemerkung 3.20 (ii) benutzen. D.h. wir summieren alle z_λ für Zahl-Partitionen $\lambda = (1^{m_1}, \ldots, n^{m_n}) \vdash n$ mit $m_1 = 0$ auf. Die so erhaltene Formel ist aber nicht sehr aussagekräftig. Wir gehen daher einen Umweg und beweisen zuerst das Prinzip der Inklusion-Exklusion.

Satz 3.22 (Inklusion-Exklusion)**.** *Seien* $A_1, \ldots, A_n$ *endliche Mengen. Dann gilt:*

$$\# \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \# \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Proof. Wir beweisen den Satz per Induktion nach n.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ vereinfachen sich beide Seiten zu $\#A_1$. Der Fall $n = 2$ besagt für zwei Mengen A_1 und A_2, daß

$$\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2 - \#(A_1 \cap A_2).$$

Letztere Aussage ergibt sich durch einfaches Abzählen bzw. ist schon aus der Schule bekannt.
Induktionsschluß : Sei $n \geq 3$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\#(A_1 \cup \cdots A_n) &= \#((A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n) \\
&= \#(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) + \#A_n + \#((A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n)
\end{aligned}$$

Hier benutzen wir die Induktionsvoraussetzung für $n = 2$. Nach Induktionsvoraussetzung für $n - 1$ erhalten wir:

$$\#(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n-1]}{k}} \# \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Wegen:

$$((A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n) = ((A_1 \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cap A_n))$$

liefert wiederum Induktionsvoraussetzung für $n - 1$:

$$\begin{aligned}
\#((A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n-1]}{k}} \# \bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{n \in I \in \binom{[n]}{k+1}} \# \bigcap_{i \in I} A_i \\
&= -\sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{n \in I \in \binom{[n]}{k}} \# \bigcap_{i \in I} A_i
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\#(A_1 \cup \cdots A_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n-1]}{k}} \# \bigcap_{i \in I} A_i + \#A_n \\
&\quad - \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{n \in I \in \binom{[n]}{k}} \# \bigcap_{i \in I} A_i \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \# \bigcap_{i \in I} A_i.
\end{aligned}$$

$\square$

Mit Hilfe von Satz 3.22 können wir nun eine *bessere* Formel für D_n aufstellen.

Satz 3.23. *Für $n \geq 1$ gilt:*

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k / k!.$$

Proof. Wir zählen zuerst die Menge der Permutationen in der S_n, die mindestens einen Fixpunkt haben. Klarerweise ist deren Anzahl $n! - D_n$. Wir wenden nun Satz 3.22 auf die Mengen

$$A_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$$

an. Nach Definition gilt, $\bigcup_{i=1}^n A_i$ ist die Menge der Permutationen in S_n mit mindestens einem Fixpunkt. Für ein $1 \leq k \leq n$ und ein $I \in \binom{[n]}{k}$ gilt:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i \text{ für alle } i \in I\}.$$

Damit folgt

$$\# \bigcap_{i \in I} A_i = (n - \# I)! = (n-k)!.$$

Wenden wir nun Satz 3.22 an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\# \bigcup_{i=1}^n A_i &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \# \bigcap_{i \in I} A_i \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! \\
&= n! \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Damit haben wir $n! - D_n$ berechnen. Wir erhalten also für D_n:

$$\begin{aligned}
D_n &= n! - n! \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} \\
&= n!(1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k!}) \\
&= n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

□

Korollar 3.24. *Es gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D_n}{n!} = e^{-1}.$$

Proof. Nach Satz 3.23 folgt:

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

Wegen $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{1}{k!}$ folgt die Behauptung. $\square$