Kapitel 9

WAHRSCHEINLICHKEITS-RÄUME

Fassung vom 12. Januar 2001

9.1 Stichproben-Raum.

Die bisher behandelten Beispiele von Naturvorgängen oder Experimenten waren deterministisch, d. h. bei gleicher (Versuchs-) Anordnung wird das Ergebnis reproduziert. Wir interessieren uns jetzt für die Klasse nicht deterministischer Experimente, die sogenannten zufälligen oder stochastischen Experimente, wie z.B. die Rekombination der Allele bei geschlechtlicher Vermehrung, das Auftreten von Mutationen, die Bestimmung der Blutgruppe von Notfallpatienten oder der Ergebnis eines Münzwurfs.

DEFINITION Die Menge aller (theoretisch) möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißt der *Stichprobenraum* oder *Ergebnisraum* Ω .

Ein Element $\omega \in \Omega$ heißt *Stichprobe* oder *Elementarereignis* .

Eine Teilmenge $A \subset \Omega$ nennt man *Ereignis* .

Ω heißt das *sichere Ereignis*, die leere Menge $\emptyset$ das *unmögliche Ereignis.*

Zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ heißen *disjunkt* , wenn A und B kein gemeinsames Element enthalten.

Ereignis werden häufig durch eine Eigenschaft A beschrieben wird. Diese Eigenschaft kann man mit der Menge

$$\{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ erfüllt } A\}$$

gleichsetzen.

Im Folgenden weden die einige mengentheoretischen Bezeichnungen verwendet:

$$A \cup B := \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ oder } \omega \in B \ ,$$

die *Vereinigung* A und B ,

$$A \cap B := \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ und } \omega \in B \ ,$$

der *Durchschnitt* von A und B ,

$$\bar{A} := \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A$$

das *Komplement* oder *Gegenereignis* von A , und wie bereits in den ersten Kapiteln benutzt

$$A \subset B \ :\Longleftrightarrow \ \text{jedes Element von } A \text{ ist auch Element von } B \ ,$$

A ist *Teilmenge* von B .

Zum Beispiel gilt also

$$A \text{ und } B \text{ sind disjunkt } \iff A \cap B = \emptyset \ .$$

BEISPIEL 1 (Der Würfel) Der Stichprobenraum ist

$$\{1,2,3,4,5,6\} \ .$$

Das Ereignis "der Wurf hat 3 oder mehr Augen" wird durch die Menge

$$A = \{3,4,5,6\}$$

dargestellt, das Gegenereignis ist

$$\bar{A} = \{1,2\} \ .$$

BEISPIEL 2 (Zusammenhang von Rauchen und Herzinfarkt) In einer Kartei verstorbener Patienten sind u.a. die Merkmale Raucher / Nicht-Raucher sowie Todesursache Herzinfarkt / Nicht-Herzinfarkt eingetragen. Man ist nur an den folgenden vier Ergebnissen interessiert, die die Zugehörigkeit zu einer der Gruppen beschreiben:

RH

Raucher und Todesursache Herzinfarkt.

$\bar{R}H$

Nicht-Raucher und Todesursache Herzinfarkt.

$R\bar{H}$

Raucher und Todesursache Nicht-Herzinfarkt.

$\bar{R}\bar{H}$

Nicht-Raucher und Todesursache Nicht-Herzinfarkt.

Der Stichprobenraum ist also

$$\left\{RH, \bar{R}H, R\bar{H}, \bar{R}\bar{H}\right\} \ .$$

BEISPIEL 3 Ein Genlocus sei durch die Allele G und g bestimmt, der Ergebnisraum Ω bei einer Paarung besteht aus den Genotypen GG, Gg, gg (Gg und gG sind biologisch nicht unterscheidbar), das Ereignis *homozygot* besteht aus $\{GG,\ gg\}$.

