Hinweise zum Abfassen von Abschlussarbeiten im Fach Mathematik

Thomas Bauer

29. Mai 2009

Vorbemerkung

Ich habe hier einige Hinweise zum Abfassen von Diplom- oder Staatsexamensarbeiten im Fach Mathematik und zur Verwendung von LaTeX zusammengestellt, die Ihnen beim Schreiben Ihrer Arbeit von Nutzen sein können. Gleichzeitig soll Ihnen der Text als Beispiel dafür dienen, wie Sie LaTeX in Ihrer Arbeit einsetzen können.[1] Schauen Sie daher bei Bedarf in den Quelltext, um zu sehen, wie bestimmte Konstrukte, z.B. die unten angesprochenen *Theorem-Umgebungen*, verwendet werden.

[1] Daher rührt auch die etwas gewollte Einteilung in Kapitel, die bei einem so kurzen Text natürlich unnötig ist.

Kapitel 1

Grundlegendes

Wir beginnen mit einigen Bemerkungen, die Ihnen zeigen sollen, wie mathematische Texte in Stil und Formatierung üblicherweise abgefasst werden. Dadurch dass Sie sich in Ihrer Arbeit an diese Empfehlungen halten, erhöhen Sie die Lesbarkeit des Texts – denn der erfahrene Leser findet den Text so vor, wie er es aus einer Vielzahl von mathematischen Texten bereits gewohnt ist und kann sich daher leichter orientieren.

1.1. Formeln im mathematischen Text

Sie können in LaTeX zwei Typen von Formeln setzen:

(1) *Formeln im laufenden Text*, wie etwa $y = \sin(x)$ oder $x^2 + y^2 = 1$. Diese bieten sich vor allem für kürzere Formeln an.

(2) *Abgesetzte Formeln*, wie etwa

$$f(x) = \int_a^x f'(t)dt \ ,$$

die zentriert in einer eigenen Zeile stehen.

Abgesetzte Formeln kommen in zwei Situationen zum Einsatz: Erstens bei Formeln, die mehr Platz beanspruchen als im laufenden Text zur Verfügung steht, zum Beispiel bei Matrizen wie

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon & \sigma \\ \iota & \lambda & \pi \end{pmatrix} \ ,$$

und zweitens bei Formeln, die aufgrund ihrer Bedeutung (zum Beispiel für den weiteren Gang der Argumentation) hervorgehoben werden sollen. Sie können in diesem Fall also eine Formel wie

$$\mathrm{Aut}(X) = \{\, 1 \,\} \tag{1.1}$$

durchaus absetzen, selbst wenn sie ohne weiteres im laufenden Text Platz finden würde. Dies gilt besonders, wenn Sie die Formel – wie hier geschehen – mit einer Nummer versehen möchten, um später auf sie verweisen zu können, etwa in der Form „Aus (1.1) folgt, dass ...“.

1.2. Definitionen, Sätze und Beweise

In mathematischen Texten ist es üblich, Textteile wie Definitionen, Sätze, Beweise, Folgerungen, Beispiele usw. als separate Absätze in speziellem Format zu setzen. Zum Beispiel:

Satz 1.2.1. *Sei X eine abelsche Varietät der Dimension n und sei L ein amples Geradenbündel auf X. Dann gilt:*
(a) $H^i(X, L) = 0$ *für* $i > 0$.
(b) *Das Linearsystem* $|L|$ *hat die Dimension* $L^n/n! - 1$.

Beweis. (a) Dies ist eine Konsequenz aus dem Verschwindungssatz von Kodaira (siehe [1, Abschnitt 1.2]), da das kanonische Bündel K_X trivial ist. Behauptung (b) folgt mit dem Satz von Riemann-Roch [3, Theorem 3.6.3] unter Verwendung von (a). □

In LaTeX wird Ihnen dies sehr erleichtert durch sogenannte *Theorem-Umgebungen*. Das Setzen der Abstände, die Wahl der Schriftarten und sogar die Nummerierung übernimmt dabei LaTeX für Sie. In der Quelldatei zu diesem Text sehen Sie, wie Sie dazu vorgehen. Dort ist auch eine *proof*-Umgebung definiert, durch die der obige Beweis die allgemein gebräuchliche Formatierung erhalten hat.

