Die Frobenius-Zerlegung auf algebraischen G-Mannigfaltigkeiten

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des akademischen Grades
d o c t o r   r e r u m   n a t u r a l i u m
(Dr. rer. nat.)
im Fach Mathematik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Humboldt-Universität zu Berlin

von
Dipl.-Phys. Ilka Agricola
geboren am 8.8.1973 in Den Haag

Der Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. Dr. hc. Hans Meyer

Der Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Prof. Dr. Bodo Krause

Erster Gutachter:
Zweiter Gutachter:
Dritter Gutachter:

Tag der mündlichen Prüfung:

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Betrachtet man eine kompakte Liesche Gruppe G mit der Linkstranslation auf sich selbst, so beschreibt die klassische Frobenius-Reziprozität die Zerlegung ihres Koordinatenrings in irreduzible endlich-dimensionale G-Darstellungen. Zudem ist die Algebra der G-invarianten Differentialoperatoren auf G isomorph zur universellen Einhüllenden ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und enthält geometrisch relevante Differentialoperatoren wie den Laplace-Operator der Mannigfaltigkeit G. Insgesamt ist diese Zerlegung die Grundlage für die harmonische Analysis auf Lieschen Gruppen und allgemeiner auf homogenen Räumen.

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung einer ähnlichen Situation. Auf Chevalley geht die Beobachtung zurück, daß den gängigen klassischen Lie-Gruppen auf natürliche Weise eine komplexe algebraische reduktive Gruppe zugeordnet werden kann. Deswegen macht es Sinn, die Fragestellung in eine der Algebra zugänglichen Sprache umzuformulieren. Wir möchten in dieser Arbeit von einer affinen komplexen Varietät M ausgehen, auf der eine ebenfalls komplexe reduktive algebraische Gruppe G wirke. Mittels Translationen operiert G dann auch auf dem Koordinatenring $\mathbf{C}[M]$

$$\varrho(g)f(m) \;=\; f(g^{-1}m) \text{ für } f \in \mathbf{C}[M],\; g \in G\,,$$

und es ist wohlbekannt, daß diese G-Wirkung lokal-endlich, d.h. daß jeder endlich-dimensionale Unterraum von $\mathbf{C}[M]$ in einem ebenso endlich-dimensionalen G-invarianten Teilraum von $\mathbf{C}[M]$ enthalten ist. Mit $\mathbf{C}[M]$ tragen auch dessen Endomorphismen eine Wirkung der Gruppe G, welche jedoch im allgemeinen nicht mehr die Eigenschaft hat, lokal-endlich zu sein. Stattdessen beschränkt man sich sinnvollerweise auf die Algebra $\mathcal{D}(M)$ der algebraischen Differentialoperatoren auf M, die in dem Fall, daß die zugrunde liegende Varietät glatt ist, eine einfache Algebra ist und aufgrund des von der Symbolabbildung induzierten Algebrenisomorphismus

$$\operatorname{gr}\mathcal{D}(M)^* \;\cong\; \mathbf{K}[T^*M]$$

mit der gewünschten lokalen Endlichkeitseigenschaft der G-Operation ausgestattet ist. Sei nun $B = HN$ eine Boreluntergruppe von G sowie $\widehat{G} = \{(V^\lambda,\, \pi_\lambda)\}$ die Menge aller Äquivalenzklassen endlich-dimensionaler Darstellungen von G, die wir stillschweigend den dominanten Gewichten $\lambda \in P_+(G)$ gleichsetzen werden. Das Analogon der klassischen Frobenius-Reziprozität ist der Isomorphismus zwischen den N-invarianten Funktionen vom Gewicht $\lambda \in \widehat{G}$ und den G-Morphismen von V^λ nach $\mathbf{C}[M]$,

$$\mathbf{C}[M]^N(\lambda) \;\cong\; \operatorname{Hom}_G(V^\lambda, \mathbf{C}[M]),$$

wie man durch Auswertung auf einem Vektor vom höchsten Gewicht λ leicht einsieht. Wir beweisen dann den

Satz ***(Frobenius-Zerlegung von $\mathbf{C}[M]$, Satz 5, § 1.2.1)***
Es sei G eine zusammenhängende komplexe algebraische reduktive Gruppe, die auf der glatten affinen irreduziblen Varietät M wirkt. Dann zerlegt sich der Koordinatenring von M als G-Modul in

$$\mathbf{C}[M] \;\cong\; \bigoplus_{\lambda \in P_+(G)} \operatorname{Hom}_G(V^\lambda, \mathbf{C}[M]) \otimes V^\lambda,$$

und es gilt:

(1) *Jeder Vielfachheitenraum $\operatorname{Hom}_G(V^\lambda, \mathbf{C}[M])$ ist ein irreduzibler $\mathcal{D}^G(M)$-Modul;*

(2) *Für $\lambda \neq \mu$ sind die Räume $\operatorname{Hom}_G(V^\lambda, \mathbf{C}[M])$ als $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln paarweise nicht isomorph;*

(3) *Die Räume* $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda, \mathbf{C}[M]) \cong \mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ *haben, aufgefaßt als* $\mathcal{D}^G(M)$*-Moduln, zentralen Charakter.*

Dabei liegt der Hauptaspekt nicht in der Zerlegung an sich, welche sich in vielen Lehrbüchern nachschlagen läßt, sondern in der Tatsache, daß die Vielfachheitenräume irreduzible Moduln unter der Wirkung der G-invarianten Differentialoperatoren $\mathcal{D}^G(M)$ sind, als solche paarweise nicht äquivalent sind und einen zentralen Charakter besitzen. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Resultats von N. Wallach (vgl. [Wal93, Prop.1.5], sowie die Darstellung in [GW97, Thm.4.5.12]), welches den Fall eines Vektorraums behandelt. Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß die Graduierung der Polynome und Differentialoperatoren mit polynomialen Koeffizienten nicht mehr gebraucht wird.

Eine erste Anwendung dieses Satzes ist das folgende Kriterium für vielfachheitenfreie Wirkungen.

Proposition (Vielfachheitenfreiheit und Differentialoperatoren, Prop. 5, § 1.2.2)
Die Wirkung einer zusammenhängenden komplexen algebraischen reduktiven Gruppe G auf einer glatten affinen G-Varietät M ist genau dann vielfachheitenfrei, wenn die Algebra der G-invarianten Differentialoperatoren $\mathcal{D}^G(M)$ kommutativ ist.

Dieser Sachverhalt war bereits in vielen Spezialfällen bekannt, etwa für Vektorräume oder für homogene Räume. Er ergänzt einige berühmte klassische Kriterien, wie etwa das von Vinberg-Kimel'feld [VK78], wonach die G-Wirkung genau dann vielfachheitenfrei ist, wenn die Borel-untergruppe B einen in M dicht liegenden Orbit hat.

Nach der Untersuchung der Vielfachheiten widmen wir uns dem genaueren Studium des nach Satz 5 existierenden zentralen Charakters von $\mathcal{D}^G(M)$. Für die eingangs beschriebene Situation der Linkswirkung einer Lie-Gruppe auf sich selbst besagt der Satz von Racah, daß das Zentrum der universellen Einhüllenden von G genau $\mathrm{rk}\, G$ erzeugende Elemente hat, und daß jede endlich-dimensionale G-Darstellung durch die Eigenwerte dieser Operatoren, der sog. Casimir-Operatoren von G, eindeutig bestimmt ist. Analog beweisen wir den

Satz (Eindeutigkeit der zentralen Charaktere, Satz 9, § 1.2.4)
Die Vielfachheitenräume $U_\lambda = \mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ sind, als $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln, eindeutig durch ihren zentralen Charakter bestimmt.

Weil nach einem Satz von F. Knop ([Kno94], hier zitiert als Satz 8, Abschn. 1.2.3) das Zentrum von $\mathcal{D}^G(M)$ ein Polynomring in $\mathrm{rk}\, M$ Erzeugenden ist, reichen also statt der Casimir-Operatoren bereits $\mathrm{rk}\, M$ zentrale Operatoren aus, um das Spektrum von M zu trennen.

In der Praxis entsteht die gegebene Situation oft durch Komplexifizierung einer reellen Gruppenwirkung. In Abschnitt 1.2.5 wird dargelegt, wie man die Frobenius-Zerlegung des Koordinatenrings einer reellen Form M_0 von M, ausgestattet mit der Wirkung einer reellen Form G_0 von G, aus der entsprechenden Zerlegung über $\mathbf{C}$ zurückgewinnt. Im Grundsatz ist dies unproblematisch, weil die reellen Formen in ihren jeweiligen Komplexifizierungen dicht liegen und die algebraischen Differentialoperatoren (im Gegensatz zu beliebigen Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten) sich mühelos von M_0 nach M fortsetzen lassen.

Das erste Kapitel schließt mit einigen Beispielen, die den Fall behandeln, daß die zugrunde liegende Varietät M nicht glatt ist. In diesem Fall greifen alle Beweise nicht mehr, und man muß sich entscheiden zwischen der Algebra $\mathcal{D}(M)$ aller Differentialoperatoren auf M oder der von den Derivationen erzeugten Unteralgebra $\mathcal{D}(M)^*$. Beispiele von Bernstein, Gelfand und Gelfand aus den frühen Siebziger Jahren belegen, daß $\mathcal{D}(M)$ ein gänzlich unkontrollierbares Objekt wird, so daß allgemeine Sätze hierfür nicht zu erwarten sind; doch stellen wir in Abschnitt 1.3.2 einige Beispiele vor, die beweisen, daß die vorangegangene Sätze für $\mathcal{D}(M)^*$ falsch werden.

Das (sehr kurze) zweite Kapitel untersucht die Momentabbildung $\psi : T^*M \to \mathfrak{g}^*$, welche vor allem in der symplektischen Geometrie ein viel verwendetes Hilfsmittel ist. Sie hat die Eigenschaft, G-äquivariant zu sein und läßt sich anhand der geschlossenen Formel

$$\psi : T^*M \to \mathfrak{g}^*, \quad T^*M \ni \alpha \longmapsto [\xi \longmapsto \alpha(\xi_{\pi(\alpha)})]$$

schreiben. Dabei ist mit π die kanonische Projektion $T^*M \to M$ gemeint und das Element ξ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit dem von ihm erzeugten Vektorfeld auf M identifiziert. Die Momentabbildung ψ ist die „kommutative" Variante der Operatordarstellung von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$: der Homomorphismus $\tilde{\psi} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{D}(M)$ liefert eine Abbildung auf den entsprechenden graduierten Ringen, welche wir ebenfalls $\tilde{\psi}$ nennen wollen,

$$\tilde{\psi} : \mathbf{C}[\mathfrak{g}^*] \longrightarrow \mathbf{C}[T^*M],$$

und die genau der Komorphismus der Momentabbildung ψ ist. Deswegen ist zu erwarten, daß die Momentabbildung beim Studium der G-invarianten Differentialoperatoren nützlich sein sollte. Weil die Momentabbildung G-äquivariant ist, kann man sie nach G faktorisieren und zum Morphismus $\psi_G : T^*M//G \to \mathfrak{g}^*//G$ auf den algebraischen Quotienten übergehen. Inspiriert von ähnlichen Untersuchungen von Benson und seinen Koautoren [BJLR97], die sich mit Gelfandpaaren in Heisenberg-Gruppen befassen, beweisen wir:

***Satz** (Geometr. Kriterium für vielfachheitenfreie Wirkungen, Satz 3, § 2.1.3)*
Die zusammenhängende komplexe algebraische Gruppe G wirkt genau dann auf der glatten irreduziblen affinen Varietät M vielfachheitenfrei, wenn der Quotient der Momentabbildung

$$\psi_G : \quad T^*M//G \longrightarrow \mathfrak{g}^*//G$$

eine endliche Abbildung ist, d.h. wenn $\mathbf{C}[T^*M]^G$ ein endlich erzeugter $\mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]^G$-Modul ist.

Aus den Standardeigenschaften endlicher Morphismen kann man nun schließen, daß die Abbildung $\psi_G : T^*M//G \longrightarrow \mathfrak{g}^*//G$ abgeschlossen ist und jedes $g \in \mathfrak{g}^*//G$ nur endlich viele Urbilder hat. Insbesondere ist die Momentabbildung ψ abgeschlossen auf den generischen G-Bahnen. Beispiele belegen, daß (im Gegensatz zu Gelfandpaaren) die Quotientenabbildung ψ_G jedoch keinesfalls bijektiv sein muß. Die Ergebnisse der beiden ersten Kapitel erscheinen demnächst in der Arbeit [Agr99].

Betrachte nun einen symmetrischen Raum G/K mit der Linkswirkung von K. Diese ist das globale Analogon der Isotropie-Darstellung von K auf $\mathfrak{p}$, für die Kostant und Rallis [KR71] eine präzise Beschreibung der Orbitgeometrie und der Frobenius-Zerlegung des Koordinatenringes ausgearbeitet haben. Sie beweisen, daß es endlich viele K-invariante Differentialoperatoren gibt derart, daß die Produktabbildung vom gemeinsamen Kern H dieser Operatoren und dem Invariantenring

$$H \otimes \mathbf{C}[\mathfrak{p}]^K \longrightarrow \mathbf{C}[\mathfrak{p}], \quad h \otimes f \longmapsto hf$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Im Jahre 1982 hatte R. W. Richardson die schöne Idee, die Serre-Vermutung und ihren Beweis durch Quillen und Suslin auf Wirkungen algebraischer Gruppen anzuwenden (vgl. [Ric81], [Ric82]). So zeigt er, daß auch für die K-Wirkung auf G/K ein Unterraum H existieren muß derart, daß die Produktabbildung

$$H \otimes \mathbf{C}[G/K]^K \longrightarrow \mathbf{C}[G/K], \quad h \otimes f \longmapsto hf$$

ein Isomorphismus ist, doch erlaubt ihm diese Beweistechnik nicht, einen solchen Unterraum zu konstruieren. Dieses Problem ist bis heute offen; insbesondere war bisher die Algebra der K-invarianten Differentialoperatoren auf G/K überhaupt nicht untersucht. Zunächst erläutert ein einfaches, aber verblüffendes Beispiel (Lemma 1, § 3.1.1), wie man nicht zu K-invarianten

Operatoren auf G/K kommt. Denn obwohl eine verfeinerte Version des Einschränkungssatzes von Chevalley bekanntlich die Gleichheit der algebraischen Quotienten

$$(G/K)/\!/\,K \;\cong\; A/W$$

etabliert (hierbei ist W die kleine Weylgruppe von G/K) und ein viel verwendetes Hilfsmittel ist, stellt sich heraus, daß auf Tori wirkende Spiegelungsgruppen im allgemeinen sehr wenige W-invariante Differentialoperatoren haben und deswegen – etwa durch Zurückziehen – bei der Konstruktion von K-invarianten Differentialoperatoren auf G/K nicht behilflich sein werden.

Wir beginnen sodann mit einem detaillierten Studium der K-invarianten Vektorfelder auf G/K. Diese lassen sich mit Hilfe der K-sphärischen G-Darstellungen, d.h. denjenigen, die einen K-invarianten Vektor haben, vollständig beschreiben. Es wird gezeigt, daß jede K-sphärische Darstellung $(V^\lambda, \varrho_\lambda)$ eine K-äquivariante Projektion

$$\Pi_\lambda : \quad V^\lambda \longrightarrow \mathfrak{p}$$

liefert. Ist nun $0 \neq v_\lambda$ in V^λ ein K-invarianter Vektor, dann wird durch

$$\Phi_\lambda : \quad G/K \longrightarrow \mathfrak{p}, \quad \Phi_\lambda(gK) \;:=\; \Pi_\lambda(\varrho_\lambda(g)v_\lambda)$$

eine K-äquivariante Abbildung definiert, die z. B. eK auf den Nullvektor schickt. Mit ihr kann man nun Invarianten, Vektoren mit einem höchsten Gewicht usw. von $\mathfrak{p}$ auf G/K zurückziehen.

Proposition **(*Vektorfelder aus K-sphärischen Darstellungen, Prop. 1, § 3.2.2*)**
Sei der irreduzible symmetrische Raum G/K mittels der Richardson-Einbettung $\psi : G/K \hookrightarrow P \subset G$ eingebettet in G, und V^λ eine irreduzible K-sphärische G-Darstellung vom höchsten Gewicht λ. Für $y \in P$ hat man eine Identifizierung der Tangentialräume

$$T_yP \;\cong\; \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(y^{-1})\theta(X) + X = 0\,\},$$

so daß durch

$$T_eP \;\longrightarrow\; T_yP, \quad \Phi_\lambda(gK) \;\longmapsto\; \Phi_\lambda(gK) + \mathrm{Ad}(y^{-1})\Phi_\lambda(gK)$$

ein Vektorfeld ξ_λ auf G/K definiert wird, welches zudem die Eigenschaft hat, K-invariant zu sein.

Das sich hierdran anschließende Lemma 3 zeigt, daß alle K-invarianten Vektorfelder dieser Gestalt sein müssen.

Wir untersuchen das Beispiel der adjungierten Wirkung einer halbeinfachen Gruppe G auf sich selbst, welches sich formal als ein symmetischer Raum beschreiben läßt, etwas näher. Ist Δ der Laplace-Operator auf $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ und ξ der Erzeuger der $\mathrm{Ad}\,\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$-invarianten Vektorfelder, so betrachte man den ebenfalls $\mathrm{Ad}\,\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$-invarianten Differentialoperator zweiter Ordnung

$$\tilde{D} \;:=\; -\mathrm{tr}\,(g)^3\Delta \;+\; 4\,\mathrm{tr}\,(g)\,\xi^2 \;+\; 2(\mathrm{tr}\,(g)^2 + 4)\,\xi\,.$$

Mit seiner Hilfe beweist man:

Satz **(*Harmonizität der adjungierten Wirkung auf* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$*, Satz 8, § 3.2.3*)**
Auf $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ existiert ein Differentialoperator $\tilde{D}$ derart, daß die adjungierte Wirkung von G hierauf harmonisch ist, genauer: sei $H = \ker \tilde{D}$. Dann ist die Produktabbildung

$$H \otimes \mathbf{C}[G]^{\mathrm{Ad}\,G} \longrightarrow \mathbf{C}[G], \quad h \otimes f \longmapsto hf$$

ein Isomorphismus.

Der Abschnitt endet mit einigen Betrachtungen über die praktische Berechnung invarianter Differentialoperatoren auf Vektorräumen. Am Beispiel der adjungierten Darstellung der $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$ auf ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(3,\mathbf{C})$ sowie der Wirkung der $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ auf den binären Formen vom Grad 4 wird erläutert, wie man sich hierfür moderne Computer-Programme dienbar machen kann.