9.2 Wahrscheinlichkeit.

Gesucht ist ein Modell, das die Zufälligkeit beschreibt. Dies wird durch eine Funktion

$$P : \Omega \supset A \mapsto P(A)$$

beschrieben. Für jedes Ereignis A gibt die Zahl $P(A)$ an, wie wahrscheinlich das Eintreten von A ist. Experimentell kann man ein Modell für $P(A)$ erhalten, indem man n-mal das Experiment wiederholt. Ist $h_n(A)$ die Anzahl der Stichproben, in denen A eintritt, so nennt man

$$r_n(A) := \frac{h_n(A)}{n}$$

die *relative Häufigkeit* für A . Es muß dann

$$r_n(A) \simeq P(A) \qquad \text{für } n \text{ groß}$$

gelten. Dabei sind folgende Eigenschaften von P zu erwarten:

DEFINITION Ist $P : \Omega \supset A \mapsto P(A)$ eine Funktion mit

$$P(\Omega) = 1 ,$$

$$P(A) \geqslant 0 \qquad \text{für alle Ereignisse } A \subset \Omega$$

und

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad \text{für alle disjunkten Ereignisse } A, B \subset \Omega ,$$

so heißt Ω ein *Wahrscheinlichkeits-Raum* und $P(A)$ die *Wahrscheinlichkeit* für das Ereignis A .

SATZ ***Eigenschaften von*** P .

(i) *Ist* $A \subset B$ *, so gilt*

$$P(A) \leqslant P(B) .$$

Somit gilt

$$P(A) \in [0,1] \qquad \textit{für jedes Ereignis } A \subset \Omega .$$

(ii) *Für das Gegenereignis* $\bar{A}$ *von* A *gilt*

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) .$$

(iii) *Ist* $A = \{\omega_{1,}\omega_2, \cdots, \omega_n\}$ *, so ist*

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(\{\omega_j\}) .$$

BEMERKUNG **(1)** Wahrscheinlichkeiten werden oft in Prozent ausgedrückt.

(2) Ist Ω endlich, so genügt es nach (iii) die Zahlen

$$P(\omega) := P(\{\omega\}) \qquad \text{für } \omega \in \Omega$$

zu kennen.

BEISPIEL 1 (Unverfälschter Würfel) Es gilt

$$P(\omega) = \frac{1}{6} \qquad \text{für alle } \omega \in \{1,2,3,4,5,6\} \ .$$

Für $A = \{3,4,5,6\}$ ist also

$$P(A) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \simeq 0.66 \ .$$

BEISPIEL 2 (Rauchen und Herzinfarkt) Die Angaben (in %) werden in eine *Vierfeldertafel* zusammengefasst.

	R	$\bar{R}$	$\sum$
H	0.39	0.28	0.67
$\bar{H}$	44.61	54.72	99.33
$\sum$	45	55	100

Das Ereignis "Raucher" ist durch

$$R = \{RH, R\bar{H}\}$$

gegeben. Es ist

$$P(R) = P(RH) + P(R\bar{H}) = 0.39 + 44.61 = 45\% \ .$$

Diese Zahlen wurden Anfang 1960 erhoben.

Die kombinatorischen Formeln aus Kap. 1 lassen sich nun auch wahrscheinlichkeitstheoretisch deuten. Dazu

BEISPIEL 3 Sei Ω die Menge der ungeordneten $k-$Tupel, die aus n Objekten gebildet werden können. Nach Satz 1.8 ist die Anzahl der Elemente in Ω

$$\#(\Omega) = \binom{n}{k} \ ,$$

und es gibt $\binom{n-1}{k-1}$ $k-$Tupel, die ein festes Element $\omega \in \Omega$ enthalten. Bei zufälliger Auswahl eines $k-$Tupels hat das Ereignis A, ein $k-$Tupel mit dem Element ω auszuwählen, die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{Anzahl der } k-\text{Tupel, die } \omega \text{ enthalten}}{\text{Anzahl aller } k-\text{Tupel}} \\ &= \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{k! \cdot (n-k)!}{n!} \\ &= \frac{k}{n} \ . \end{aligned}$$

Man beachte die Fälle $k = 1$ und $k = n$.

9.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit.