Falls Sie ein Ergebnis aus einer externen Quelle zitieren möchten, dann gehen Sie so vor:

Satz 1.2.2 ([3], Theorem 4.3.5)**.** *Sei L ein amples Geradenbündel auf einer abelschen Varietät. Dann ist das generische Element des Linearsystems $|L|$ reduziert.*

Die Verwendung von *Querverweisen* ist mit LaTeX besonders einfach: Sie können zum Beispiel im späteren Text an irgendeiner Stelle auf Satz 1.2.1 verweisen, ohne dass Ihnen die – von LaTeX vergebene – Nummer des Satzes bekannt ist. (Aus der Quelldatei können Sie ersehen, wie Sie dazu vorgehen.) Der große Vorteil hierbei ist, dass bei späteren Umstellungen innerhalb des Texts die Verweise automatisch auf den aktuellen Stand gebracht werden.

Übrigens: Während bei Sätzen und Korollaren der Text traditionell *kursiv* gedruckt wird, ist dies bei Definitionen, Beispielen, Bemerkungen u.ä. nicht üblich. Beispiel:

Definition 1.2.3. Ein Geradenbündel L auf einer algebraischen Varietät heißt *ampel*, falls eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert derart dass nL sehr ampel ist.

Sie sehen: Nur der definierte Begriff wird kursiv gesetzt.

Wie bereits oben gesagt, ist es von Vorteil, sich an solche Empfehlungen zu halten. Aus diesem Grund wird man im allgemeinen auch von der Verwendung extravaganter Schriftarten abraten. Verwenden Sie den vorliegenden Text als Beispiel für die heute übliche Formatierung und Typographie.

1.3. Zwei Hinweise zur mathematischen Prosa

Der erste Hinweis betrifft die Verwendung von logischen Symbolen wie etwa

$$\forall, \exists, \Rightarrow, \Leftrightarrow \quad .$$

Beim Tafelanschrieb in Vorlesungen und Seminaren werden diese gerne eingesetzt, um den mündlichen Vortrag kurz und prägnant zu dokumentieren. Sie könnten versucht sein, solche Symbole auch beim Niederschreiben Ihrer Arbeit zum Einsatz zu bringen. Widerstehen Sie dieser Versuchung! Während logische Symbole im Tafelanschrieb durchaus ihre Berechtigung haben, ist ihre Verwendung in gedruckten mathematischen Texten tatsächlich ganz und gar unüblich.

Beispiel: Wenn Sie über eine natürliche Zahl x die Aussage

$$\forall a \in \mathbb{N}: \; a|x \Rightarrow a = 1 \vee a = x$$

machen wollen, dann ist es besser zu schreiben:

> Für alle natürlichen Zahlen a gilt: Falls a ein Teiler von x ist, dann gilt $a = 1$ oder $a = x$.

Noch besser wäre es wohl, in dieser Situation einfach zu sagen:

> Die einzigen natürlichen Zahlen, die x teilen, sind 1 und x.

Neben stilistischen Gründen sind es vor allem die bessere Lesbarkeit und Verständlichkeit, die für die Verwendung der sprachlichen Formulierungen sprechen.

Tipp: Greifen Sie zu einem guten Mathematik-Buch Ihrer Wahl und nehmen Sie sich günstige Formulierungen daraus als Vorbild.

Der zweite Hinweis betrifft den sprachlichen Fluss des Texts. Auch hier unterscheiden sich Vorlesungsmanuskript (Tafelanschrieb) und gedruckter mathematischer Text: Während Vorlesungsmanuskripte häufig sprachlich unvollständig sind (zum Beispiel weil Satzfragmente durch Folgepfeile verbunden werden), bestehen gedruckte Texte immer aus vollständig formulierten Sätzen. Hierzu ein Beispiel:

> Wir erhalten für $|z| > r$ die Ungleichung
>
> $$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \le \frac{1}{Br^n} \; ,$$
>
> wobei B eine positive Konstante ist. Die Funktion $1/f$ ist also auf der Menge
>
> $$\{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| > r \,\}$$
>
> beschränkt. Da sie als stetige Funktion auf der kompakten Menge
>
> $$\{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r \,\}$$
>
> ebenfalls beschränkt ist, können wir mit dem Satz von Liouville schließen, dass $1/f$ konstant ist.