Das letzte Kapitel schlägt die Brücke zur Analysis. Unabdingbar hierfür ist es, einen den funktionalanalytischen Methoden zugänglichen Hilbertraum ausfindig zu machen. Deswegen soll hier die folgende, bereits für sich genommen interessante Frage im Mittelpunkt stehen:

> Gegeben eine reelle affine Varietät M, gibt es einen kanonischen Hilbertraum, in dem der Koordinatenring von M dicht liegt ?

Dabei lassen wir uns leiten von der einfachsten aller reeller Varietäten, dem euklidischen $\mathbf{R}^n$. Für diesen ist bekannt, daß im Hilbertraum $L^2(\mathbf{R}^n, e^{-r^2}\mathrm{d}\mu)$, $r^2 := \|x\|^2$ alle Polynome enthalten sind und sie einen dichten, linearen Teilraum bilden, für den die Hermite-Polynome ein vollständiges wohlbekanntes Orthonormalsystem bilden. Entsprechend wollen wir den Hilbertraum $L^2(M, e^{-r^2}\mathrm{d}\mu)$ untersuchen, wobei $\mathrm{d}\mu$ nun das Oberflächenmaß von M ist.

Es stellt sich heraus, daß hierbei ein Sachverhalt entscheidend ist. Man benötigt die Algebraizität von M nämlich nur in Gestalt einer Kontrolle des Volumenwachstums von M, genauer, es wird benötigt, daß eine Konstante $C > 0$ existiert und eine natürliche Zahl $d \in \mathbf{N}$ derart, daß für das Volumen des Schnittes von M mit der Kugel B_r vom Radius r folgende Ungleichung gilt:

$$\mathrm{vol}_d(M \cap B_r) \;\leq\; C \cdot r^d\,.$$

Die Gültigkeit dieser Ungleichung für reelle affine Varietäten (mit $d = \dim M$) ist prinzipiell schon lange bekannt und beruht auf den Arbeiten von J. Milnor über die Betti-Zahlen reeller Varietäten aus den sechziger Jahren [Mil64], [Mil94] sowie das Croftonsche Verfahren zur Berechnung von Volumina.

***Satz** (Satz 4, § 4.1.3)*
Sei M eine glatte abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^n$, welche der oben genannten Volumenwachstumsbedingung genügt, und $\mathbf{R}[M]$ der Ring derjenigen Funktionen, die durch Einschränkung der Polynome in n Variablen auf M entstehen. Dann gilt:

(1) *Der lineare Teilraum $\mathbf{R}[M] \cdot e^{-r^2}$ liegt dicht in $\mathcal{C}^0_\infty(\hat{M})$;*

(2) *Der Ring $\mathbf{R}[M]$ liegt dicht in $L^2(M, e^{-r^2}\mathrm{d}\mu)$.*

Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind veröffentlicht in der gemeinsamen Arbeit mit Prof. Th. Friedrich [AF99].

1 Die algebraische Frobenius-Reziprozität

1.1 Kontext dieser Arbeit

Ausgangspunkt des Kontextes dieser Arbeit ist die auf Chevalley zurückgehende Beobachtung, daß den gängigen klassischen Lie-Gruppen auf natürliche Weise eine komplexe algebraische Gruppe zugeordnet werden kann. Dies werden wir verwenden, um mit algebraischen Mitteln kompakte Lie-Gruppen sowie solche nicht kompakten reellen Lie-Gruppen zu studieren, die eine endlich-dimensionale treue Darstellung besitzen.

Für unsere Zwecke ist es weiterhin notwendig, einen Übersetzungsmechanismus für Gruppenwirkungen zu haben. Für Lie-Gruppen sind die „richtigen“ Objekte i.a. differenzierbare Mannigfaltigkeiten, für algebraische Gruppen dagegen Varietäten. Da nicht jede differenzierbare Mannigfaltigkeit eine Varietät ist und umgekehrt, ist klar, daß hier eine Beschränkung auf eine hinreichend anständige Klasse von Objekten nötig ist: eine solchen bilden z.B. die glatten affinen Varietäten. Auf diesen hat man ein bevorzugte Klasse von Differentialoperatoren, die *algebraischen Differentialoperatoren*. Von besonderem Interesse sind hierbei natürlich diejenigen Differentialoperatoren, die mit der ursprünglichen Gruppenwirkung verträglich sind.

Dieser Abschnitt hat zum Ziel, alle benötigten Ergebnisse hierzu zusammenzustellen.

1.1.1 Reelle und komplexe Varietäten und Mannigfaltigkeiten

Völlig kanonisch läßt sich zu jeder reellen affinen Varietät $M_0 \subset \mathbf{R}^n$ deren Komplexifizierung $M_0(\mathbf{C}) =: M$ in $\mathbf{C}^n$ konstruieren als

$$M := \{x \in \mathbf{C}^n \mid f(x) = 0 \; \forall f \in \mathcal{I}(M_0)\},$$

wobei $\mathcal{I}(M_0)$ das Verschwindungsideal von M_0 bezeichne. Natürlich ist dann M_0 die Menge der reellen Punkte von M, also $M_0 = M \cap \mathbf{R}^n$, und die Zariski-Topologie auf M_0 stimmt überein mit der von der Zariski-Topologie von M induzierten Topologie. In diesem Fall gilt weiterhin $\mathcal{I}(M) = \mathbf{C} \otimes \mathcal{I}(M_0)$, woraus folgt, daß $\mathbf{R}[M_0]$ eine reelle Form von $\mathbf{C}[M]$ im Vektorraumsinne ist, d.h. jede Basis von $\mathbf{R}[M_0]$ über $\mathbf{R}$ ist gleichzeitig eine Basis von $\mathbf{C}[M]$ über $\mathbf{C}$. Im übrigen liegt M_0 dicht in M; weil eine affine Varietät genau dann irreduzibel ist, wenn ihr Abschluß es ist, folgt damit, daß M_0 genau dann irreduzibel ist, wenn M es ist. (vgl. [OV90, S.61-64]).

Eine *reelle Form* der komplexen affinen Varietät M soll nun eine reelle affine Varietät M_0 sein, deren Komplexifizierung $M_0(\mathbf{C})$ zu M isomorph ist. Eine solche existiert nicht immer und braucht im Existenzfall auch nicht eindeutig zu sein; ist M allerdings irreduzibel und enthält $M \cap \mathbf{R}^n$ mindestens einen glatten Punkt von M, dann ist die Menge M_0 aller Fixpunkte von M unter der komplexen Konjugation eine reelle Form von M (vgl. [OV90, Thm.6, S.93]).

Zusammenfassend gilt also: Ist M_0 eine reelle Form der komplexen affinen Varietät M, so existiert ein Vektorraum-Isomorphismus zwischen den komplexwertigen regulären Funktionen auf M_0 und den üblichen regulären Funktionen auf M

$$\mathbf{R}[M_0] \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \;\cong\; \mathbf{C}[M];$$

denn in die eine Richtung ist dies einfach die Einschränkung einer Funktion von M auf M_0; in der anderen Richtung impliziert die Dichtheit von M_0 in M, daß jede reguläre Funktion auf M_0 eine eindeutige reguläre Fortsetzung auf ganz M hat. Deswegen schreibt man oft $\mathbf{C}[M]$, wenn man $\mathbf{R}[M_0] \otimes \mathbf{C}$ meint. Diese Nachlässigkeit werden wir nicht übernehmen und stattdessen hierfür $\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}$ schreiben, da dieser Unterschied für die Gruppenwirkungen von Bedeutung ist. Klarerweise ist dieser Isomorphismus mit der Multiplikation von Funktionen verträglich, also insgesamt ein Algebren-Isomorphismus.

Gleichzeitig ist jede komplexe affine Varietät M eine reelle affine Varietät doppelter Dimension, geschrieben $M^{\mathbf{R}}$ und genannt die *Reellifizierung von* M, deren Koordinatenring von den Real- und Imaginärteilen der Koordinatenfunktionen von M erzeugt wird. Geht man auch hier wieder zu den komplexwertigen Funktionen über, so lassen sich diese besonders leicht beschreiben, da für sie

$$\mathbf{R}[M^{\mathbf{R}}]_{\mathbf{C}} \;=\; \mathbf{C}[f_1,\ldots,f_n,\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_n]$$

gilt, wenn $f_1,\ldots,f_n$ ein Erzeugendensystem von $\mathbf{C}[M]$ war. Auf diese Weise erhält man antiholomorphe Funktionen auf M, und $M^{\mathbf{R}}$ ist genau dann glatt, wenn M es war (vgl. [OV90, S.91-92]).

Acht zu geben ist nun beim Übergang zwischen reellen und algebraischen Strukturen darauf, in wieweit sich hierbei analytische und algebraische Eigenschaften wie Zusammenhang oder Irreduzibilität, Abgeschlossenheit etc. vererben, und Mehrdeutigkeiten wie zum Beispiel durch die Existenz mehrerer reeller Strukturen auftreten können. Hierfür wollen wir ab nun festlegen, daß durch die Präfixe „Z-“ bzw. „T-“ zwischen Zariski- bzw. topologischen (d.h. von der üblichen Topologie des $\mathbf{K}^n$ induzierten) Strukturen unterschieden wird (ohne Präfix ist immer letztere gemeint).

Beispiel 1. Singuläre Punkte verhalten sich bei Komplexifizierung sehr unanständig: das irreduzible Polynom $f = (x^2+y^2)^2 - z^3$ definiert sowohl eine reelle Varietät M_0 wie auch eine komplexe Varietät M, die per konstruktionem die Komplexifizierung $M_0(\mathbf{C})$ von M_0 ist; allerdings hat M_0 nur einen singulären Punkt, nämlich $(0,0,0)$, M dagegen z.B. auch $(1,i,0)$. Also entstehen die singulären Punkte von M nicht als die Komplexifizierung der singulären Punkte von M_0. Wohl aber werden wir gleich sehen, daß die singulären Punkte einer reellen Varietät genau die reellen Punkte des singulären Orts ihrer Komplexifizierung sind (all diese Untersuchungen finden sich in [Whi57]).

Das folgende Lemma stellt einen für die Praxis ausreichenden Begriffsrahmen für Mannigfaltigkeiten und Varietäten zusammen.

Lemma 1 (Untermannigfaltigkeiten und glatte affine Varietäten)
Jede d-dimensionale glatte affine Varietät $M \subset \mathbf{K}^n$ ist endliche Vereinigung disjunkter analytischer Untermannigfaltigkeiten, deren maximale Dimension genau d ist. Weiterhin ist dies genau die Zerlegung von M in irreduzible Komponenten [Whi57], [OV90, S.90-91].

Weil für glatte affine Varietäten Irreduzibilität und Z-Zusammenhang ($\mathbf{K}=\mathbf{R}$) bzw. T-Zusammenhang ($\mathbf{K}=\mathbf{C}$) äquivalent sind, folgt daraus insbesondere:

(1) *Jede d-dimensionale irreduzible glatte affine Varietät des $\mathbf{R}^n$ bzw. $\mathbf{C}^n$ ist eine d-dimensionale Z-zusammenhängende bzw. T-zusammenhängende, analytische, durch Polynome definierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^n$ bzw. $\mathbf{C}^n$ und umgekehrt.*

(2) *Die Komplexifizierung einer zusammenhängenden, glatten, durch Polynome definierten Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^n$ ist eine komplexe, irreduzible, glatte affine Varietät gleicher (komplexer) Dimension.*

□

1.1.2 Reelle und komplexe algebraische und Liesche Gruppen

Weil jede komplexe algebraische Gruppe als affine Varietät regulär ist, sind Untergruppen reeller oder komplexer algebraischer Gruppen immer auch Liesche Untergruppen (aber natürlich nicht umgekehrt). Als glatte komplexe Varietät ist eine komplexe algebraische Gruppe genau dann T-zusammenhängend, wenn sie irreduzibel ist; für reelle algebraische Gruppen gilt im allgemeinen nur die eine Richtung (z.B. ist $\mathrm{SO}(p,q)$ für $p,q>0$ irreduzibel, aber nicht T-zusammenhängend), außer bei kompakten reellen alg. Gruppen, für die man wieder die Äquivalenz hat (vgl. [OV90, S.100-101, 139, 251]).

Die Reellifizierung einer komplexen algebraischen Gruppe im oben beschriebenen Sinne komplexer algebraischer Varietäten liefert eine reelle algebraische Gruppe doppelter Dimension. Die auf diese Weise entstehenden Untergruppen der $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ sind also definiert über Gleichungen in den Matrixeinträgen und der inversen Determinanten sowie deren komplex-konjugierten Funktionen.

Eine reelle algebraische Gruppe G_0 soll *reelle Form* der komplexen algebraischen Gruppe G genannt werden, wenn die identische Einbettung $G_0 \hookrightarrow G$ sich zu einen Gruppenisomorphismus $G_0(\mathbf{C}) \cong G$ fortsetzen läßt. Eine reelle Form von G ist zum Beispiel jede beliebige Untergruppe G_0, die lediglich eine reelle Form von G im Sinne komplexer Varietäten ist, oder die Fixpunktmenge eines beliebigen involutiven antiholomorphen Automorphismus von G, sofern G irreduzibel war (vgl. [OV90, S.100-102]). Natürlich ist eine reelle Form von G insbesondere auch eine solche im Sinne der für komplexe Lie-Gruppen üblichen Definition, aber nicht umgekehrt. Weil reelle algebraische Gruppen im Gegensatz zu Lie-Gruppen die schöne Eigenschaft haben, sich immer injektiv als reelle Form in eine komplexe algebraische Gruppe einbetten zu lassen (vgl. [OV90, S.222-223]), reden wir oft auch von *der* (algebraischen) Komplexifizierung von G_0.

Der zuvor erwähnte Zusammenhang zwischen kompakte Lie-Gruppen und komplexen algebraischen reduktiven Gruppen wird dann präzisiert durch folgenden Satz:

Satz 1 (Kompakte Lie-Gruppen und alg. reduktive Gruppen [OV90, S.247])
Auf jeder reellen kompakten Lie-Gruppe G_0 existiert eine eindeutige reelle algebraische Gruppenstruktur und die Komplexifizierung G dieser reellen algebraischen Gruppe ist eine reduktive komplexe algebraische Gruppe. Zwei kompakte Lie-Gruppen sind isomorph (als Lie-Gruppen oder als reelle algebraische Gruppen) genau dann, wenn die entsprechenden komplexen reduktiven algebraischen Gruppen isomorph sind. □

Elegant ausgedrückt bedeutet dieser Satz, daß die Kategorien der kompakten Lie-Gruppen und der komplexen reduktiven algebraischen Gruppen äquivalent sind.

Es verbleibt, die Verbindung zwischen den gängigen Funktionenklassen einer kompakten Lie-Gruppe und ihrem Koordinatenring herzustellen. Ist $\mathcal{C}(G)$ der Ring der stetigen Funktionen auf der (Lieschen oder algebraischen) Gruppe G, so wirkt G hierauf mittels Links- oder Rechtstranslationen, und die folgende Definition ist sinnvoll.

Definition 1. Eine Funktion $f \in \mathcal{C}(G)$ heißt *Darstellungsfunktion* bzw. *Matrixfunktion* auf G oder auch *G-endlich*, wenn der minimale sie enthaltende G-invariante Unterraum von $\mathcal{C}(G)$ endliche Dimension hat.

Die Darstellungsfunktionen von G bilden eine $\mathbf{K}$-Unteralgebra von $\mathcal{C}(G)$, die im Fall $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ unter der komplexen Konjugation abgeschlossen ist. Es stellt sich nun heraus, daß sie mit dem Koordinatenring von G übereinstimmen.

Lemma 2 (Darstellungsfunktionen und Koordinatenring [OV90, S.251])
Sei G_0 eine kompakte Lie-Gruppe mit Komplexifizierung G. Dann gilt:

(1) $\mathbf{R}[G_0]$ *ist genau die Algebra der reellwertigen Darstellungsfunktionen von G_0;*

(2) $\mathbf{C}[G]$ *ist genau die Algebra der holomorphen Darstellungsfunktionen von G und die Restriktion von G nach G_0 liefert einen Algebren-Isomorphismus $\mathbf{C}[G] \to \mathbf{R}[G_0]_{\mathbf{C}}$ auf die komplexwertigen Darstellungsfunktionen von G_0.* □

Der klassische Satz von Peter-Weyl sagt nun aus:

Satz 2 (Satz von Peter-Weyl [BtD85, Thm.3.1, S.134])
Die komplexwertigen Darstellungsfunktionen $\mathbf{R}[G_0]_{\mathbf{C}}$ einer kompakten Lie-Gruppe G_0 liegen dicht in $\mathcal{C}(G_0)$ und in $L^2(G_0)$.

□

Es ist klar, daß das naive Analogon dieses Satzes für komplexe reduktive algebraische Gruppen nicht richtig sein kann, da der Koordinatenring keine antiholomorphen Funktionen enthält.

1.1.3 Gruppenwirkungen und deren Übertragung

Das Studium vieler auf natürliche Weise auftretenden Situationen fällt in das allgemeine Schema einer reduktiven Gruppe, die auf einer affinen Varietät wirkt. Als Beispiele seien genannt:

(1) $M = G$, also die Translationswirkung von G auf sich, und allgemeiner $M = G/K$ (mit K reduktiv) ein homogener Raum von G, auf dem G selbst oder eine Untergruppe von G wirkt (Satz von Matsushima und Onishchik, vgl. [PSV94, Thm. 4.17, S.194]);

(2) Einfache Untermannigfaltigkeiten, die nicht als homogene Räume entstehen, zum Beispiel Flächen 3. Ordnung;

(3) $M = V$ ein linearer G-Modul, also z.B. eine fundamentale Darstellung und Tensorpotenzen ($\to$ Invariantentheorie) hiervon, oder aber $V = \mathfrak{g}^*$, die duale Lie-Algebra von G ($\to$ Hamiltonsche Mechanik), in welchem Fall $\mathbf{K}[\mathfrak{g}^*]$ einfach die symmetrische Algebra von $\mathfrak{g}$ ist;

(4) $M = X/W$, X eine beliebige affine Varietät, auf der G wirkt, und W eine endliche Untergruppe von G: denn in einer solchen Situation existiert immer ein geometrischer Quotient von X (vgl. [Hum95, 3.3, S..42]);

(5) Der Totalraum von den unterschiedlichsten Bündeln, z.B. des Tangential- und das Kotangentialbündels, des Formenbündels, oder homogener Bündel.

Es sei bemerkt, daß die Geometrie reduktiver Gruppenwirkungen auf algebraisch projektiven Varietäten eine völlig andere ist. Prototyp hierfür sind die Fahnenvaritäten G/B, wenn B eine Boreluntergruppe von G ist; aber auch z.B. die Grassmann-Mannigfaltigkeiten fallen hierunter.