BEISPIEL 1 In Beispiel 9.2.2 soll die Wahrscheinlichkeit für ein Infarkttod innerhalb der Gruppe der Raucher R berechnet werden. Der Stichprobenraum ist jetzt

$$R = \left\{RH, R\bar{H}\right\} \ .$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(RH)$ ist durch

$$\frac{P(RH)}{P(R)} = \frac{0.39}{45} = 8.67 \times 10^{-3}$$

zu ersetzen. Analog für Nichtraucher

$$\frac{P(\bar{R}H)}{P(\bar{R})} = \frac{0.28}{55} = 5.09 \times 10^{-3} \ .$$

Das Risiko für Raucher, an Herzinfarkt zu sterben, ist

$$\frac{8.67 \times 10^{-3}}{5.09 \times 10^{-3}} \simeq 1.7$$

mal größer als für Nichtraucher.

DEFINITION Ist $B \subset \Omega$ mit $P(B) > 0$, so heißt

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit für* A *unter* B .

Man beachte, daß in Beispiel 1 gilt

$$\{RH\} = R \cap H \ .$$

BEISPIEL 2 (Test für eine seltene Krankheit)

0.3 % der Bevölkerung habe die Krankheit,

99 % der Kranken (K) reagieren *positiv* (p) auf dem Test

und

2 % der Gesunden (G) reagieren *positiv* auf dem Test.

Der Stichprobenraum ist

$$\{Kp, Kn, Gp, Gn\} \ ,$$

wobei n eine *negative* Reaktion bezeichnet.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit : Es ist

$$K = \{Kp, Kn\} \quad \text{und} \quad G = \{Gp, Gn\} \ ,$$

also gilt

$$P(K) = 0.3\,\% \quad \text{und} \quad P(G) = P(\bar{K}) = 1 - P(K) = 99.7\,\% \ .$$

Weiter gilt

$$\frac{P(Kp)}{P(K)} = P(p \mid K) = 99\,\% \quad \text{und} \quad \frac{P(Gp)}{P(G)} = P(p \mid G) = 2\,\% \ ,$$

also

$$P(Kp) = 0.99 \cdot P(K) \quad \text{und} \quad P(Gp) = 0.02 \cdot P(G) \ .$$

Es ist

$$p = \{Kp, Gp\} \ ,$$

die Wahrscheinlichkeit, bei positivem Test krank zu sein, ist demnach

$$P(K \mid p) = \frac{P(Kp)}{P(p)} = \frac{P(Kp)}{P(Kp) + P(Gp)} = \frac{0.99 \cdot 0.003}{0.99 \cdot 0.003 + 0.02 \cdot 0.997} \simeq 0.13 \ ,$$

also nur 13 % .

Man kann in diesem Beispiel auch zunächst die Vierfeldertafel aufstellen. Diese Vorgehensweise ist manchmal übersichtlicher.

9.4 Unabhängigkeit.

DEFINITION Zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ heißen *unabhängig* , wenn die *Produktregel*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt.

Dies bedeutet, daß B kein Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit von A hat. In der Tat folgt sofort aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

SATZ *Ist $P(B) > 0$, so sind A und B genau dann unabhängig, wenn*

$$P(A) = P(A \mid B) \ .$$

BEISPIEL 1 Nach den Beispielen 9.2.2 und 9.3.1 ist $P(H) = 0.67\,\%$ und $P(H \mid R) = 0.87\,\%$. Die Ereignisse H und R sind also abhängig.

Der Unabhängigkeitsbegriff ist insbesondere wichtig bei *Mehrstufen-Experimenten* .

BEISPIEL 2 Man führe zuerst eine Testreihe für ein Medikament durch. Es ist *wirksam* (w) in 73 % , *ohne Wirkung* (o) in 25 % und gibt *allergische Reaktionen* (a) in 2 % der Fälle. Der Stichprobenraum ist

$$\Omega_1 = \{w, o, a\}$$

und es gilt

$$P(w) = 0.73 \quad , \quad P(o) = 0.25 \quad , \quad P(a) = 0.02 \ .$$

Man führt dann eine Testreihe für den Rhesusfaktor Rh_+ und Rh_- durch. Der Stichprobenraum ist