Eine Feinheit: Beachten Sie, dass nach abgesetzten Formeln immer Satzzeichen (wie Punkt oder Komma) folgen, wenn der Satzbau dies erfordert.

Kapitel 2

Feinheiten der mathematischen Prosa

2.1. Einige Merkregeln

In diesem Abschnitt sind einige weitere Regeln für das Verfassen mathematischer Texte zusammengestellt (vgl. [2]). Bedenken Sie dabei, dass das oberste Ziel bei der Abfassung Ihres Texts Verständlichkeit ist – *Sie schreiben, um verstanden zu werden.* Diesem Zweck dienen die nachfolgenden Regeln:

1. Trennen Sie aufeinanderfolgende Formeln durch Worte.
Schlecht: Da für $k = 1, \ldots, n$ f_n surjektiv ist, ...
Gut: Da für $k = 1, \ldots, n$ die Funktion f surjektiv ist, ...

2. Beginnen Sie Sätze nicht mit Symbolen.
Schlecht: $x^n - 1$ hat n Nullstellen.
Gut: Das Polynom $x^n - 1$ hat n Nullstellen.

3. Verwenden sie verbale Formulierungen anstelle einer Anhäufung von logischen Symbolen. (Sie kennen diese Regel bereits aus Abschnitt 1.3.)
Schlecht: $(\forall x \in X : x \geq x_0) \Rightarrow (\exists y \in Y : y < y_0)$
Gut: Falls für alle $x \in X$ die Ungleichung $x \geq x_0$ gilt, dann gibt es ein Element $y \in Y$ mit $y < y_0$.

4. Die Formulierung eines Satzes sollte in aller Regel aus sich heraus verständlich sein und nicht von Voraussetzungen abhängen, die im vorhergehenden Text (oder noch weiter entfernt) stehen.

5. Sie können Passiv-Formulierungen vermeiden, indem Sie Formulierungen mit „wir“ verwenden.
Schlecht: Nun kann der folgende Satz bewiesen werden.
Gut: Wir können nun den folgenden Satz beweisen.
Das Wort „wir“ ist diesem Zusammenhang als „Sie und ich“ zu verstehen, nicht als formelle Umschreibung von „ich“; stellen Sie sich dabei einen Dialog zwischen Autor und Leser vor. Es ist in wissenschaftlichen Texten üblich, nur dann „ich“ zu schreiben, wenn es in der Textstelle tatsächlich um die Person des Autors geht – was eher selten vorkommt.

6. Vermeiden Sie den „Übungsaufgaben-Stil“, in dem hauptsächlich eine Abfolge von Formeln – eventuell durch logische Symbole verknüpft – notiert werden. Verbinden Sie stattdessen die Formeln durch einen fortlaufenden Text. (Auch diese Regel kennen Sie bereits aus Abschnitt 1.3.)

7. Formulieren Sie komplizierte Definitionen oder Sachverhalte zweimal auf verschiedene Weise – zum Beispiel zunächst als Formel und dann nochmals in Worten. Ein gewisses Maß an Redundanz hilft dem Leser sehr beim Verstehen eines Texts.

8. Denken Sie daran, Definitionen oder Aussagen zu motivieren, bevor Sie sie formulieren. Fragen Sie sich dabei: Was weiß der Leser bis jetzt? Was erwartet er als nächstes?

9. Viele Leser werden beim ersten Lesen über längere, kompliziertere Formeln hinweggehen, um sich zunächst einen Überblick zu verschaffen. Ihr Text sollte daher auch dann in natürlicher Weise fließen, wenn solche Formeln beim Lesen durch „Bla“ ersetzt werden. Probieren Sie es aus!

10. Verwenden Sie für verschiedene Dinge nicht dieselbe Notation. Und umgekehrt: Verwenden Sie konsistente Notation für dieselben Dinge. Wenn Sie beispielsweise von Zahlen a_i *für* $1 \leq i \leq n$ sprechen, dann schreiben Sie an späterer Stelle nicht a_k *für* $1 \leq k \leq n$, außer es gibt einen speziellen Grund hierfür.

2.2. Wann ist ein Satz ein Satz?

Satz, *Proposition*, *Lemma*, *Korollar* – Sie kennen die klassischen Begriffe, die man zur Formulierung mathematischer Ergebnisse verwendet. Wo genau liegt der Unterschied zwischen ihnen?