Definition 2. Eine (*reguläre*) Wirkung einer algebraischen Gruppe G auf der affinen Varietät M ist ein (algebraischer) Homomorphismus α von G in die Automorphismengruppe von M derart, daß die Abbildung

$$G \times M \longrightarrow M, \quad (g,x) \longmapsto \alpha(g)x$$

ein Morphismus algebraischer Varietäten ist. Ist M affin, so ist dadurch ein Komorphismus der Koordinatenringe

$$\alpha^* : \mathbf{K}[M] \longrightarrow \mathbf{K}[G] \otimes \mathbf{K}[M]$$

definiert und G wirkt mittels Translationen auf $\mathbf{K}[M]$

$$\varrho(g)f(m) \;=\; f(g^{-1}m) \text{ für } f \in \mathbf{K}[M],\ g \in G\,.$$

Wenn der Grundkörper, wie in den beiden folgenden Lemmata, nicht weiter präzisiert wird, so ist die Aussage für reelle und komplexe Gruppen und Varietäten gleichermaßen gültig, auch wenn der Beweis meist auf den algebraisch abgeschlossenen Fall zurückgreift.

Lemma 3 (Lokale G-Endlichkeit des Koordinatenrings [Bor91, Prop. p.54])
Die algebraische Gruppe G wirke auf der affinen Varietät M. Dann ist jeder endlich-dimensionale Unterraum F von $\mathbf{K}[M]$ in einem endlich-dimensionalen G-invarianten Teilraum von $\mathbf{K}[M]$ enthalten. $\square$

Damit ist der Koordinatenring $\mathbf{K}[M]$ induktiver Limes von endlich-dimensionalen G-invarianten Teilräumen, und wir werden diese Eigenschaft als *lokale G-Endlichkeit* oder kurz als *G-Endlichkeit* von $\mathbf{K}[M]$ bezeichnen.

Lemma 4 (Existenz äquivarianter Einbettungen [Bor91, Prop. p.56])
Die algebraische Gruppe G wirke auf der affinen Varietät M. Dann existieren ein endlichdimensionaler Vektorraum V, eine abgeschlossene Einbettung $\varphi: M \to V$ sowie ein Morphismus $\mu: G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ derart, daß $\varphi(g \cdot x) = \mu(g) \cdot \varphi(x)$ für alle $g \in G$ und $x \in M$ gilt.

□

Dieses Lemma illustriert einen häufig anzutreffenden Effekt: reguläre Wirkungen reduktiver (komplexer) Gruppen auf affinen Varietäten haben oft ähnliche Eigenschaften wie differenzierbare Wirkungen kompakter Lie-Gruppen auf kompakten Mannigfaltigkeiten, obwohl die Techniken sich unterscheiden und die Schwierigkeiten anders verteilt sind. Ein Hauptproblem in der algebraischen Theorie ist, daß Bahnen reduktiver Gruppen auf affinen Varietäten nicht notwendig abgeschlossen zu sein brauchen. Betrachtet man zum Beispiel die Jordan-Zerlegung einer komplexwertigen Matrix X in ihren halbeinfachen und ihren nilpotenten Anteil, $X = X_s + X_n$, so sind X und $X_s + tX_n$ für jedes $t \in \mathbf{C}^*$ ähnliche Matrizen, deswegen liegt X_s immer im Abschluß der Bahn durch X. Die Bahnen nicht halbeinfacher Matrizen sind also nicht abgeschlossen. Aus diesem Grunde hat man im allgemeinen keinen geometrischen Bahnenraum mit vernünftigen topologischen Eigenschaften. Die Algebra bietet jedoch einen Ausweg: den Begriff des *algebraischen Quotienten*. Die Grundidee hierbei ist einfach: wüßte man, daß die Algebra $\mathbf{K}[M]^G$ über $\mathbf{K}$ endlich erzeugt ist, so könnte man als Quotienten $M//G$ diejenige eindeutig bestimmte affine Varietät X definieren, die $\mathbf{K}[M]^G$ als Koordinatenring hat. Es stellt sich heraus, daß dies immer geht und der so konstruierte Quotient zufriedenstellende Eigenschaften hat (vgl. hierzu die Betrachtungen um Satz 6, S. 15).

Definition 3 (algebraischer Quotient). Sei M eine G-Varietät. Ein Morphismus $\pi: M \to X$ heißt *algebraischer Quotient* (von M bezüglich der Wirkung von G), wenn π einen Isomorphismus $\tilde{\pi}: \mathbf{C}[X] \xrightarrow{\cong} \mathbf{K}[M]^G$ induziert.

Proposition 1 (Eigenschaften algebraischer Quotienten [Kra85, II.3.2, S. 95])
Die komplexe algebraische reduktive Gruppe G wirke auf der affinen Varietät M. Dann ist $\mathbf{C}[M]^G$ eine endlich erzeugte Algebra, d.h. es existiert eine affine Varietät, geschrieben $M//G$, die $\mathbf{C}[M]^G$ als Koordinatenring hat und zudem die folgenden Eigenschaften besitzt:

(1) *Universelle Eigenschaft: Ist $\mu: M \to Y$ eine reguläre Abbildung, die konstant auf den G-Bahnen ist, so existiert genau eine reguläre Abbildung $\tilde{\mu}: M//G \to Y$ mit $\mu = \tilde{\mu} \circ \pi$:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mu"'] & M//G \arrow[d, "\tilde{\mu}\,!"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

(2) *G-Abgeschlossenheit: Sei N eine abgeschlossene G-stabile Teilmenge von M. Dann ist $\pi(N)$ abgeschlossen in $M//G$ und $\pi|_N: N \to \pi(N)$ ein algebraischer Quotient von N;*

(3) *Trennungseigenschaft: Sei $\{A_i\}$ eine Familie G-stabiler abgeschlossener Teilmengen in M. Dann gilt*
$$\pi(\cap A_i) = \cap \pi(A_i) ;$$

(4) *Jede Faser von π enthält genau einen abgeschlossenen Orbit, d.h. $M//G$ parametrisiert genau die abgeschlossenen Orbits von M.*

□

Die Wirkung einer reellen algebraischen Gruppe auf einer glatten affinen Varietät läßt sich problemlos komplexifizieren und ist wieder regulär. Mit Abschnitt 1.1.1 ergibt sich nun, daß die Menge der reellen Punkte der komplexifizierten Varietät eine reelle Form von ihr ist, weswegen die Wirkung dort ebenfalls regulär ist.

Definition 4. Sei (G, M) ein Paar bestehend aus einer komplexen algebraischen reduktiven zusammenhängenden Gruppe G, einer ebenfalls komplexen affinen glatten irreduziblen Varietät M, sowie einer regulären Wirkung von G auf M. Wir nennen ein Paar (G_0, M_0), bestehend aus einer reellen algebraischen Gruppe G_0 und einer affinen glatten reellen Varietät M_0, eine *reelle Form* von (G, M), wenn G bzw. M die Komplexifizierung von G_0 bzw. M_0 und die G-Wirkung auf M ebenfalls die Komplexifizierung der G_0-Wirkung auf M_0 ist.

Abschließend sei noch vermerkt, wie die komplexen regulären (endlich-dimensionalen) Darstellungen von G_0 und G sich im reduktiven Fall zueinander verhalten.

Lemma 5 (Komplexe Darstellungen reeller Formen reduktiver Gruppen)
Sei $G_0 \subset G$ eine irreduzible reduktive reelle algebraische Gruppe und zudem eine reelle Form der (ebenfalls irreduziblen und reduktiven) komplexen algebraischen Gruppe G.

Dann gibt es eine Bijektion zwischen den komplexen irreduziblen regulären Darstellungen von G_0 und denen von G, welche durch Restriktion bzw. eindeutige Fortsetzung gegeben ist.

Beweis. Sei (ϱ_0, V) eine (reguläre endlich-dimensionale) irreduzible Darstellung von G_0 auf dem komplexen Vektorraum V, also ein Morphismus $G_0 \to \mathrm{GL}(V)$. Wähle nun eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ von V. Dann lassen sich die Funktionen

$$m_{ij}: \quad G_0 \longrightarrow G, \quad \varrho_0(g) \;=\; \sum m_{ij}(g) e_i$$

als Elemente von $\mathbf{R}[G_0]_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}[G]|_{G_0}$ eindeutig auf ganz G fortsetzen, weil G_0 in G dicht liegt. Diese definieren somit eine Darstellung von G auf V, die klarerweise irreduzibel ist. Umgekehrt ist die Restriktion einer irreduziblen Darstellung (ϱ, V) von G auf G_0 natürlich wieder eine G_0-Darstellung; einzig nicht trivial an diesem Lemma ist folglich der Nachweis, daß diese Einschränkung irreduzibel ist, wofür wir auf eine Idee von Želobenko (vgl. [Žel73, Ch.VI, §42, Thm.2]) zurückgreifen wollen.

Sei $V_0 \neq \{0\}$ ein G_0-invarianter Unterraum von V. Angenommen, V_0 ist nicht G-invariant: wähle $g \in G$ und $v_0 \in V_0$ mit $\varrho(g)v_0 \notin V_0$. Sodann existiert ein lineares Funktional $f : V \to \mathbf{C}$ derart, daß $f|_{V_0} = 0$ und $f(\varrho(g)v_0) \neq 0$ gilt. Ein Dichtheitsargument zeigt, daß es ein solches nicht geben kann: denn ist $f : V \to \mathbf{C}$ ein beliebiges lineares Funktional, welches auf V_0 verschwindet, dann betrachte man zu jedem $v_0 \in V_0$ die – offensichtlich reguläre – Abbildung $f_{v_0} : G_0 \to \mathbf{C}$, $g_0 \mapsto f(\varrho(g_0)v_0) = 0$. Weil G_0 in G dicht ist, hat diese Abbildung nur die Nullabbildung als reguläre Fortsetzung auf ganz G; das heißt aber nichts anderes, als daß $f(\varrho(g)v_0) = 0$ ist für alle $g \in G$ und alle $v_0 \in V_0$, im Widerspruch zum weiter oben konstruierten Funktional. Also ist V_0 doch G-invariant, damit $V_0 = V$ und $(\varrho|_{G_0}, V)$ wie gewünscht G_0-irreduzibel. □

Insgesamt steht uns nun das volle Instrumentarium der Theorie algebraischer Gruppen als auch der analytische Apparat zur Beschreibung kompakter Lie-Gruppen zur Verfügung, zwischen denen wir deswegen je nach Bedarf und Situation hin- und herwechseln werden.

1.1.4 Die algebraischen Differentialoperatoren $\mathcal{D}(M)$

Zur Motivation betrachten wir $M \subset V \cong \mathbf{K}^m$ eine glatte affine Varietät. Dann ist M insbesondere eine analytische Mannigfaltigkeit, für die der Begriff des Differentialoperators aus der Analysis hinreichend bekannt und wohldefiniert ist. Allerdings ist klar, daß dieser für das Studium von M als affiner Varietät nicht geeignet ist, weil ein solcher im allgemeinen $\mathbf{K}[M]$ nicht auf sich abbilden wird. Wir benötigen eine kleinere Algebra von „algebraischen“ Differentialoperatoren, zu der es mehrere verschiedene Zugänge gibt: über den Grad als Differentialoperator, über die algebraischen Differentialoperatoren $\mathcal{D}(V)$ des umgebenden Vektorraums V, welche man einfach als die Differentialoperatoren mit polynomialen Koeffizienten definiert, über die Derivationen von M oder aber über die Symbolabbildung. Diese Definitionen gelten meist – entsprechend angepaßt – auch für Varietäten mit Singularitäten, doch liefern sie nur im glatten Fall alle dieselbe Algebra. Die verschiedenen Bilder wollen wir nun kurz skizzieren; für Beweise sei auf die ausführliche Beschreibung in dem Lehrbuch [MR87] verwiesen.

Sei zunächst M eine nicht notwendigerweise glatte, aber irreduzible reelle oder komplexe affine Varietät, und $\mathcal{A}$ entweder ihr Koordinatenring $\mathbf{K}[M]$ oder dessen Quotientenkörper $\mathbf{K}(M)$. Wir definieren die algebraischen Differentialoperatoren von $\mathcal{A}$ als diejenige filtrierte Algebra, die als die Vereinigung über k aller „Endomorphismen vom Grad $\leq k$“, also

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{A})_0 &:= \{T \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}) \mid \forall f \in \mathcal{A}:\ Tf - fT = 0\},\\ \mathcal{D}(\mathcal{A})_k &:= \{T \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}) \mid \forall f \in \mathcal{A}:\ Tf - fT \in \mathcal{D}(M)_{k-1}\},\end{aligned}$$

und

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{D}(\mathcal{A})_k\,. \tag{1}$$

Insbesondere sind die Endomorphismen vom Grad Null genau die Elemente von $\mathcal{A}$ und diejenigen vom Grad Eins deren Derivationen (vgl. [MR87, Lemma 15.5.3])

$$\mathcal{D}(\mathcal{A})_0 = \mathcal{A}, \quad \mathrm{Der}\,\mathcal{A} = \{D \in \mathcal{D}(\mathcal{A})_1 \mid D(1) = 0\}\,.$$

Dabei verstehen wir ganz allgemein unter den Derivationen $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ diejenigen $\mathbf{K}$-linearen Abbildungen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}$, die die Leibniz-Regel erfüllen. Für uns von Interesse ist die Klasse von Operatoren, die für $\mathcal{A} = \mathbf{K}[M]$ ensteht. Wir werden diese kurzerhand die *algebraischen Differentialoperatoren von M* nennen und vereinbaren die Bezeichnungen

$$\mathcal{D}(M) := \mathcal{D}(\mathbf{K}[M]), \quad \mathrm{Der}\,M := \mathrm{Der}\,\mathbf{K}[M]\,.$$

Der Fall $\mathcal{A} = \mathbf{K}(M)$ wurde hier nur deswegen gleich mitdefiniert, weil wir ihn später zur Formulierung eines Kriteriums brauchen, welches entscheidet, wann ein vorgegebener Differentialoperator algebraisch ist. Um nun zu begründen, warum es gerechtfertigt ist, die so definierten Operatoren „algebraisch“ zu nennen, zeigen wir, daß sie in folgendem Sinne von den Differentialoperatoren mit polynomialen Koeffizienten des umgebenden $\mathbf{K}^n$ induziert werden. Schreiben wir den Ring der regulären Funktionen über M als Quotienten

$$\mathbf{K}[M] \cong \mathbf{K}[V]/\mathcal{I}(M), \quad \mathbf{K}[V] \ni f \longmapsto [f] \in \mathbf{K}[M]\,,$$

$\mathcal{I}(M)$ das Verschwindungsideal von M, so ist klar, daß ein Endomorphismus T von $\mathbf{K}[V]$ dann und nur dann einen Endomorphismus $\tilde{T}$ von $\mathbf{K}[M]$ über die Gleichung $T[f] = [\tilde{T}f]$ definieren kann, wenn $T \cdot \mathcal{I}(M) \subset \mathcal{I}(M)$ gilt; insbesondere ist $\tilde{T} = 0$ äquivalent zu $T \cdot \mathbf{K}[V] \subset \mathcal{I}(M)$. Nun gilt (vgl. [MR87, Prop. 15.5.9])

$$\begin{aligned}V\left(\mathcal{D}(M)\right) &:= \{D \in \mathcal{D}(V) \mid D \cdot \mathcal{I}(M) \subset \mathcal{I}(M)\}\\ &= \{D \in \mathcal{D}(V) \mid D(\mathcal{I}(M) \cdot \mathcal{D}(V)) \subset \mathcal{I}(M) \cdot \mathcal{D}(V)\},\end{aligned}$$

sowie

$$\{D \in \mathcal{D}(V) \mid D \cdot \mathbf{K}[V] \subset \mathcal{I}(M)\} = \mathcal{I}(M) \cdot \mathcal{D}(V)\,,$$

womit man die Quotientendarstellung der algebraischen Differentialoperatoren von $\mathcal{D}(M)$, wie in Gleichung (1) definiert, gewinnt:

Lemma 6 (Erste Charakterisierung von $\mathcal{D}(M)$ [MR87, Thm. 15.5.13])
Für eine affine Varietät M ist die Algebra der algebraischen Differentialoperatoren isomorph zu dem Quotienten

$$\mathcal{D}(M) \;\cong\; V\left(\mathcal{D}(M)\right)/\mathcal{I}(M)\cdot\mathcal{D}(V)\,.$$

□

Um von einem konkret vorgegebenem Operator zu testen, ob er algebraisch ist, ist das folgende Kriterium nützlich.

Lemma 7 (Zweite Charakterisierung von $\mathcal{D}(M)$ [MR87, Thms. 15.1.24, 15.5.5])
Sei M eine affine irreduzible Varietät. Dann gilt:

(1) $\operatorname{Der} M = \{D \in \operatorname{Der}\mathbf{K}(M) \mid D(\mathbf{K}[M]) \subset \mathbf{K}[M]\}$;

(2) $\mathcal{D}(M) = \{D \in \mathcal{D}(\mathbf{K}(M)) \mid D(\mathbf{K}[M]) \subset \mathbf{K}[M]\}$.

□

Andererseits: sei $\mathcal{D}(M)^*$ die Algebra, die von $\mathbf{K}[M]$ und allen ihren Derivationen $\operatorname{Der} M$ erzeugt wird, filtriert nach der Anzahl Derivationen, deren Produkt man nimmt. Sie ist immer eine Unteralgebra von $\mathcal{D}(M)$, und ihre natürliche Graduierung stimmt mit der von $\mathcal{D}(M)$ induzierten überein. Weiterhin induziert die faserweise Skalarmultiplikation eine Graduierung auf dem Koordinatenring $\mathbf{K}[T^*M] = \bigoplus_n \mathbf{K}[T^*M]^n$ des Kotangentialbündels von M. Wie dies aus der Theorie der Differentialoperatoren über Mannigfaltigkeiten zu erwarten ist, stellt das Hauptsymbol eine Bijektion zwischen den genannten graduierten Ringen her, welche wir nun ebenfalls invariant definieren wollen. Sei hierzu $(m,\xi) \in T^*M$, und $g \in \mathbf{K}[M]$ eine Funktion mit $dg(m) = \xi$; eine solche existiert immer, denn die Injektion $i : M \to V$ liefert eine Surjektion

$$i^* : T^*_m V \longrightarrow T^*_m M,$$

man wähle also einfach ein $\xi' \in T^*_m V$ mit $i^*(\xi') = \xi$, bilde das lineare Polynom f auf V mit $df(m) = \xi'$, und setze $g = f|_M$. Das Hauptsymbol des algebraischen Differentialoperators D vom Grad k ist dann gegeben durch

$$\sigma_k(D)(m,\xi) \;=\; D\left((g - g(m))^k/k!\right)(m)\,.$$

Lemma 8 (Dritte Charakterisierung von $\mathcal{D}(M)$)
Sei M eine glatte irreduzible affine Varietät. Dann ist die Symbolabbildung ein Algebrenisomorphismus

$$\operatorname{gr}\mathcal{D}(M)^* \;\cong\; \mathbf{K}[T^*M]$$

und es gilt $\mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(M)^*$.