$$\Omega_2 = \{Rh_+, Rh_-\}$$

und es gilt

$$P(Rh_+) = 0.85 \quad , \quad P(Rh_-) = 0.15 \ .$$

Der Stichprobenraum Ω des zugehörigen Zweistufen-Experiments lässt sich dann durch einen *Baumdiagramm* dargestellen (s.u.) und man erhält

$$\Omega = \{w_+, w_-, o_+, o_-, a_+, a_-\} \ .$$

Falls der Rhesusfaktor ohne Einfluß auf die Wirkung dieses Medikaments ist, dann sind z.B. die Ereignisse

$$w = \{w_+, w_-\} \quad \text{und} \quad Rh_+ = \{w_+, o_+, a_+\}$$

unabhängig, und es folgt

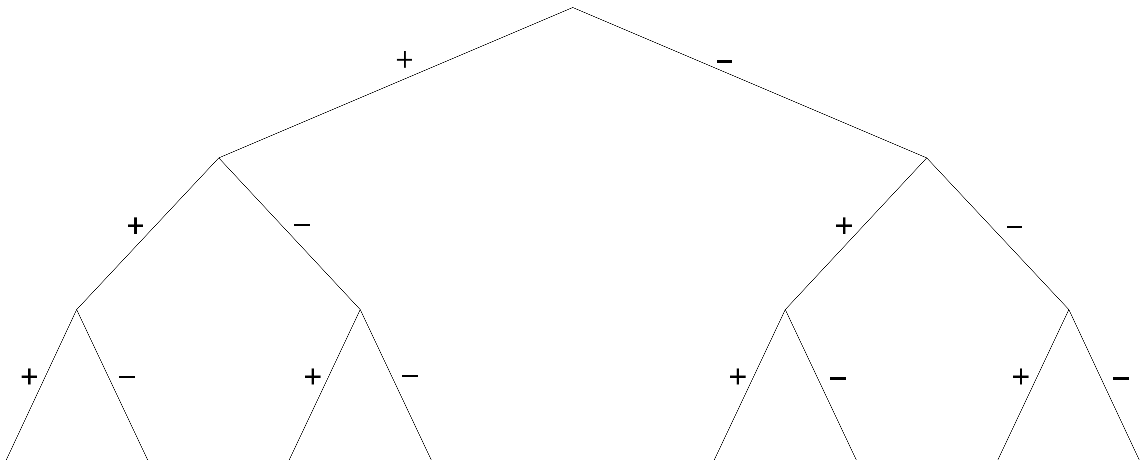
$$P(w_+) = P(w \cap Rh_+) = P(w) \cdot P(Rh_+) = 0.73 \cdot 0.85 = 0.62 \ .$$

In diesem Fall heißt Ω ein *unabhängiges Zweistufen-Experiment* . Die Produktregel wird auch als *Pfadregel* bezeichnet :

Bei einem unabhängigen Mehrstufen-Experiment ist die Wahrscheinlichkeit für ein, durch einen Pfad dargestelltes Elementarereignis das Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.

BEISPIEL 3 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 3 zufällig getesteten Personen alle Rh_- sind ? Dies lässt sich als Dreistufen-Experiment deuten, der Stichprobenraum Ω^3 besteht aus drei-Tupeln

$$\Omega^3 = \{+ + + - + + -, \; \dots \; , - - -\} \; .$$



Da $P(Rh_-) = 0.15$, folgt aus der Produktregel

$$P(- - -) = (0.15)^3 \simeq 0.0034 = 0.34\,\% \; .$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß 2 davon Rh_- sind ? Es ist

$$P(+ - -) + P(- + -) + P(- - +) = 3 \cdot 0.85 \cdot (0.15)^2 = 0.057 = 5.7\,\% \; .$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 1 davon Rh_- ist ? Das Gegenereignis ist : Alle sind Rh_+ . Es ist

$$P(+ + +) = (0.85)^3 = 0.614 \; ,$$

also

$$P\overline{(+ + +)} = 1 - P(+ + +) = 1 - 0.614 = 0.386 = 38.6\,\% \; .$$