Satz: ein Hauptergebnis, das von unabhängigem Interesse ist. Bedenken Sie, dass nicht alles, was bewiesen wird, gleich ein *Satz* ist. Für kleinere Ergebnisse kann man zur Unterscheidung den Begriff *Proposition* verwenden.

Proposition: ein nützliches Ergebnis von unabhängigem Interesse

Lemma: ein Ergebnis, das als Hilfsmittel für einen Satz oder eine Proposition benötigt wird, jedoch weniger von eigenständigem Interesse ist. Oft ist die Aussage eines Lemmas recht technischer Natur: Ohne die anvisierte Verwendung zu kennen, versteht man kaum die Bedeutung der Aussage.
(Manchmal haben Lemmata historisch dennoch eigenständige Bedeutung erlangt: Lemma von Gauß, Lemma von ...)

Korollar: eine unmittelbare Folgerung aus einem Satz oder einer Proposition, die keinen oder nur einen kurzen Beweis erfordert.

Kapitel 3

Weitere Hinweise

Ich möchte an dieser Stelle noch eine oft gestellte Frage beantworten, obwohl diese nicht im engeren Sinne das *Abfassen* einer Abschlussarbeit betrifft, sondern die Arbeit selbst.

3.1. Wie originell muss eine Staatsexamensarbeit sein?

Sie dürfen beruhigt sein: Niemand erwartet, dass Sie im Rahmen einer innerhalb von 12 Wochen erstellten Staatsexamensarbeit einen brandneuen, schweren Satz beweisen, der sich in einer angesehenen mathematischen Fachzeitschrift publizieren lässt.[1]

Andererseits gilt aber auch: Eine Zusammenstellung von mehr oder weniger wörtlich übernommenen Sätzen und Beweisen aus einer vorgegebenen Quelle – eventuell vom englischen ins deutsche übertragen – genügt sicherlich nicht. Vielmehr muss Ihre Arbeit zeigen, dass Sie sich mit dem Thema und mit den verfügbaren Quellen selbständig auseinandergesetzt haben – sie soll zeigen, dass Sie in der Lage sind, Gelesenes und eigenes Denken „zusammenzubringen“.

Ihre Eigenleistung kann dabei einen oder mehrere der folgenden Aspekte (oder auch andere) betreffen:

- Verallgemeinerung von in der Literatur verfügbaren Resultaten,
- Konstruktion von neuen Beispielen für bekannte Sachverhalte,
- ausführliche Darstellung („Ausarbeitung“) von in der Literatur nur knapp dargestellten Resultaten.

Für die Abfassung der Arbeit empfehle ich Ihnen:

- Zeigen Sie, dass Sie „informiert“ sind, d.h. mehr wissen, als aus einer einzigen (und vielleicht naheliegenden) Quelle ersichtlich ist: Verweisen Sie auf parallele oder verwandte Begriffe, Sätze und Resultate; nennen Sie Spezialfälle, geben Sie Querbezüge.
- Machen Sie deutlich, wo das „Highlight“ Ihrer Arbeit ist: Welches ist der Hauptsatz, welches das wesentliche neue Beispiel, wo liegt die neue Sicht der Dinge?

[1] Bei einer Diplomarbeit oder Masterarbeit ist die Ausgangslage sowohl hinsichtlich der Bearbeitungszeit als auch hinsichtlich des verfügbaren mathematischen Hintergrunds anders. Dementsprechend werden die Themen in der Regel einen aktuellen Forschungsbezug aufweisen und die Arbeit wird einen eigenständigen Forschungsanteil beinhalten. Selbstverständlich werden auch hier keine unrealistischen Anforderungen gestellt, etwa hinsichtlich der Publizierbarkeit der erzielten Resultate.

Literaturverzeichnis

[1] Griffiths, Ph., Harris, J.: Principles of algebraic geometry. John Wiley & Sons, New York, 1978

[2] Knuth, D.E., Larrabee, T., Roberts, P.M.: Mathematical Writing. Mathematical Association of America, 1989.
`http://tex.loria.fr/typographie/mathwriting.pdf`

[3] Lange, H., Birkenhake, C.: Complex Abelian Varieties. Springer, 1992.