Beweis. Dies folgt aus der Exaktheit der Sequenz (vgl. [MR87, Prop. 15.4.9])

$$0 \;\longrightarrow\; \mathcal{D}(M)_{k-1} \;\longrightarrow\; \mathcal{D}(M)_k \;\xrightarrow{\sigma_k}\; \mathbf{K}[T^*M]^k \;\longrightarrow\; 0\,,$$

deren Beweis auf der Existenz einer geeigneten Globalisierung beruht. Mit einem analogen Argument beweist man die zweite Behauptung [MR87, Cor.15.5.6.]. □

Bemerkung 1. Falls die Varietät M singuläre Punkte hat, so stimmen die Algebren $\mathcal{D}(M)$ und $\mathcal{D}(M)^*$ im allgemeinen nicht überein, und es wird außerordentlich schwierig, über $\mathcal{D}(M)$ irgendwelche Aussagen zu machen. Beispiele hierzu werden wir ausführlich bei der Diskussion der Frobenius-Zerlegung für singuläre Varietäten behandeln.

Den ersten Schritt für das Studium der G-Wirkung auf den Differentialoperatoren von M bildet die nun folgende Proposition, die unabhängig von der Wahl des Grundkörpers gilt.

Proposition 2 (Einfachheit von $\mathcal{D}(M)^*$ [MR87, Thm. 15.3.8])
Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(1) *Die Varietät M ist glatt;*

(2) *Die Algebra $\mathcal{D}(M)^*$ ist einfach;*

(3) *$\mathbf{K}[M]$ ist ein irreduzibler $\mathcal{D}(M)^*$-Modul.*

□

Die Wirkung von G auf $\mathcal{D}(M)$ wird definiert via

$$g \cdot T \;=\; \varrho(g) T \varrho(g)^{-1} \quad \text{für } g \in G,\ T \in \mathcal{D}(M), \tag{2}$$

wobei ϱ die G-Translation auf $\mathbf{K}[M]$ bezeichnet. Bezüglich dieser Wirkung ist die Symbolabbildung G-äquivariant; somit ist die Wirkung von G auf $\mathcal{D}(M)$ wieder lokal G-endlich im Sinne von Lemma 3. Zum Beispiel definiert die Multiplikation mit jedem $f \in \mathbf{K}[M]$ einen Differentialoperator auf M. Die G-invarianten Differentialoperatoren werden mit $\mathcal{D}^G(M)$ bezeichnet und enthalten die G-invarianten Funktionen $\mathbf{K}[M]^G$.

Definition 5. Indem man jedem Element ξ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G das durch

$$\xi_*(m) \;=\; \frac{d}{dt}(e^{t\xi}m)|_{t=0}$$

definierte Vektorfeld zuordnet, bekommt man eine kanonische Abbildung

$$\tilde{\psi} :\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{D}(M)\,,$$

die wir die *Operatordarstellung* von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ nennen werden. Ein Differentialoperator ist genau dann G-invariant, wenn er mit allen fundamentalen Vektorfeldern ξ vertauscht; insbesondere definiert ein $Z \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ nur dann einen G-invarianten Differentialoperator, wenn Z im Zentrum von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ liegt.

Weil sowohl die Filtrierung nach dem Grad von $\mathcal{D}(M)$ als auch die Graduierung von $\mathbf{K}[T^*M]$ G-stabil sind und $\mathbf{K}[M]^G$ unter G lokal-endlich ist, gilt das Analogon von Lemma 8:

Lemma 9 (Charakterisierung von $\mathcal{D}^G(M)$)
Sei M eine glatte irreduzible affine Varietät, auf der die reduktive zusammenhängende algebraischen Gruppe G wirke. Dann ist

$$\operatorname{gr} \mathcal{D}^G(M) \;\cong\; \mathbf{K}[T^*M]^G\,.$$

□

Beispiel 2. Ist $M = G$ mit der linksregulären Wirkung von G auf sich selbst, so ist $T^*G \cong G \times \mathfrak{g}^*$, also $\mathbf{K}[T^*G] \cong \mathbf{K}[G] \otimes \mathbf{K}[\mathfrak{g}^*]$. Da es auf G keine nichttrivialen G-invarianten Funktionen gibt, andererseits alle Elemente aus der symmetrischen Algebra $\mathbf{K}[\mathfrak{g}^*]$ von $\mathfrak{g}$ unter G invariant sind, ist $\mathcal{D}^G(G) \cong \mathbf{K}[\mathfrak{g}^*]$; bekannterweise ist dies als Vektorraum isomorph zur universellen Einhüllenden $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, die uns als Algebra der G-invarianten Differentialoperatoren auf G wohlvertraut ist.

Andererseits weicht die Struktur von $\mathcal{D}(M)$ (oder $\mathcal{D}^G(M)$) im Detail doch sehr von der einer universellen Einhüllenden ab; denn wenn $\mathcal{D}(M)$ (bzw. $\mathcal{D}^G(M)$) als filtrierte Algebra zur einhüllenden Algebra einer Lie-Agebra $\mathfrak{k}$ isomorph ist, dann muß $\mathbf{K}[T^*M]$ (resp. $\mathbf{K}[T^*M]^G$) deren symmetrische Algebra $\mathbf{K}[\mathfrak{k}^*]$ sein, also auf jeden Fall ein Polynomring. Dies ist im allgemeinen sicher nicht der Fall, wenn M kein Vektorraum oder T^*M kein triviales Bündel ist.

Bemerkung 2. Für eine glatte reelle affine Varietät M_0 mit Komplexifizierung M folgt zusammen mit Absatz 1.1.1 aus der vorangehenden Beschreibung, daß $\mathcal{D}(M_0)\otimes\mathbf{C}\cong\mathcal{D}(M)$ (zunächst im Vektorraumsinne) gilt. In der Tat, ist $D_0\in\mathcal{D}(M_0)$ ein Differentialoperator auf M_0, so läßt sich eine Fortsetzung D von D_0 auf ganz M eindeutig definieren durch die Forderung, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "D_0"'] & \mathbf{C}[M] \arrow[d, "D"] \\ \mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}} \arrow[r, "\cong"] & \mathbf{C}[M] \end{tikzcd}$$

kommutieren möge, und es macht gleichzeitig klar, was unter der Einschränkung eines Operators $D\in\mathcal{D}(M)$ auf M_0 zu verstehen sei. Bezeichnen wir nun jedoch für einen Augenblick die Fortsetzung von $D_0\in\mathcal{D}(M_0)$ mit $[D_0]$, die von $f_0\in\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}$ mit $[f_0]$, so impliziert die Kommutativität, daß für eine beliebige Funktion $f_0\in\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}$ und Operatoren $D_0,\,D_0'\in\mathcal{D}(M_0)$ die Funktionen $[D_0D_0'][f_0]$ und $[D_0][D_0'][f_0]$ beide die Fortsetzung von $D_0D_0'f_0$, also gleich sind; somit gilt $[D_0][D_0'] = [D_0D_0']$ und die Fortsetzung / Einschränkung von Differentialoperatoren ist sogar ein Algebrenisomorphismus. Weil wir uns im Reellen meist für komplexwertige reguläre Funktionen interessieren, macht es Sinn, von nun an die entsprechenden Differentialoperatoren $\mathcal{D}(M_0)_{\mathbf{C}}$ zu schreiben. Dann folgt sofort, daß ein komplexer $\mathcal{D}(M_0)_{\mathbf{C}}$-Modul genau dann irreduzibel ist, wenn er als $\mathcal{D}(M)$-Modul irreduzibel ist.

Beim Studium der algebraischen Differentialoperatoren benötigt man immer wieder folgende, Dixmier zugeschriebene Variante des Schurschen Lemmas für Vektorräume abzählbarer Dimension.

Lemma 10 (Lemma von Dixmier)
Sei V ein C-Vektorraum abzählbarer Dimension.

(1) *Zu jedem $T\in\operatorname{End}(V)$ existiert ein $q\in\mathbf{C}$ so, daß $T-qI$ nicht invertierbar ist;*

(2) *Ist $\mathcal{A}$ eine Teilalgebra von $\operatorname{End}(V)$, die auf V irreduzibel wirkt, so ist $\operatorname{End}_{\mathcal{A}}(V) = \mathbf{C}$.*

Beweis. Die erste Behauptung findet sich in [Wal88, S.11]. Für die zweite sei $Z\in\operatorname{End}_{\mathcal{A}}(V)$ und $q\in\mathbf{C}$ derart, daß $Z-qI$ nicht invertierbar ist, d.h. es ist entweder $\ker(Z-qI)\neq\{0\}$ oder $\operatorname{im}(Z-qI)\neq V$. Weil aber Z mit allen Elementen aus $\mathcal{A}$ vertauscht, müssen $\ker(Z-qI)$ und $\operatorname{im}(Z-qI)$ beide $\mathcal{A}$-invariant sein; aus der Irreduzibilität von V folgt damit, daß entweder $\ker(Z-qI)=V$ oder $\operatorname{im}(Z-qI)=\{0\}$ sein muß. In beiden Fällen folgt $Z=qI$ auf ganz V. □

Beispiel 3. Sei V für eine komplexe algebraische Gruppe G ein G-Modul. Man sagt, daß V *zentralen Charakter* hat, wenn jedes Element z im Zentrum $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ der universelllen Einhüllenden von G skalar wirkt. Zum Beispiel haben die Verma-Moduln $M(\lambda)$ von G immer zentralen Charakter (vgl. [Dix96, 7.1.9]; dies wird dort aber *nicht* mit dem seinen Namen tragenden Lemma bewiesen, sondern über die Cartan-Weyl-Zerlegung von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$). Unter dem Harish-Chandra-Homomorphismus $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})\cong\mathbf{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ ist dann z.B. für die endlich-dimensionale G-Darstellung V^λ vom höchsten Gewicht λ der zentrale Charakter gleich $\lambda+\varrho$, wobei ϱ die Hälfte der positiven Wurzeln von G sei.

Definition 6. Aus dem Lemma von Dixmier folgt nun, daß für einen irreduziblen $\mathcal{A}$-Modul U, $\mathcal{A}$ wieder eine Unteralgebra von $\operatorname{End}(U)$, das Zentrum von $\mathcal{A}$ auf U skalar wirkt, genauer, es existiert ein Homomorphismus $\chi:\mathcal{Z}(\mathcal{A})\to\mathbf{C}$ mit

$$Z\cdot u \;=\; \chi(Z)\cdot u \quad \forall u\in U\,,$$

den wir in Analogie zu den soeben erwähnten Verma-Moduln den *zentralen Charakter* von $\mathcal{A}$ auf U nennen. Überhaupt wird sich im Laufe der Diskussion zeigen, daß die von uns betrachteten $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln U noch weitere analoge Eigenschaften der Verma-Moduln tragen, obwohl sie nicht auf diese Weise entstehen und die Beweise auch ganz anders verlaufen. Der Einfachheit halber werden wir das Zentrum von $\mathcal{D}^G(M)$ kurz Fortan bezeichne $\mathcal{Z}(M)$ schreiben.

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir im Fall $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ das Zusammenspiel der algebraischen Differentialoperatoren mit den Endomorphismen von $\mathbf{K}[M]$, als deren Teilalgebra sie definiert waren, noch präzisieren. Zusammen mit Proposition 2 folgt nämlich:

Proposition 3 (Schursches Lemma)
Ist M eine glatte irreduzible affine Varietät über $\mathbf{C}$, so gilt $\mathrm{End}_{\mathcal{D}(M)}(\mathbf{C}[M]) \;=\; \mathbf{C}$. □

Intuitiv bedeutet dies, daß $\mathcal{D}(M)$ von $\mathrm{End}(\mathbf{C}[M])$ nicht allzu sehr abweichen kann. Auch diese Aussage läßt sich mit einem allgemeinem Satz genauer fassen, den wir deswegen zuerst in der für uns relevanten Fassung zitieren wollen.

Satz 3 (Dichtheitssatz von Jacobson [Pie82, Thm, Ch.12, 2])
Sei L ein $\mathbf{C}$-Vektorraum abzählbarer Dimension und $\mathcal{A}$ eine Teilalgebra von $\mathrm{End}(L)$, die auf L irreduzibel wirkt. Sind $u_1, \ldots, u_n$ linear unabhängige Elemente und $v_1, \ldots, v_n$ beliebige Elemente von L, so existiert ein $T \in \mathcal{A}$ derart, daß $Tu_i = v_i$ für alle i gilt.
Das bedeutet: ist X ein endlich-dimensionaler Unterraum von V, so gilt

$$\mathcal{A}|_X \;=\; \mathrm{Hom}(X, L)\,.$$

Insbesondere gilt also mit Proposition 2, daß

$$\mathcal{D}(M)|_X \;=\; \mathrm{Hom}(X, \mathbf{C}[M])$$

für jede irreduzible glatte affine Varietät M ist. □

Definition 7. Unter einem *halbeinfachen G-Modul* wollen wir fortan implizit immer einen $\mathbf{C}$-Vektorraum abzählbarer Dimension verstehen, der unter G lokal-endlich und vollständig reduzibel ist. Das folgende Beispiel zeigt, daß die Eigenschaft, halbeinfacher G-Modul zu sein, sich i.a. nicht von L auf $\mathrm{End}(L)$ überträgt. Deswegen gilt unser Hauptaugenmerk solchen Unteralgebren $\mathcal{A}$ von $\mathrm{End}(L)$, die unter der induzierten G-Wirkung halbeinfach im eben genannten Sinne sind.

Beispiel 4. Wir wählen $L = \mathbf{C}[x]$ den Polynomring in einer Variablen mit der multiplikativen Wirkung von $\mathbf{C}^*$ im Argument. Auf L wird durch

$$1 \longmapsto 1, \quad x \longmapsto x^2, \quad x^2 \longmapsto x^3 + x^4, \ldots, \quad x^n \longmapsto x^{n+1} + \ldots + x^{2n}$$

eine lineare Abbildung T definiert, und x^n transformiert sich unter $T_\lambda := \varrho(\lambda)T\varrho(\lambda)^{-1}$ wie

$$T_\lambda x^n \;=\; \lambda x^{n+1} + \lambda^2 x^{n+2} + \ldots + \lambda^n x^{2n}, \quad n \neq 0\,.$$

Sei $\mathcal{B}$ die von den T_λ, $\lambda \in \mathbf{C}^*$, erzeugte Unteralgebra von $\mathrm{End}(L)$. Nach Konstruktion trägt sie die von $\mathbf{C}[x]$ induzierte $\mathbf{C}^*$-Wirkung, für die $\varrho(\lambda)T_\mu\varrho(\lambda)^{-1} = T_{\lambda\mu}$ gilt. Leicht sieht man ein, daß die T_λ linear unabhängig sind; also ist $\mathcal{B}$ unter der Wirkung von $\mathbf{C}^*$ nicht lokal-endlich.

Proposition 4
Sei G eine reduktive algebraische Gruppe, L ein halbeinfacher G-Modul, und $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $\mathrm{End}(L)$, die auf L irreduzibel wirkt und bezüglich der induzierten G-Wirkung auf $\mathcal{A}$

ebenfalls halbeinfach ist. Sei weiterhin X ein endlich-dimensionaler G-invarianter Unterraum von L. Dann gilt für die Algebra $\mathcal{A}^G$ der G-Invarianten von $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^G|_X \;=\; \mathrm{Hom}_G(X,L);$$

insbesondere ist also

$$\mathcal{D}^G(M)|_X \;=\; \mathrm{Hom}_G(X,\mathbf{C}[M])$$

für eine irreduzible glatte Varietät M.

Beweis. Sei $T \in \mathrm{Hom}_G(X,L)$. Nach Satz 3 existiert zunächst ein $D \in \mathcal{A}$ mit $D|_X = T$. Nach Voraussetzung liegt D in einem endlich-dimensionalen G-invarianten Unterraum E von $\mathcal{A}$. Wegen der Reduktivität von G zerfällt E in G-invariante Teilräume $E = E^G \oplus F$; weil T zudem G-invariant war, ist $T \in E^G|_X$, es muß also ein $\tilde{D} \in E^G \subset \mathcal{D}^G(M)$ mit $\tilde{D}|_X = T$ geben.

Für den Fall $L = \mathbf{C}[M]$ und $\mathcal{A} = \mathcal{D}(M)$ verbleibt deswegen bloß, die Voraussetzungen des Satzes zu überprüfen. Lemma 3 impliziert, daß $\mathbf{C}[M]$ und $\mathcal{D}(M)$ (aufgefaßt als $\mathbf{C}[T^*M]$) lokal-endlich bzgl. der Wirkung von G sind. Proposition 2 stellt sicher, daß $\mathcal{D}(M)$ auf $\mathbf{C}[M]$ irreduzibel wirkt. $\square$

Bemerkung 3. Der Name von Satz 3 rührt daher, daß man z.B. die zweite Aussage wie folgt umformulieren kann: $\mathcal{D}(M)$ liegt dicht in $\mathrm{End}(\mathbf{C}[M])$ bezüglich der *endlichen* Topologie auf $\mathrm{End}(\mathbf{C}[M])$, also derjenigen Topologie, die durch Wahl der offenen Mengen

$$N_\varphi(u_1,\ldots,u_n) \;=\; \{\psi \in \mathrm{End}(\mathbf{C}[M]) \mid \psi u_i = \varphi u_i \text{ für alle } i=1,\ldots,n\}$$

definiert wird (vgl. [Pie82, Ex. 2, Ch.12, 2]). Weiterhin zitieren wir ohne Beweis noch die beiden folgenden Eigenschaften von $\mathcal{D}(M)$, die dort ganz allgemein aus der Dichtheit geschlossen werden:

- Die Algebra $\mathcal{D}(M)$ ist *primitiv*, d.h. sie hat (mind.) eine treue irreduzible Darstellung, nämlich gerade die — nach Lemma 3 irreduzible – Wirkung auf $\mathbf{C}[M]$ (vgl. mit Korollar 1 für Betrachtungen zur Treue von $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln im allgemeinen);
- Das Jacobson-Radikal von $\mathcal{D}(M)$ (d.h. der Durchschnitt aller beidseitigen Ideale $\mathcal{I}$ derart, daß $\mathcal{D}(M)/\mathcal{I}$ eine einfache Algebra ist) ist trivial.

1.2 Die Frobenius-Zerlegung von $\mathbf{C}[M]$ und Folgerungen

1.2.1 Die Frobenius-Zerlegung über C

Für eine zusammenhängende komplexe reduktive alg. Gruppe G bezeichne $B = HN$ eine Boreluntergruppe (H eine Cartanuntergruppe, B eine maximale auflösbare alg. Untergruppe, N ein unipotentes Radikal von B) und $\widehat{G} = \{(V^\lambda, \pi_\lambda)\}$ die Menge aller Äquivalenzklassen endlich-dimensionaler Darstellungen von G, die wir stillschweigend den dominanten Gewichten $\lambda \in P_+(G)$ gleichsetzen werden. Ist $\mu \in P(G)$ ein beliebiges Gewicht von G, dann bezeichen wir den zugehörigen Charakter von H mit h^μ und erweitern ihn zu einem Charakter von B mittels $(hn)^\mu := h^\mu$ ($h \in H$, $n \in N$). Ist nun L ein halbeinfacher G-Modul abzählbarer Dimension (von dem wir immer stillschweigend voraussetzen wollen, er sei lokal-endlich bzgl. G), so werden die N-invarianten Vektoren vom Gewicht μ definiert als

$$L^N(\mu) \;=\; \{f \in L \mid \;\varrho(b)f \;=\; b^\mu f \quad \forall\, b \in B\}.$$

Wenn $\mu = \lambda$ dominant ist, sind diese isomorph (als Vektorraum) zu den G-invarianten Morphismen von V^λ, dem irreduziblen Modul zum höchsten Gewicht λ, nach L

$$L^N(\lambda) \;\cong\; \mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L),$$

wie man durch Auswertung auf einem Vektor vom höchsten Gewicht λ leicht einsieht (vgl. Beweis [GW97, Thm.12.1.3]). Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi_\lambda : \ \mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L) \otimes V^\lambda \longmapsto L, \quad \varphi_\lambda(T \otimes v) := T(v),$$

die die Eigenschaft hat, G-äquivariant zu sein, wenn man

$$g \cdot (T \otimes v) \ := \ T \otimes \pi_\lambda(g) v$$

setzt. Für eine Teilalgebra $\mathcal{A}$ von $\mathrm{End}(L)$ wird die Wirkung von $D \in \mathcal{A}$ auf $T \in \mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L)$ mittels Komposition definiert, $D(T) = D \circ T$, und diese Definition impliziert, daß $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L)$ auf jeden Fall $\mathcal{A}^G$-invariant ist; denn erfüllt T die Bedingung $T(\pi_\lambda(g)v) = \pi_\lambda(g)T(v)$, so folgt unmittelbar für ein $D \in \mathcal{A}^G$

$$(D \circ L)(\pi_\lambda(g)v) \ = \ D(L(\pi_\lambda(g)v)) \ = \ \pi_\lambda(g) D(L(v)) \ = \ \pi_\lambda(g)(D \circ L)(v)\,.$$

Die Menge

$$\mathcal{S}(L) \ := \ \{\lambda \in P_+(G) \mid L^N(\lambda) \neq 0\},$$

wird das *Spektrum* von G auf L genannt. Im Fall $L = \mathbf{C}[M]$ schreibt man der Kürze halber $\mathcal{S}(M)$ statt $\mathcal{S}(\mathbf{C}[M])$ und kann hierüber noch folgende Aussagen machen: weil unter der punktweisen Multiplikation von Funktionen

$$\mathbf{C}[M]^N(\lambda) \cdot \mathbf{C}[M]^N(\mu) \ \subset \ \mathbf{C}[M]^N(\lambda + \mu)$$

gilt, ist $\mathcal{S}(M)$ eine additive Halbgruppe, und als solche immer endlich erzeugt (vgl. Prop. 6, S. 17). Wir kommen nun zur Beschreibung der abstrakten Frobenius-Zerlegung.

Bemerkung 4. Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung eines Resultats von N. Wallach (vgl. [Wal93, Prop.1.5], sowie die Darstellung in [GW97, Thm.4.5.12]), welches den Fall eines Vektorraums behandelt. Der wesentliche Unterschied liegt in der Tatsache, daß die Graduierung der Polynome und Differentialoperatoren mit polynomialen Koeffizienten nicht mehr gebraucht wird. Eine Ankündigung dieses Ergebnisses ist zudem implizit und ohne Beweis in [Bie93, S.219] enthalten.

Satz 4 (Abstrakte Frobenius-Zerlegung)
Sei G eine zusammenhängende komplexe reduktive algebraische Gruppe, L ein halbeinfacher G-Modul, und $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $\mathrm{End}(L)$, die auf L irreduzibel wirkt und bezüglich der induzierten G-Wirkung ebenfalls halbeinfach ist. Dann zerfällt L als G-Modul in

$$L \ \cong \ \bigoplus_{\lambda \in P_+(G)} \mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L) \otimes V^\lambda,$$

und es gilt:

(1) $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L) \cong L^N(\lambda)$ *ist ein irreduzibler $\mathcal{A}^G$-Modul;*

(2) *Für $\lambda \neq \mu$ sind die $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L)$ als $\mathcal{A}^G$-Moduln paarweise nicht isomorph;*

(3) *Die Räume $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L) \cong L^N(\lambda)$ haben, aufgefaßt als $\mathcal{A}^G$-Moduln, zentralen Charakter.*

Satz 5 (Frobenius-Zerlegung von $\mathbf{C}[M]$)
Es sei G eine zusammenhängende komplexe algebraische reduktive Gruppe, die auf der glatten affinen irreduziblen Varietät M wirkt. Dann zerlegt sich der Koordinatenring von M als G-Modul in

$$\mathbf{C}[M] \ \cong \ \bigoplus_{\lambda \in P_+(G)} \mathrm{Hom}_G(V^\lambda, \mathbf{C}[M]) \otimes V^\lambda,$$

und es gilt:

(1) $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda, \mathbf{C}[M]) \cong \mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ *ist ein irreduzibler* $\mathcal{D}^G(M)$*-Modul;*

(2) *Für* $\lambda \neq \mu$ *sind die* $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda, \mathbf{C}[M])$ *als* $\mathcal{D}^G(M)$*-Moduln paarweise nicht isomorph;*

(3) *Die Räume* $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda, \mathbf{C}[M]) \cong \mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ *haben, aufgefaßt als* $\mathcal{D}^G(M)$*-Moduln, zentralen Charakter.*

Beweis. Die Zerlegung an sich ist ein Standard-Ergebnis und kann z.B. in [GW97, Thm.12.1.3] nachgelesen werden. Für die eigentlichen Behauptungen verfahren wir wie folgt:

(1) Sei X^λ ein zu V^λ isomorpher Unterraum von L sowie $\varphi \neq 0$ und ψ zwei G-Homomorphismen von X^λ nach L. Nach dem Dichtheitssatz von Jacobson (Satz 3 und Prop. 4) existiert Ein Operator $D \in \mathcal{A}^G$ mit $D\varphi = \psi$. Folglich erzeugt jedes Element von $\mathrm{Hom}_G(X^\lambda, L)$ diesen als $\mathcal{A}^G$-Modul, ist also irreduzibel.

(2) Es bezeichne L_λ bzw. L_μ die vollständige isotypische Komponente von L zum Gewicht λ bzw. $\mu \in \mathcal{S}(L)$, und U_λ bzw. U_μ einen zu $L^N(\lambda)$ bzw. $L^N(\mu)$ isomorphen $\mathcal{A}^G$-Modul darin. Angenommen, es existiert ein $\mathcal{A}^G$-Modul-Isomorphismus

$$Q : U_\lambda \longrightarrow U_\mu .$$

Nach 1. können wir ein $f \in L_\lambda$ wählen, welches U_λ erzeugt, also $\mathcal{A}^G \cdot f = U_\lambda$. Wir betrachten den minimalen G-invarianten Teilraum E von L, der f und Qf enthält. Die Projektion $\pi : E \mapsto L_\lambda$ vertauscht mit G, ist also ein Element von $\mathrm{Hom}_G(E, L)$; damit existiert ein G-invarianter Operator $D \in \mathcal{A}^G$, der π auf E darstellt, $D|_E = \pi$, und es ergibt sich

$$\pi Q f = DQf = QDf = Q\pi f = Qf ,$$

es ist also $Qf \in L_\lambda$, und damit $V^\lambda = V^\mu$, was mit der Gleichheit der Charaktere λ und μ gleichbedeutend ist.

(3) Die Existenz eines zentralen Charakters für die $\mathcal{A}^G$-Moduln $\mathrm{Hom}_G(V^\lambda, L)$, folgt nun sofort aus 1. und dem Lemma von Dixmier (Lemma 10), da sie – als $\mathcal{A}^G$-invariante Unterräume von L – von abzählbarer Dimension sind. □

Bemerkung 5. Im ersten Teil des Beweises wurde genauer gezeigt, daß die Vielfachheitenräume als $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln von jedem ihrer nicht verschwindenden Elemente erzeugt werden, also insbesondere endlich erzeugt sind.

Beispiel 5. Wir betrachten den klassischen Fall $M = G$, auf den sich der aller homogenen G-Räume reduzieren läßt. Sei V^π Darstellung von G und V^μ Darstellung einer Untergruppe H. Aus der Frobenius-Reziprozität für die induzierte bzw. eingeschränkte Darstellungen von μ und π

$$\mathrm{Hom}_G(V^\pi, \mathrm{Ind}\,{}^G_H(\mu)) = \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}\,{}^G_H(\pi), V^\mu)$$

folgt für die triviale Darstellung $\mu = \mathrm{id}$ von $H = \{e\}$

$$\mathrm{Hom}_G(V^\pi, \mathbf{C}[G]) = \mathrm{Hom}(V^\pi, \mathbf{C}) = V^{\pi *},$$

welches natürlich für alle $\pi \in P_+(G)$ nicht der Nullraum ist, es ist also $\mathcal{S}(G) = P_+(G)$. Bezeichnet man die positiven Wurzeln von G mit Φ^+, so ist wohlbekannt, daß die Weylgruppe von G ein eindeutiges Element w_0 mit der Eigenschaft $w_0\Phi^+ = -\Phi^+$ enthält, und daß das höchste Gewicht des zu V^λ dualen G-Moduls gleich $\lambda^* := -w_0\lambda$ ist. Man erhält also

$$\mathbf{C}[G] \cong \bigoplus_{\lambda \in P_+(G)} V^{\lambda^*} \otimes V^\lambda ,$$

wobei die V^{λ^*} irreduzible $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-Moduln mit zentralem Charakter $\lambda^* + \varrho$ sind. Dies ist das erste Beispiel einer Situation, wo wir in $\mathcal{D}^G(M)$ Operatoren finden können, die einen Teil der Kommutatorrelation von $\mathfrak{g}$ erfüllen (hier sogar alle), obwohl sie *nicht* den fundamentalen Vektorfeldern entsprechen (diese wären i.a. gar nicht G-invariant).

1.2.2 Untersuchung der Vielfachheiten

Die erste Frage, die sich für $L = \mathbf{C}[M]$ bei der Untersuchung der in der Frobenius-Zerlegung vorkommenden Vielfachheitenräume stellt, ist die nach ihrer Dimension. Ein erstes Resultat hierüber kann man aus dem folgenden Endlichkeitssatz schließen:

Satz 6 ([Kra85, Thm. II.3.2, S. 95; Eig. III.1.5.(3), S.167])
Ist G eine komplexe algebraische Gruppe mit Boreluntergruppe $B = HN$ und M eine affine G-Varietät, so gilt:

(1) *Der Invariantenring $\mathbf{C}[M]^G$ ist eine endlich erzeugte $\mathbf{C}$-Algebra und stimmt überein mit*

$$\mathbf{C}[M]^G \;=\; \mathbf{C}[M]^B \;=\; \mathbf{C}[M]^N(0)\,;$$

(2) *Für beliebiges $\lambda \in \mathcal{S}(M)$ ist $\mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ ein endlich erzeugter $\mathbf{C}[M]^G$-Modul.*

$\square$

Bemerkung 6. Daraus folgt, daß für irreduzibles M genau einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

(1) $\mathbf{C}[M]^G = \mathbf{C}$, besteht also nur aus den konstanten Funktionen: dann sind alle Vielfachheitenräume $\mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ endlich-dimensional und die triviale Darstellung hat Vielfachheit Eins;

(2) $\mathbf{C}[M]^G$ enthält mindestens ein nicht-konstantes erzeugendes Element: dann sind alle Vielfachheitenräume $\mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ unendlich-dimensional.

Gemischt endlich- und unendlich-dimensionale Vielfachheitenräume können demnach nicht vorkommen. Zur ersten Situation gehören klarerweise alle affinen Varietäten, die einen dichten G-Orbit enthalten, welche wegen ihrer ausgezeichneten Rolle in der Invariantentheorie *quasihomogene* Varietäten genannt werden. Eine allgemeine Klassifizierung dieser Varietäten ist außer Reichweite.

Eine andere Situation, die endliche Vielfachheiten erzwingt, ist die, wenn die Gruppe der Gestalt $G \times \mathbf{C}^*$ ist (mit G reduktiv). Denn dann ist der Koordinatenring von M graduiert, und seine isotypische Zerlegung bezüglich G ist mit der Graduierung verträglich:

$$\mathbf{C}[M] \;\cong\; \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} \;\bigoplus_{\lambda\in P_+(G)} \mathbf{C}[M]^n_\lambda\,,$$

wobei der obere Index die Graduierung meint, der untere die – nicht weiter präzisierte – isotypische Komponente bzgl. des höchsten Gewichtes λ von G darin. Als $G \times \mathbf{C}^*$-Moduln sind diese Summanden alle nicht äquivalent und, da bereits jedes $\mathbf{C}[M]^n$ für sich betrachtet endlich-dimensional ist, auf jeden Fall wieder endlich-dimensional.

Diesem Beispiel sieht man sofort an, wie es zu verallgemeinern ist:

> Gibt es eine Teilmenge $\tilde{M} \subset M$ derart, daß $\tilde{M}/G$ komplex kompakt (also z.B. algebraisch projektiv) ist und weiterhin $G \cdot \tilde{M}$ dicht in M liegt, dann ist bereits $\mathbf{C}[M]^G = \mathbf{C}$.

Ein intensiv studierter Spezialfall ist der, wo alle Vielfachheiten gleich Eins sind (M wird dann *sphärisch* genannt), und man hat elegante Kriterien um zu testen, ob dieser Fall vorliegt:

Satz 7 (Vielfachheitenfreie Wirkungen)
Ist G eine zusammenhängende komplexe algebraische reduktive Gruppe mit Boreluntergruppe $B = HN$ und M eine affine G-Varietät, so sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $\mathbf{C}[M]$ *ist vielfachheitenfrei, d.h.* $\dim \mathbf{C}[M]^N(\lambda) = 1$ *für alle* $\lambda \in \mathcal{S}(M)$;

(2) *B hat einen offenen Orbit in M;*

(3) *Jede rationale B-invariante Funktion auf M ist konstant:* $\mathbf{C}(M)^B = \mathbf{C}$.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ist Satz 2 aus der klassischen Arbeit von Vinberg-Kimel'fel'd [VK78]; man kann die Gleichwertigkeit der drei Bedingungen aber auch in [Kra85, Satz 1, III.3.6, S.199] nachlesen. □

Proposition 5 (Glatte vielfachheitenfreie Wirkung und Differentialoperatoren)
Die Wirkung einer zusammenhängenden komplexen algebraischen reduktiven Gruppe G auf einer glatten affinen G-Varietät M ist genau dann vielfachheitenfrei, wenn die Algebra der G-invarianten Differentialoperatoren $\mathcal{D}^G(M)$ kommutativ ist.

Dies folgt sofort aus der Tatsache, daß der Vielfachheitenraum ein irreduzibler $\mathcal{D}^G(M)$-Modul ist: ist $\mathcal{D}^G(M)$ abelsch, dann kann es nur eindimensionale irreduzible Darstellungen geben. Sind andererseits alle Vielfachheiten gleich Eins, dann muß ein beliebiges $D \in \mathcal{D}^G(M)$ mittels Skalarmultiplikation auf den einzelnen Summanden der Zerlegung wirken, und zwei solche kommutieren natürlich. □

Bemerkung 7. Dieser Sachverhalt war bereits in vielen Spezialfällen bekannt, etwa für Vektorräume oder für homogene Räume. Im singulären Fall hängt die Antwort davon ab, ob man $\mathcal{D}(M)$ oder $\mathcal{D}(M)^*$ betrachtet; allgemeine Aussagen lassen sich hier nicht beweisen, doch stellen wir in Abschnitt 1.3.2 einige Beispiele vor, die beweisen, daß die vorangegangene Behauptung für $\mathcal{D}(M)^*$ falsch ist.

Bemerkung 8. Für den hier beschriebenen Fall gibt es sehr viele Klassifikationsergebnisse, zum Beispiel:

- M. Krämer [Krä79]: alle Paare $K \subset G$, K reduktiv, G zusammenhängend und einfach, für die $M = G/K$ vielfachheitenfrei ist;
- B. N. Kimel'fel'd [VK78]: alle zusammenhängenden einfachen Untergruppen $G \subset \mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$, für die $M = Q_k = \{$vollst. isotrope k-dimensionale Unterräume von $\mathbf{C}^n\}$ vielfachheitenfrei ist;
- V. Kac [Kac80]: alle vielfachheitenfreien irreduziblen endlich-dimensionalen G-Moduln $M = V$ einfacher zusammenhängender Lie-Gruppen G; eine genauere Untersuchung ihrer Differentialoperatoren findet sich in [HU91].
- A. Leahy [Lea98] und Benson-Ratcliff [BR96] unabhängig voneinander: alle vielfachheitenfreien linearen Darstellungen einfacher zusammenhängender Gruppen.

Wir bemerken, daß die Bedingung der Vielfachheitenfreiheit weder hinreichend noch notwendig für transitive Wirkung von G auf M ist ($\mathrm{GL}(1, \mathbf{C}) \oplus \mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$ wirkt auf $\mathbf{C}^n$ vielfachheitenfrei, aber nicht transitiv, da $\{0\}$ ein Orbit ist; G wirkt auf sich selbst transitiv, die Vielfachheiten sind aber genau die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen).

Definition 8. Die Beziehung zwischen der Orbitstruktur und den G-invarianten Funktionen auf M läßt sich noch weiter präzisieren. Hierbei möchte man, um pathologische Spezialfälle auszuschließen, G von vornherein als zusammenhängend voraussetzen. Den Arbeiten von E. Vinberg folgend, definieren wir (für einen Punkt x von M in allgemeiner Lage)

(1) den *Rang von M* als die Differenz der Dimensionen zwischen einem B- und einem N-Orbit in M:

$$\operatorname{rk} M \ := \ \dim Bx - \dim Nx\,;$$

(2) die *Komplexität von M* als die Kodimension eines B-Orbits in M:

$$c(M) \ := \ \dim M - \dim Bx \ = \ \operatorname{codim} Bx\,.$$

Demnach ist die Kodimension eines allgemeinen N-Orbits genau $\operatorname{rk} M + c(X)$. Nach einem Satz von Rosenlicht ist die Komplexität von M ebenfalls gleich dem Transzendenzgrad von $\mathbf{C}(M)^B$ über $\mathbf{C}$; folglich sind die G-Varietäten der Komplexität Null genau die sphärischen G-Varietäten. Für $c(M) = 1$ braucht der Invariantenring $\mathbf{C}[M]^G$ nicht mehr trivial zu sein, es können also bereits unendliche Vielfachheiten vorkommen (vgl. Beispiel 7, S. 23: die $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$-Wirkung auf $\mathbf{C}^n$). Weiterhin zeigte D. Panyushev in [Pan90, Cor. 2, p.253], daß $\operatorname{rk} M$ gleich der Dimension des von $\mathcal{S}(M)$ erzeugten Teilraums in $P_+(G) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ und (mit Hilfe des Rosenlicht-Satzes) das Spektrum eine endlich erzeugte Halbgruppe ist.

Der Fall $\operatorname{rk} M = 0$ ist uninteressant, denn er beschreibt die triviale Wirkung auf M. Sei $f \in \mathbf{C}[M]^N$; nach Voraussetzung existiert zu jedem $x \in M$ und $h_1 n_1 \in HN = B$ ein $n_2 \in N$ mit $h_1 n_1 x = n_2 x$, folglich ist $f(h_1 n_1 x) = f(n_2 x) = f(x)$, insgesamt f also H-invariant. Das bedeutet, daß $\mathbf{C}[M]^N$ nur aus dem Gewichtsraum zum Gewicht Null besteht, und dieser ist nach Satz 6 gleich $\mathbf{C}[M]^G$. Weil die Gewichtsräume von $\mathbf{C}[M]^N$ gleichzeitig die Vielfachheitenräume der G-isotypischen Zerlegung von $\mathbf{C}[M]$ sind, besteht $\mathbf{C}[M]$ nur aus einer einzigen Komponente, nämlich der trivialen Darstellung mit Multiplizität $\mathbf{C}[M]^G$, es ist also $\mathbf{C}[M]^G = \mathbf{C}[M]$. Weil Polynome Punkte trennen, folgt daraus, daß G auf M gänzlich trivial wirkt. Die Definition des Rangs liefert ganz allgemein die Ungleichung (vgl. mit Satz 8)

$$\operatorname{rk} M \ \leq \ \operatorname{rk} G\,.$$

Intuitiv mißt (im glatten Fall !) der Rang von M die Größe des Zentrums von $\mathcal{D}^G(M)$ (ebenso wie der Rang einer Lie-Algebra die Größe des Zentrums von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ mißt, vgl. auch Satz 8), die Komplexität dagegen den Größenunterschied zwischen $\mathcal{D}^G(M)$ und seinem Zentrum (im Algebrenbild wäre dies $\dim \mathfrak{n}$), denn nach [Kno90, Satz 7.1] gilt

$$\operatorname{tr\,deg} \mathbf{C}[T^*M]^G \ = \ 2c(M) + \operatorname{rk} M\,.$$

Bemerkung 9. Der Schluß „$\operatorname{rk} M = 0$, also wirkt G trivial“ ist falsch, wenn G nicht zusammenhängend ist: betrachte die Wirkung von $G = \{\pm 1\}$ auf $\mathbf{C}$. Der Polynomring $\mathbf{C}[M] = \mathbf{C}[X]$ zerfällt in die Summe der Polynome von geradem bzw. ungeradem Grad, die G-invarianten Differentialoperatoren werden erzeugt von x^2 und d^2/dx^2 (denn den Gradoperator erhält man über $[d^2/dx^2, x^2] = 2 + 4x\,d/dx$), deren Zentrum besteht aber trotzdem nur aus den Skalaren, d.h. es ist $\operatorname{rk} M = 0$.

Zudem zeigt dieses Beispiel, daß – für unzusammenhängendes G – nicht-isomorphe $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln gleichen zentralen Charakter haben können (nämlich hier die Multiplikation mit einer Konstanten).

Es ist intuitiv einleuchtend und gilt als „Folklore“, daß die Vielfachheiten im allgemeinen unbeschränkt sind, sofern sie nicht alle gleich Eins sind und die vorliegende Wirkung vielfachheitenfrei ist. Da der Beweis in [BJLR97, Lemma 2.1, S. 6] nur für faktorielle Ringe arbeitet, wollen wir dies kurz für spätere Zwecke begründen.

Proposition 6 (Unbeschränktheit der Vielfachheiten)
Es wirke die reduktive komplexe algebraische Gruppe G auf der irreduziblen affinen Varietät M. Wenn G nicht vielfachheitenfrei operiert, so sind die Vielfachheiten nicht beschränkt.

Beweis. Nach einem Satz von Hadziev und Grosshans (vgl. [Kra85, Thm. III.3.2, S. 190]) ist der Ring der N-Invarianten $\mathbf{C}[M]^N$ endlich erzeugt, d.h. es existiert ein algebraischer Quotient $M//N$, dessen Koordinatenring isomorph ist zu den Vektoren mit höchstem Gewicht in $\mathbf{C}[M]$. Sei λ ein nichttriviales dominantes Gewicht von G, welches im Spektrum von M liegt und mind. die Vielfachheit zwei hat sowie v_λ, w_λ zwei linear unabhängige Funktionen in $\mathbf{C}[M]^N$ vom Gewicht λ. Man ergänze v_λ, w_λ zu einem Erzeugendensystem von $\mathbf{C}[M]^N$, welches aus insgesamt p Funktionen bestehen möge. Ist nun q die Dimension von $M//N$, so können die Funktionen des gewählten Erzeugendensystems höchstens $p-q$ algebraisch unabhängige Relationen erfüllen; insbesondere können v_λ und w_λ nur endlich viele Relationen erfüllen. Weil aber für willkürlich großes n die $n+1$ Vektoren $v_\lambda^k w_\lambda^{n-k}$, $k = 0, \ldots, n$ vom Gewicht $n\lambda$ sind, kann die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren vom Gewicht $n\lambda$ nicht kleiner als eine universelle Schranke $N \in \mathbf{N}$ sein.

□

1.2.3 Harish-Chandra-Theorie

Wir zitieren nun Ergebnisse von Friedrich Knop zur Struktur der G-invarianten Differentialoperatoren. Es bezeichne W die Weyl-Gruppe von G, $\mathfrak{h}$ eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g} = L(G)$ und ϱ die Hälfte der Summe über die positiven Wurzeln von G.

Satz 8 (Harish-Chandra-Homomorphismus [Kno94, Thm.])
Die zusammenhängende reduktive komplexe algebraische Gruppe G wirke auf der glatten affinen Varietät M. Dann existiert ein Unterraum $\mathfrak{h}_M^*$ von $\mathfrak{h}^*$ der Dimension $\operatorname{rk} M$, eine Untergruppe W_M von W (genannt die "kleine Weylgruppe" von M) sowie ein Isomorphismus η derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathcal{Z}(M) \arrow[d, "\eta"', "\cong"] \\ \mathbf{C}[\mathfrak{h}^*]^W \arrow[r, "\mathrm{res}"'] & \mathbf{C}[\varrho + \mathfrak{h}_M^*]^{W_M} \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $\mathcal{Z}(M)$ als $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-Modul endlich erzeugt. Zudem wirkt W_M auf $\mathbf{C}[\varrho + \mathfrak{h}_M^*]$ als Spiegelungsgruppe, d.h. $\mathcal{Z}(M)$ ist ein Polynomring in $\operatorname{rk} M$ Variablen mit homogenen Erzeugenden. □

Die letzte Behauptung ist eine Folge aus dem Charakterisierungssatz für Pseudospiegelungsgruppen von Shepard-Todd und Chevalley (vgl. [Hum90, S.66] sowie [ST54] und [Che55]).

Bemerkung 10. Der klassische Isomorphismus $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cong \mathbf{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ enthielt natürlich auch bereits die Verschiebung um ϱ, da streng genommen nur die W-invarianten Polynome mit Argument $\varrho + x$, $x \in \mathfrak{h}^*$ den zentralen Elementen entsprechen. Oft gleicht man dies aber aus, in dem man statt der Variablen die Wirkung der Weyl-Gruppe verschiebt.

Für die Konstruktion von W_M ist die Verschiebung dagegen von Bedeutung, weil sie einem W_M als Untergruppe des Normalisators von $\varrho + \mathfrak{h}_M^*$ liefert, also eine Einbettung

$$W_M \hookrightarrow N_W(\varrho + \mathfrak{h}_M^*)\,,$$

durch die die Restriktionsabbildung $\mathbf{C}[\mathfrak{h}^*]^W \to \mathbf{C}[\varrho + \mathfrak{h}_M^*]^{W_M}$ überhaupt erst Sinn macht.

Mit diesem Satz hat man nun Aussicht darauf, die zentralen Differentialoperatoren einer näheren Beschreibung zugänglich zu machen. Kombiniert man ihn mit den bekannten Sätzen über die Hilbert-Molien-Reihe einer endlichen Gruppe (vgl. [Hum90, 3.9, S.62]), so erhält man für jeden Satz homogener Erzeugenden mit jeweiligem Grad d_i die Beziehung

$$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_{\operatorname{rk} M} = |W_M|\,.$$

Da die kleine Weylgruppe W_M mitunter viel kleiner ist als die volle Weylgruppe W, ist dies bereits eine gute Einschränkung. Außerdem erlaubt uns die Beschreibung von $\mathcal{Z}(M)$ als Polynomring einzusehen, daß die Vielfachheitenräume aus der Frobenius-Zerlegung nur in Ausnahmefällen treue $\mathcal{D}^G(M)$-Darstellungen liefern.

Zu einem $\mathcal{D}^G(M)$-Modul U und einer Teilmenge $X \subset U$ sei der *Annulator* definiert als

$$\mathrm{Ann}\,(X) \;:=\; \{D \in \mathcal{D}^G(M) \mid Dx \;=\; 0\ \forall x \in X\}\,.$$

Ist U zudem irreduzibel und u ein beliebiges Element von $U - \{0\}$, dann folgt aus dem Homomorphie-Satz sofort, daß U zu $\mathcal{D}^G(M)/\mathrm{Ann}\,(u)$ isomorph ist, da U in dieser Situation von u erzeugt wird.

Korollar 1 (Treue von $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln)
Die zusammenhängende reduktive komplexe algebraische Gruppe G wirke auf der glatten affinen Varietät M.

Dann ist der Vielfachheitenraum U_λ genau dann treuer $\mathcal{D}^G(M)$-Modul , wenn $\mathrm{rk}\, M = 0$ ist, also G auf M nur trivial wirkt.

Beweis. Wenn G auf M trivial wirkt, so ist es wohlbekannt, daß $\mathcal{D}(M)$ auf $\mathbf{C}[M]$ treu wirkt. Ist dagegen $\mathrm{rk}\, M =: n > 0$, so bemerken wir, daß natürlich

$$\mathcal{D}^G(M) \cdot \ker \chi_\lambda \;\subset\; \mathrm{Ann}\,(U_\lambda) \tag{3}$$

gilt; damit reicht es zu zeigen, daß $\ker \chi_\lambda$ nicht trivial ist. Aber in diesem Fall ist $\mathcal{Z}(M)$ isomorph zu einem Polynomring in n Variablen, der zentrale Charakter χ_λ demnach ein (multiplikativer) Homomorphismus von $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ nach $\mathbf{C}$. Ein solcher ist bereits durch die Bilder c_i der Unbestimmten X_i eindeutig festgelegt, und jedes Polynom, welches einen Linearfaktor $X_i - c_i$ enthält, liegt im Kern von χ_λ. □

Für die Strukturtheorie der Ideale von $\mathcal{D}^G(M)$ wäre es interessant zu wissen, ob bei der (trivialen) Inklusion in Gleichung 3 sogar die Gleichheit gilt, wie dies für Verma-Moduln der Fall ist [Dix96, Thm.8.4.3]. Ein Gegenbeispiel hierzu ist mir nicht bekannt.

1.2.4 Die zentralen Charaktere von $\mathcal{D}^G(M)$

Unter den Voraussetzungen von Satz 5 bezeichne $U_\lambda = \mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ für $\lambda \in \mathcal{S}(M)$ den Vielfachheitenraum zu V^λ, aufgefaßt als irreduzibler $\mathcal{D}^G(M)$-Modul. Weil nun $\mathcal{Z}(M)$ zu einem Polynomring in $n = \mathrm{rk}\, M$ Variablen isomorph ist, ist der zentrale Charakter χ_λ demnach die Auswertung eines Polynoms $\eta(Z)$ auf einem Element $\lambda' + \varrho \in \varrho + \mathfrak{h}_M^*$, genauer

$$\chi_\lambda(Z) \;=\; \eta(Z)(\lambda' + \varrho), \quad Z \in \mathcal{Z}(M)\,.$$

Wir möchten untersuchen, inwiefern U_λ durch λ' eindeutig charakterisiert ist und wie es mit λ in Beziehung steht. Obgleich die Räume U_λ keine treuen Moduln sind, können wir die erste Frage positiv beantworten, und dies unabhängig davon, ob sie endlich- oder unendlich-dimensional sind. Dies ist das Analogon des Satzes von Racah, nach dem das Zentrum der universellen Einhüllenden von G genau $\mathrm{rk}\, G$ erzeugende Elemente hat, und jede endlich-dimensionale G-Darstellung durch die Eigenwerte dieser Operatoren, der sog. Casimir-Operatoren von G, eindeutig bestimmt ist (vgl. [Dix96, Thm.7.4.7]). Statt der Casimir-Operatoren reichen also bereits $\mathrm{rk}\, M$ zentrale Operatoren aus, um das Spektrum von M zu trennen.

In dieser Hinsicht verhalten sich die in der Frobenius-Zerlegung vorkommenden $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln anständiger als ihre Verwandten, die Verma-Moduln, denn diese sind durch ihren zentralen Charakter *nicht* eindeutig bestimmt (freilich gibt es viel mehr Verma-Moduln als $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln in der Frobenius-Zerlegung).

Satz 9 (Eindeutigkeit der zentralen Charaktere)
Die Vielfachheitenräume $U_\lambda = \mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ sind, als $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln, eindeutig durch ihren zentralen Charakter bestimmt.

Beweis. Der Beweis stützt sich auf den klassischen Harish-Chandra-Homomorphismus und zeigt sogar noch ein bißchen mehr. Sei $\chi_\lambda : \mathcal{Z}(M) \to \mathbf{C}$ der zentrale Charakter der isotypischen Komponente $\operatorname{Hom}_G(V^\lambda, \mathbf{C}[M]) \otimes V^\lambda$. Der von der G-Wirkung induzierte Homomorphismus $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{Z}(M)$ erlaubt es, dessen Einschränkung ξ_λ auf $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ zu betrachten, und dies ist genau der zentrale Charakter von V^λ, aufgefaßt als $\mathfrak{g}$-Modul. Für diesen ist bekannt, daß für ein weiteres μ aus $\xi_\lambda = \xi_\mu$ sofort die Existenz eines Elementes w der Weylgruppe mit $w\lambda = \mu$ folgt (vgl. [Dix96, Thm.7.4.7.]). Da aber V^λ und V^μ endlich-dimensional sind, müssen λ und μ dominant und somit gleich sein. Also unterscheiden sich bereits die Einschränkungen auf $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ der zentralen Charaktere nicht-isomorpher $\mathcal{D}^G(M)$-Moduln.

Bemerkung 11. Der vorhergegangene Satz unterstreicht die Bedeutung der zentralen invarianten Differentialoperatoren gegenüber den anderen invarianten Operatoren. In diesem Zusammenhang möchten wir die Verbindung zu den klassischen *Capelli-Identitäten* sowie einem allgemeineren *Capelli-Problem* herstellen.

Sei $G = \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ die volle lineare Gruppe sowie $M = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ der Raum der komplexen $(n \times n)$-Matrizen mit Koordinaten $X = (x_{ij})_{i,j=1}^n$. Die Gruppe $G \times G$ wirke mittels simultaner Links- und Rechtstranslation, also $(g_1, g_2) \cdot X := g_1 X g_2^{-1}$. Eine mittlerweile klassische, von A. Capelli 1887 veröffentlichte Identität identifiziert den $G \times G$-invarianten Differentialoperator

$$\Omega \ := \ \det X \cdot \det \partial(X), \quad \partial(X) := \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_{i,j=1}^n$$

mit einem Element aus dem Zentrum der universellen Einhüllenden von $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$. Erst mit ihrer Hilfe werden viele Probleme der klassischen Theorie der Vektor- und Tensorinvarianten einer direkten Bearbeitung zugänglich; für den tieferen Zusammenhang mit dem Bikommutantensatz, der moderneren Formulierung der Invariantentheorie und den vielfachen Anwendungen sei hier stellvertretend für viele andere auf die Arbeit [HU91] und die darin zitierte Literatur verwiesen. Insbesondere formulieren Howe und Umeda das allgemeine Capelli-Problem als die Frage, zu entscheiden, wann die Abbildung

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \ \longrightarrow \ \mathcal{D}^G(M)$$

surjektiv ist. Allerdings denken die Autoren hierbei im Grunde nur an vielfachheitenfreie G-Wirkungen, in welchem Fall $\mathcal{D}^G(M)$ abelsch ist, also mit seinem Zentrum übereinstimmt, und bemerken, daß im Falle eines Vektorraumes diese Abbildung keinesfalls surjektiv sein kann, wenn G keinen direkten Faktor $\mathrm{GL}(1, \mathbf{C})$ enthält. Weiterhin bestimmen sie die Antwort für die von Kac [Kac80] ausgearbeitete Liste vielfachheitenfreier irreduzibler G-Darstellungen mit $\mathrm{GL}(1, \mathbf{C})$-Faktor, aus der sich jedoch kein allgemeines Schema erkennen läßt. Die Frage in obiger Formulierung hat noch andere Schönheitsfehler: so ist zum Beispiel nicht klar, ob im Bild Relationen vorkommen können bzw. allgemeiner, inwiefern $\mathcal{D}^G(M)$ überhaupt die algebraische Struktur einer universellen einhüllenden Algebra trägt (vgl. Bsp. 2). Andererseits besagt Knop's Harish-Chandra-Homomorphismus, daß das Zentrum von $\mathcal{D}^G(M)$ isomorph zu einem (relationenfreien !) Polynomring ist. Im Lichte des vorangegangenen Satzes schlagen wir deshalb vor, für allgemeine G-Wirkungen auf affinen Varietäten die Frage nach der Surjektivität auf das Zentrum zu beschränken:

> **Kommutatives Capelli-Problem.** Gegeben eine reduktive zusammenhängende algebraische Gruppe G, die auf einer glatten affinen Varietät M wirkt. Wann ist die Inklusion
>
> $$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \ \longrightarrow \ \mathcal{Z}(M)$$
>
> surjektiv ?

Damit ist zwar die Frage sinnvoll, die Antwort aber keinesfalls leichter geworden. Immerhin sagt uns Satz 8, daß $\mathcal{Z}(M)$ als $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-Modul endlich erzeugt ist, die Abweichung also nicht sehr groß sein kann.

1.2.5 Die Frobenius-Zerlegung über R

Wir wollen nun den Fall genauer betrachten, daß die komplexe Situation in Wahrheit durch Komplexifizierung einer reellen Gruppenwirkung entsteht. Sei dazu (G_0, M_0) eine reelle Form von (G, M), und weiterhin

$$r:\ \mathbf{C}[M] \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}$$

der Algebren-Isomorphismus zwischen den (üblichen) regulären Funktionen auf M und den komplexwertigen regulären Funktionen auf M_0, der durch Restriktion bzw. eindeutige Fortsetzung von Funktionen gegeben ist (vgl. hierzu 1.1.1, S. 1 ff.). In dieser Situation liefert Satz 5 die Frobenius-Zerlegung von $\mathbf{C}[M]$.

Vergessen wir einen Augenblick die unterliegenden Varietäten und betrachten nur die Wirkung ϱ von G auf dem komplexen Vektorraum $\mathbf{C}[M]$. Nach Lemma 5 ist dann die isotypische Zerlegung von $\mathbf{C}[M]$ unter G identisch mit der isotypischen Zerlegung von $\mathbf{C}[M]$ unter der Wirkung von G_0, definiert als die Einschränkung der G-Wirkung hierauf, geschrieben ϱ_0. Die Einschränkung auf G_0 der komplexen G-Darstellung V^λ schreiben wir V_0^λ. Nun verwenden wir, daß $\mathbf{C}[M]$ mit der Abbildung r isomorph ist zu $\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}$, die Einschränkung der G_0-Wirkung natürlich mit der Übertragung der G_0-Wirkung von $\mathbf{R}[M_0]$ auf $\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}$ übereinstimmt und folglich Satz 5 ebenfalls die isotypische Zerlegung von $\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}$ unter G_0 liefert. Insgesamt haben wir also als G_0-Modul – zunächst vom abstrakten Standpunkt der Morphismen – die Zerlegung

$$\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}} \ \cong \bigoplus_{\lambda\in P_+(G)} \mathrm{Hom}_{G_0}(V_0^\lambda, \mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}}) \otimes V_0^\lambda\,,$$

welcher auf der Seite der Funktionen unter Verwendung des Isomorphismus r die Summe

$$\mathbf{R}[M_0]_{\mathbf{C}} \ \cong \bigoplus_{\lambda\in P_+(G)} r\left(\mathbf{C}[M]^N(\lambda)\right) \otimes V_0^\lambda$$

entspricht. Im allgemeinen ist dies die einzige Beschreibung der reellen Frobenius-Zerlegung in der Sprache des Transformationsverhaltens gewisser Funktionen. Eine intrinsische Charakterisierung der Vielfachheitenräume alleine aus der Struktur der reellen Gruppe G_0 ist nur in einem Ausnahmefall möglich, denn wir nun skizzieren wollen.

Sei die reelle Form G_0 definiert als die Fixpunktmenge des involutiven Antiautomorphismus σ, und $(\tilde{G}_0, \tau)$ eine damit verträgliche reelle kompakte Form von G, d.h. es gelte $\sigma\tau = \tau\sigma$. Dann ist $\theta := \sigma\tau$ die Cartan-Involution von G_0, die Lie-Algebra $\mathfrak{g}_0$ zerlegt sich in die Eigenräume zum Eigenwert $+1$ und -1

$$\mathfrak{g}_0 \ = \ \mathfrak{g}_0(1) \oplus \mathfrak{g}_0(-1) \ =: \ \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

der auf der Gruppenseite die Zerlegung $G_0 = KP$, K eine Untergruppe von G_0 mit Lie-Algebra $\mathfrak{k}$ und $P := \exp(\mathfrak{p})$ entspricht. Ist κ die Killingform von $\mathfrak{g}_0$, so sind bezüglich der Bilinearform

$$\langle x, y\rangle_\theta \ = \ -\kappa(x, \theta y)$$

die Operatoren aus $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}$ schiefsymmetrisch, die aus $\mathrm{ad}\,\mathfrak{p}$ symmetrisch. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h}_0$ von $\mathfrak{g}_0$ heißt kanonisch eingebettet, wenn sie unter θ invariant ist, oder, was dasselbe ist, wenn

$$\mathfrak{h}_0 \ = \ (\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p})$$

gilt. Unter einer Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}_0$ von $\mathfrak{g}_0$ verstehen wir eine solche, deren Komplexifizierung $\mathfrak{h} := \mathfrak{h}_0(\mathbf{C})$ eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist. Kanonisch eingebettete Cartan-Unteralgebren existieren immer; sei fortan $\mathfrak{h}_0$ eine solche, und H_0 eine Untergruppe von G_0 mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}_0$, für die dann automatisch

$$H_0 = (H_0 \cap K)(H_0 \cap P)$$

gilt. Es ist H_0 eine reelle Form von H, der Untergruppe von G mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$; deswegen liegt H_0 in H dicht. Ist nun $B = HN$ die Ergänzung von H zu einer Boreluntergruppe von G, die durch die Wurzelzerlegung bezüglich H definiert ist, so braucht N nicht unter σ invariant zu sein, deswegen bilden die Fixpunkte von N unter σ in G_0 im allgemeinen keine reelle Form von N.

Weiß man aber, daß $\mathfrak{h}_0$ vollständig in $\mathfrak{p}$ enthalten ist, so ist $\mathfrak{h}_0$ gleichzeitig eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{g}_0$ und für alle $h \in \mathfrak{h}_0$ ist der Operator $\mathrm{ad}h$ reell diagonalisierbar, da symmetrisch. Daraus folgt, daß die Wurzelräume $\mathfrak{g}^\alpha$ der komplexen Lie-Algebra genau die Komplexifizierungen der – völlig analog definierten – reellen Wurzelräume ($\alpha \in \mathfrak{h}_0^*$)

$$\mathfrak{g}_0^\alpha \;:=\; \{x \in \mathfrak{g}_0 : \mathrm{ad}\, h(x) = \alpha(h)x\}$$

sind; bezeichne Δ_+ die positiven Wurzeln (von $\mathfrak{g}$ oder $\mathfrak{g}_0$, dies ist nun egal), so ist insbesondere

$$\mathfrak{n}_0 \;:=\; \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_0^\alpha$$

eine reelle Form von $\mathfrak{n}$, der Lie-Algebra von N. Die Fixpunkte N_0 von N unter σ liegen also dicht in N.

Für die ursprünglich gestellte Aufgabe, die reelle Frobenius-Reziprozität alleine anhand der reellen Gruppe G_0 zu charakterisieren, sind wir nun in einer äußerst komfortablen Situation; denn jetzt hat jede Funktion in $\mathbf{R}[M_0]_\mathbf{C}$, die sich unter $B_0 := H_0 N_0$ gemäß dem Gewicht λ transformiert, eine eindeutige Fortsetzung zu einer Funktion aus $\mathbf{C}[M]$ mit gleichen Transformationseigenschaften bzgl. B, und demnach ist

$$\mathbf{R}[M_0]_\mathbf{C} \;\cong\; \bigoplus_{\lambda \in P_+(G)} \mathbf{R}[M_0]_\mathbf{C}^{N_0}(\lambda) \otimes V_0^\lambda\,.$$

Reelle Lie-Algebren, die eine vollständig in $\mathfrak{p}$ enthaltene Cartan-Unteralgebra besitzen, heißen *zerfallend* („split", „déployée"). Für die klassischen einfachen Lie-Algebren sind dies $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ für $n \geq 2$, $\mathfrak{so}(k, k+1)$ für $k \geq 1$, $\mathfrak{so}(k, k)$ für $k \geq 3$ und $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$ für $n \geq 2$.

Dieses Resultat kann man sogar noch dahingehend verbessern, daß man sich auf reellwertige Funktionen beschränken kann: denn leicht überlegt man sich, daß für eine zerfallende Lie-Algebra $\mathfrak{g}_0$ die komplexen Darstellungen von $\mathfrak{g}_0(\mathbf{C}) =: \mathfrak{g}$ genau die Komplexifizierungen der reellen Darstellungen von $\mathfrak{g}_0$ sind. Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen und erinnern an die in Bemerkung 2 ausgeführte Beziehung zwischen den Differentialoperatoren auf M_0 und denen auf M:

Proposition 7 (Reelle Frobenius-Zerlegung)
Sei (G_0, M_0) eine reelle Form von (G, M) und $r :\ \mathbf{C}[M] \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}[M_0]_\mathbf{C}$ der zugehörige Algebren-Isomorphismus. Dann gilt:

$$\mathbf{R}[M_0]_\mathbf{C} \cong \bigoplus_{\lambda \in P_+(G)} \mathrm{Hom}_{G_0}(V_0^\lambda, \mathbf{R}[M_0]_\mathbf{C}) \otimes V_0^\lambda \cong \bigoplus_{\lambda \in P_+(G)} r\left(\mathbf{C}[M]^N(\lambda)\right) \otimes V_0^\lambda$$

als G_0-Moduln, und, wenn G_0 zusätzlich zerfallend ist,

$$\mathbf{R}[M_0] \cong \bigoplus_{\lambda \in P_+(G)} \mathbf{R}[M_0]^{N_0}(\lambda) \otimes V_0^\lambda\,.$$

Zudem sind die Vielfachheitenräume der V_0^λ als $\mathcal{D}^G(M)_\mathbf{C}$-Moduln irreduzibel, paarweise inäquivalent und haben zentralen Charakter. □

1.3 Die Frobenius-Zerlegung in der Praxis

1.3.1 Klassische Beispiele

Die Beispiele dieses Abschnitts sind allesamt wohlbekannt, erfahren aber im Lichte der hier bewiesenen Frobenius-Zerlegung eine neue Gestalt.

Beispiel 6 (Multiplikative $\mathbf{C}^*$-Wirkung auf einem Torus). Einfachstes Beispiel ist die multiplikative Wirkung der Gruppe $G = \mathrm{GL}(1, \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^*$ auf sich selbst, oder allgemeiner, einem n-dimensionalen Torus $T^n = (\mathbf{C}^*)^n$. Es ist dann der Rang $\mathrm{rk}\, M$ immer gleich Eins, die Komplexität $c(M)$ dagegen gleich $n-1$. Der Koordinatenring $\mathbf{C}[T^n]$ ist der Raum der endlichen Laurent-Polynome und zerlegt sich unter dem erzeugenden Element $E = \sum x_i \partial_i$ der Lie-Algebra von G in die Unterräume homogener Polynome vom Gesamtgrad $k \in \mathbf{Z}$

$$\mathbf{C}[T^n] \;=\; \sum_{k\in\mathbf{Z}} \mathbf{C}[T^n]^k\,,$$

welche man als das Tensorprodukt der eindimensionalen $\mathbf{C}^*$-Darstellung vom Gewicht n mit dem Vielfachheitenraum $\mathcal{P}(T^n)^k$ verstehen muß. Die G-invarianten Differentialoperatoren $\mathcal{D}^{\mathbf{C}^*}(T^n)$ sind genau diejenigen, die den Grad eines Polynoms nicht verändern, und werden demnach erzeugt von den Operatoren $x_i\partial_j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Weil die G-invarianten Darstellungen hier eindimensional sind, läßt sich der Kommutant von $\mathcal{D}^{\mathbf{C}^*}(T^n)$ leicht bestimmen. Denn ein mit allen invarianten Operatoren kommutierender Differentialoperator muß die isotypische Zerlegung erhalten, im hier vorliegenden Fall also selbst invariant und damit im Zentrum von $\mathcal{D}^{\mathbf{C}^*}(T^n) \cong \mathbf{C}[E]$ enthalten sein. Trivialerweise sind damit die irreduziblen $\mathbf{C}^*$-Darstellungen gleichfalls irreduzible und paarweise inäquivalente $\mathcal{D}^{\mathbf{C}^*}(T^n)'$-Darstellungen und eine solche ist durch ihren zentralen Charakter, das ist der Eigenwert von E, eindeutig bestimmt.

Wir setzen nun $n = 1$. Der Wirkung von $\mathbf{C}^*$ auf sich selbst entsprechen dann zwei reelle Formen, nämlich die kompakte Form $(SO(2, \mathbf{R}), S^1)$ der Drehungen des Einheitskreises, wobei natürlich S^1 zu $\mathrm{SO}(2, \mathbf{R})$ isomorph ist, und die nicht kompakte Form $(\mathrm{SO}(1, 1), H^1)$ der hyperbolischen Drehungen der (beiden Äste der) Einheitshyperbel mit $\mathbf{R}^*_+ \cong \mathrm{SO}(1, 1)$ und $H^1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, xy = 1\}$. S^1 und H^1 sind duale symmetrische Räume im Sinne Cartans, und es sinnvoll, sie mittels trigonometrischer bzw. hyperbolischer Funktionen zu parametrisieren. Für die Koordinatenringe erhält man dann die Zerlegungen

$$\mathbf{R}[S^1]_{\mathbf{C}} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \mathbf{C}\cdot e^{int}, \quad \mathbf{R}[H^1]_{\mathbf{C}} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \mathbf{C}\cdot e^{nt}\,.$$

Beispiel 7 (Standard-Darstellung der $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$). Die Standard-Darstellung der $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$ auf dem $\mathbf{C}^n$ $(n \geq 3)$ liefert einem zwei interessante Beispiele, um das Zusammenspiel von Differentialoperatoren und Gruppenwirkung zu illustrieren. Im ersten Fall soll nur die $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$ wirken, in welchem die Vielfachheiten alle unendlich sind; im zweiten Fall nimmt man noch die Wirkung von $\mathrm{GL}(1, \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^*$ mittels Skalarmultiplikation hinzu, was erzwingt, daß alle Vielfachheiten gleich Eins werden. Es ist klar, daß dieser Abschnitt nur eine Reinterpretation klassischer Ergebnisse enthält; in jüngerer Zeit beschrieben unter diesem Aspekt Howe-Umeda [HU91] neben dem hier interessierenden Beispiel die invarianten Differentialoperatoren aller vielfachheitenfreien irreduzibler Darstellungen klassischer Gruppen. Knop [Kno94] verwendete diese Arbeit, um eine Tabelle der kleinen Weyl-Gruppe für diese Beispiele anzufertigen. Auf beide Arbeiten werden wir uns deswegen fortwährend stützen.

Betrachte zunächst die Standard-Darstellung von $G = \mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$ auf $M = \mathbf{C}^n$, deren Komplexität $c(M)$ und Rang $\mathrm{rk}\,(M)$ gleich Eins sind. Als Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(n, \mathbf{C})$ wählen wir die Operatoren

$$J_{ik} \;=\; x_i\partial_k - x_k\partial_i$$

und bezeichnen weiterhin den geometrischen Laplace-Operator des $\mathbf{C}^n$ mit

$$\Delta \;:=\; -\sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 \,.$$

Es ist wohlbekannt, daß die invarianten Differentialoperatoren erzeugt werden von r^2 und Δ. Setzt man

$$e^+ \;:=\; r^2/2, \quad e^- \;:=\; \Delta/2, \quad h \;:=\; [e^+, e^-] \;=\; n/2 + \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i \;=:\; n/2 + E\,,$$

so erkannte Howe, daß diese Operatoren die Kommutatorrelationen der $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ erfüllen

$$[h, e^+] \;=\; 2e^+, \quad [h, e^-] \;=\; 2e^-$$

und demnach die G-invarianten Differentialoperatoren isomorph sind zu deren universellen Einhüllenden

$$\mathcal{D}^{\mathrm{SO}(n,\mathbf{C})}(\mathbf{C}^n) \;\cong\; \mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C}))\,.$$

Ihr Zentrum wird vom quadratischen Casimir-Element der $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ erzeugt

$$\begin{aligned} C(\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})) \;&:=\; h^2 + 2(e^+e^- + e^-e^+) \;=\; h^2 - 2h + r^2\Delta \\ &=\; (n^2/4 - n) + (n-1)E + \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \partial_i \partial_j + r^2\Delta \\ &=\; (n^2/4 - n) + E(E + n - 2) + r^2\Delta\,. \end{aligned}$$

Sei $\mathcal{P}(\mathbf{C}^n)$ der Polynomring des $\mathbf{C}^n$. Der Unterraum $\mathcal{H}^k$ der harmonischen Polynome vom Grad k ist isomorph zur $\mathrm{SO}(n,\mathbf{C})$-Darstellung vom höchsten Gewicht $k\varepsilon_1$, wobei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{[n/2]}$ die Erzeugenden des Gewichtsgitters sind (vgl. z.B. [GW97, Ch. 2.3.1] für die Notationen und [GW97, Thm. 5.2.4] für die Behauptung[1]). Weil sich die homogenen Polynome vom Grad k rekursiv zerlegen in

$$\mathcal{P}(\mathbf{C}^n)^k \;=\; \mathcal{H}^k \oplus r^2 \mathcal{P}(\mathbf{C}^n)^{k-2}\,,$$

ergibt sich für den gesamten Polynomring unter der $\mathrm{SO}(n,\mathbf{C})$-Wirkung

$$\mathcal{P}(\mathbf{C}^n) \;\cong\; \bigoplus_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{C}[r^2] \otimes \mathcal{H}^k\,.$$

Sei p ein harmonisches Polynom vom Grad k. Aus

$$e^- p(x) = 0, \quad h\, p(x) = (k + n/2)\, p(x)$$

folgt, daß die Vielfachheitenräume $\mathbf{C}[r^2]$ als $\mathcal{D}^{\mathrm{SO}(n,\mathbf{C})}(\mathbf{C}^n)$-Moduln paarweise nicht äquivalent sind. Als Polynom, welches gleichzeitig ein Vektor von höchstem Gewicht für $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ und $\mathrm{SO}(n,\mathbf{C})$ ist, eignet sich zum Beispiel $r^2(z_1 + iz_2)^k$. Jedes homogene Polynom $p(x)$ vom Grad $k-2$ erfüllt die Identität ([VK93, Gl. 6, 9.2.3])

$$\Delta r^2 p(x) \;=\; (8 - 2n - 4k)\, p(x) + r^2 \Delta p(x),$$

woraus sich mit ein wenig Fleißarbeit der Eigenwert $\lambda_C(k,n)$ von $C(\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C}))$ auf $r^2(z_1 + iz_2)^k$ bestimmen läßt:

$$\lambda_C(k,n) \;=\; n^2/4 - n + k(k + n - 2)\,.$$

[1] Genauer gesagt, für die korrigierte Behauptung: in Teil (2) des zitierten Satzes hat sich ein Druckfehler eingeschlichen. Es heißt richtig „$k\varepsilon_1$“ und nicht „$k\varpi_1$“; ab $n \geq 5$ ist dies freilich dasselbe.

In dem Skalar $k(k+n-2)$ erkennt man den Eigenwert des quadratischen Casimir-Operators der $\mathrm{SO}(n,\mathbf{C})$ zum höchsten Gewicht $k\varepsilon_1$; und in der Tat, es ist

$$C(\mathfrak{so}(n,\mathbf{C})) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} J_{ik}^2 \;=\; E(E+n-2)+r^2\Delta\,,$$

woraus die bemerkenswerte Relation

$$C(\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})) \;=\; C(\mathfrak{so}(n,\mathbf{C}))+n^2/4-n$$

folgt. Das Zentrum der G-invarianten Differentialoperatoren wird also gleichermaßen von $C(\mathfrak{so}(n,\mathbf{C}))$ wie auch von $C(\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C}))$ erzeugt, und durch den Wert von $\lambda_C(k,n)$ ist die isotypische G-Komponente eindeutig bestimmt.

Beispiel 8 (Homogenes $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$-Bündel). Das folgende Beispiel einer glatten, normalen $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$-Einbettung ist den tiefreichenden Untersuchungen von Luna und Vust über Einbettungen homogener Räume entnommen (vgl. die Originalarbeit [LV83] sowie die Darstellung dieser Ergebnisse in [Kra85, III.3.4]).

Sei $G=\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ und M die glatte affine dreidimensionale Varietät

$$M \;=\; \{(A,v)\in\mathcal{M}(2,\mathbf{C})\times\mathbf{C}^2 \mid \operatorname{tr}A=0,\ \det A=-1,\ Av=v\}\,,$$

versehen mit der G-Wirkung

$$g\cdot(A,v) \;:=\; (gAg^{-1},gv)\,.$$

Setzt man $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$ und $v=(x,y)$, so ist M definiert durch die Gleichungen

$$a^2+bc=1,\quad ax+by=x,\quad cx-ay=y\,.$$

Die Varietät M besteht aus genau zwei G-Orbiten, dem dichten, zu G isomorphen Orbit aller Paare $(A,v)\in M$ mit $v\neq 0$ einerseits, und dem zweidimensionalen Orbit aller (A,v) mit $v=0$ andererseits. Wie im vorangegangenen Beispiel der $\mathrm{SO}(n,\mathbf{C})$-Wirkung auf $\mathbf{C}^n$ sind sowohl der Rang $\mathrm{rk}\,(M)$ als auch die Komplexität $c(M)$ gleich Eins. Um zunächst den Ring der N-Invarianten $\mathbf{C}[M]^N$ zu bestimmen, schreiben wir die Elemente von M als Vektoren (a,b,c,x,y) im $\mathbf{C}^5$ und betten N in G als

$$N \;:=\; \left\{n:=\begin{pmatrix}1 & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix} : \mu\in\mathbf{C}\right\}$$

ein. Ein Element $n\in N$ wirkt dann auf (a,b,c,x,y) wie folgt:

$$\varrho(n)(a,b,c,x,y) \;=\; (a+\mu c,-2\mu a-\mu^2c+b,c,x+\mu y,y)\,.$$

Es ist demnach sinnvoll, ein Polynom $p\in\mathbf{C}[M]^N$ in Potenzen von c und y zu entwickeln

$$p(a,b,c,x,y) \;=\; \sum_{k,l\geq 0} P_{kl}(a,b,x)c^ky^l,$$

wobei die Koeffizienten die Relation

$$P_{kl}(a,b,x) \;=\; P_{kl}(a+\mu c,-2\mu a-\mu^2c+b,x+\mu y) \quad \mathrm{mod}\ \mathcal{I}(M)$$

erfüllen müssen. Differenziert man dies nach μ und setzt $\mu=0$, so folgt

$$0 \;=\; c\frac{\partial P_{kl}}{\partial a}-2a\frac{\partial P_{kl}}{\partial b}+y\frac{\partial P_{kl}}{\partial x} \quad \mathrm{mod}\ \mathcal{I}(M),$$

also

$$0 \;=\; \frac{\partial P_{kl}}{\partial a} \;=\; \frac{\partial P_{kl}}{\partial b} \;=\; \frac{\partial P_{kl}}{\partial x} \quad \mathrm{mod}\; \mathcal{I}(M)\,.$$

Die Koeffizienten P_{kl} müssen also konstant $\mathrm{mod}\,\mathcal{I}(M)$ sein; wir schreiben sie fortan C_{kl}. Nun fordern wir für diese Elemente das gewünschte Transformationsverhalten unter dem Torus T, $t = \mathrm{diag}(\lambda^{-1}, \lambda) \in T$

$$\varrho(t)p(a,b,c,x,y) \;=\; p(a, b\lambda^2, c/\lambda^2, x/\lambda, y\lambda) \;=\; \lambda^n p(a,b,c,x,y)\,,$$

ausgedrückt in der Entwicklung nach Potenzen von c und y

$$\sum_{kl} C_{kl}\lambda^{2k+l}c^k y^l \;=\; \lambda^n \sum_{kl} C_{kl}c^k y^l\,.$$

Damit ist der Vielfachheitenraum

$$\mathbf{C}[M]^N(n) \;=\; \mathrm{Lin}\left(c^k y^l \mid n = 2k+l\right)$$

und der Dimension $[n/2]+1$. Um dieses Beispiel geometrisch zu verstehen, greifen wir kurz vor auf die erst in Abschnitt 3.2.1 zu besprechende Richardson-Einbettung. Betrachte einen Hermiteschen symmetrischen Raum vom Typ C I, also $P = G/K = \mathrm{Sp}(2n,\mathbf{C})/\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$. Dieser läßt sich äquivariant in $G = \mathrm{Sp}(2n,\mathbf{C})$ einbetten mittels der Abbildung

$$gK \longmapsto gJ_n g^{-1} J_n^t\,,$$

wobei $J_n := \begin{pmatrix} 0 & S_n \\ -S_n & 0 \end{pmatrix}$ und S_n die Matrix ist, die genau auf der Schiefdiagonalen Einser zu stehen hat. Auf diese Weise erhält man

$$P \;=\; \mathrm{Sp}(2n,\mathbf{C})/\mathrm{GL}(n,\mathbf{C}) \;\cong\; \{y \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbf{C}) \mid (yJ_n)^2 = -I_{2n}\}\,,$$

wobei $g \in G$ auf die Punkte y von M durch

$$g \star y \;:=\; gyJ_n g^{-1}J_n^{-1}$$

wirkt, d.h. mit $z := yJ_n$ ist dies bis auf Multiplikation mit J_n von rechts die gewöhnliche Konjugationswirkung: $(g\star y)J_n = gzg^{-1}$. Man sieht, daß jedes $y \in M$ eine Zerlegung der $2n$-dimensionalen Darstellung von G impliziert, nämlich in den $\pm i$-Eigenraum $V_\pm(y)$ von yJ_n. Beide Summanden sind bzgl. der Form $\Omega(u,v) = u^t J_n v$ maximal isotrop. Betrachte nun im Fall $n = 1$ die Menge aller Paare

$$P' \;:=\; \{(z,v) \mid z = yJ_n,\; v \in V_-(y),\; y \in M\}$$

Mittels $(z,v) \mapsto (iz,v)$ ist diese eine Bijektion von P' nach M, denn aus $\det y = 1$ folgt $\det iz = -1$, und aus der $V_-(y)$ definierenden Eigenwertgleichung $zv = -iv$ folgt $(iz)v = +v$. Daß die G-Wirkung sich ebenfalls überträgt ist ebenfalls klar. Die Menge P' läßt sich nun aber auch geometrisch verstehen: sie ist nichts anderes als das homogene Bündel

$$P_- \;:=\; G \times_K V_-(e)\,,$$

in dem man die Nebenklasse $[g,p]$ abbildet auf $(gJ_n g^{-1}J_n^t =: y, p + yp)$. Mit dieser Konstruktion kann man ganz allgemein glatte und normale Einbettungen der klassischen Hermiteschen Räume mit genau zwei Bahnen erhalten (der abgeschlossenen Basis G/K und dem offenen, zu G isomorphen Orbit in Faserrichtung). Diese wiederrum hängen eng zusammen mit den jüngst von Neretin konstruierten Einbettungen symmetrischer Räume in Graßmannsche Mannigfaltigkeiten [Ner99]. Da dies aber zu sehr vom allgemeinen Thema abweicht, möchte ich die genauere Beschreibung dieser Sachverhalte einer anderen noch zu schreibenden Arbeit vorbehalten.

1.3.2 Singuläre Beispiele

Die Glattheit der zugrunde liegenden Varietät M wurde im Beweis der allgemeinen Frobenius-Reziprozität an genau zwei Stellen verwendet. Zum einen garantiert sie wegen Lemma 2 die Gültigkeit des Ergebnisses im Falle der trivialen Gruppenwirkung. Zum anderen braucht man eben diese Eigenschaft, um den Dichtheitssatz von Jacobson zur Darstellbarkeit von Endomorphismen endlich-dimensionaler Teilräume als Differentialoperatoren sowie das Lemma von Dixmier anwenden zu können (dieses wird jedoch erst beim Studium der zentralen Charaktere benützt).

Schlußendlich ist es zwar nicht für den Beweis, wohl aber konzeptionell und für das konkrete Rechnen störend, daß man eine Wahl treffen muß zwischen der Algebra aller Differentialoperatoren $\mathcal{D}(M)$ und denen, die nur von den Funktionen und den Derivationen von M erzeugt werden, $\mathcal{D}(M)^*$ in der Notation von Abschnitt 1.1.4. Die erste Algebra läßt sich zwar definieren, aber nicht bestimmen, kann beliebig unanständige Eigenschaften haben und liefert keine Differentialoperatoren im Sinne der Analysis; die zweite Algebra ist handlicher und analytisch sinnvoll, aber meist zu „klein“.

Gegenstand dieses Abschnitts ist es deshalb, anhand einiger Beispiele diejenigen Effekte zu illustrieren, die bei reduktiven Gruppenwirkungen auf singulären affinen Varietäten auftreten können. Sie zeigen, daß allgemeine Sätze hier nicht zu erwarten sind. Die Algebra der Wahl ist dabei im Grunde immer $\mathcal{D}(M)^*$; über $\mathcal{D}(M)$ kann man nur vereinzelt Aussagen machen, wenn man irgendwie durch eine günstige Wahl der Koordinaten Elemente hieraus „raten“ kann.

Beispiel 9 (Spitzer Doppelkegel). Wir betrachten den spitzen Doppelkegel im $\mathbf{R}^3$

$$X_0 \;:=\; \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 = z^2\}\,.$$

Nach Abschnitt 1.1.1 ist X_0 eine reelle Form des komplexen Kegels

$$X \;:=\; \{(x,y,z) \in \mathbf{C}^3 \mid x^2+y^2 = z^2\}\,,$$

und der singuläre Ort besteht in beiden Fällen genau aus dem Nullpunkt. Folglich können wir den Koordinatenring $\mathbf{C}[X]$ von X mit den komplexwertigen regulären Funktionen $\mathbf{R}[X_0]_\mathbf{C}$ auf X_0 identifizieren. Parametrisiert man X_0 mittels

$$x \;=\; u\cos\theta, \quad y \;=\; u\sin\theta, \quad z \;=\; u,$$

so wird nach einer komplexen Drehung der Ring $A := \mathbf{R}[X_0]_\mathbf{C}$ über $\mathbf{C}$ erzeugt von u, $ue^{i\theta}$ und $ue^{-i\theta}$

$$A \;:=\; \mathbf{R}[X_0]_\mathbf{C} \;\cong\; \mathbf{C}[u, ue^{i\theta}, ue^{-i\theta}]\,.$$

Bevor wir eine bestimmte Gruppenwirkung auf dem Kegel X_0 wählen, bestimmen wir alle seine Derivationen sowie die Wirkung der von ihnen und $\mathbf{R}[X_0]_\mathbf{C}$ erzeugten Algebra $\mathcal{D}(X_0)^*$. Zunächst ist klar, daß die Koordinatenlinien die Derivationen

$$u\partial_u \;=\; x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z \quad \text{und} \quad \partial_\theta \;=\; x\partial_y - y\partial_x$$

erzeugen. Die Algebra $\operatorname{Der} X_0$ enthält aber noch weit mehr Elemente:

Lemma 11 (Derivationen des Kegels)

(1) *Ein Element der Gestalt $q\partial_u$ liegt genau dann in $\operatorname{Der} X_0$, wenn $q \in u \cdot A$;*

(2) *Ein Element der Gestalt $q\partial_\theta$ liegt genau dann in $\operatorname{Der} X_0$, wenn $q \in A$;*

(3) *Ein Element der Gestalt $q_1\partial_u + q_2\partial_\theta$ liegt genau dann in $\operatorname{Der} X_0$, wenn es Summe zweier Derivationen der gerade genannten Gestalt oder in der A-linearen Hülle der beiden Derivationen*

$$R \;:=\; ue^{i\theta}\partial_u + ie^{i\theta}\partial_\theta, \quad S \;:=\; ue^{-i\theta}\partial_u - ie^{-i\theta}\partial_\theta$$

enthalten ist.

Beweis. Zum Beweis verwenden wir Das Kriterium aus Lemma 7. Wir setzen eine Derivation von X_0 an mit $D = q\partial_u$, $q \in \mathbf{R}(X_0)_{\mathbf{C}}$. Wegen der Derivationseigenschaft genügt es, wenn die Bilder der Koordinatenfunktionen unter D in A liegen, denn dann folgt sofort $D(A) \subset A$. Es müssen also

$$D(u) \;=\; q, \quad D(ue^{i\theta}) \;=\; qe^{i\theta}, \quad D(ue^{-i\theta}) \;=\; qe^{-i\theta}$$

Elemente von A sein, d.h. q liegt in A und, vermöge Multiplikation mit $ue^{-i\theta}$ der zweiten Bedingung, qu liegt ebenfalls in A. Schreibt man dann qu als Summe

$$qu \;=\; \sum \alpha\, u^n (ue^{i\theta})^m (ue^{-i\theta})^l,$$

so implizieren die erste und die zweite Bedingung, daß in allen auftretenden Summanden m und l größer Eins sein müssen, d.h.

$$qu \;=\; u^2 \sum \alpha u^n (ue^{i\theta})^{m-1} (ue^{-i\theta})^{l-1} \;=:\; u^2 \cdot a$$

mit einem $a \in A$; es folgt $q = ua$ und damit hat q die behauptete Gestalt. Analog beweist man den zweiten Teil des Lemmas. Für den letzten Teil machen wir den Ansatz $D = q_1\partial_u + q_2\partial_\theta$, was impliziert, daß

$$D(u) \;=\; q_1, \quad D(ue^{i\theta}) \;=\; e^{i\theta}(q_1 + iuq_2), \quad D(ue^{-i\theta}) \;=\; e^{-i\theta}(q_1 - iuq_2)$$

reguläre Funktionen sein sollen. Nun betrachtet man die u-Graduierung von A: wenn $\deg q_1 \neq \deg q_2 + 1$ ist, so haben die beiden Summanden in der ersten und zweiten Bedingung unterschiedlichen u-Grad, müssen also jeder für sich in A liegen, was einer Derivation der soeben beschriebenen Gestalt entspricht. Sei deswegen fortan $\deg q_1 = \deg q_2 + 1$. Insbesondere ist dann $\deg q_1 \geq 1$, ich kann also $q_1 = uq_1'$ setzen. Aus der zweiten Bedingung folgt mittels Multiplikation mit $ue^{i\theta}$, daß $u^2(q_1' + iq_2) \in A$ sein muß; aus der ersten Bedingung $q_1 = q_1'u \in A$ folgt aber $q_1'u^2 \in A$, also durch Subtraktion $u^2 q_2 \in A$. Man überlegt sich leicht, daß hieraus folgt, daß q_2 die Gestalt

$$q_2 \;=\; a_2 + b_2 e^{i\theta} + b_2' e^{-i\theta} + c_2 e^{2i\theta} + c_2' e^{-2i\theta}\,,$$

haben muß, wobei a_2 in A ist und man die anderen Koeffizienten so wählen kann, daß sie zwar in A, aber b_2, b_2' nicht in $u \cdot A$ und c_2, c_2' nicht in $u^2 \cdot A$ liegen. In ähnlicher Weise kann man q_1' darstellen. Weil aber hier bereits uq_1' in A sein muß, verschwinden die beiden letzten Terme:

$$q_1 \;=\; a_1 + b_1 e^{i\theta} + b_1' e^{-i\theta}\,.$$

Schreibt man nun das in der zweiten Bedingung vorkommende Element $ue^{i\theta}(q_1' + iq_2)$ in dieser Darstellung aus und subtrahiert alle Elemente, die trivialerweise in A liegen, so bleibt, daß $ue^{2i\theta}(b_1 + ib_2) + ic_2 e^{i3\theta}u$ in A liegen muß, was nach Wahl der Koeffizienten nicht geht; deswegen ist $c_2 = 0$ und $b_1 + ib_2 = 0$. Ebenso zeigt man $c_2' = 0$ und $b_1' - ib_2' = 0$. Die „Minimallösungen" $b_1 = 1$, $b_2 = i$ und $b_1' = 1$, $b_2' = -i$ entsprechen den Elementen R und S. Für diese berechnen wir für später noch die Produkte

$$RS \;=\; u^2\partial_u^2 + 2u\partial_u + \partial_\theta^2 - i\partial_\theta, \quad SR \;=\; u^2\partial_u^2 + 2u\partial_u + \partial_\theta^2 + i\partial_\theta, \quad [R,S] \;=\; -2i\partial_\theta\,. \tag{4}$$

□

Zur Illustration, wie die Derivationen des Kegels auf seinen regulären Funktionen operieren, dient Abbildung 1. Darin sind alle regulären Funktionen in einem rechteckigen Zeilen- und Spaltenmuster angeordnet; die positive x-Achse beschreibt die wachsenden u-Potenzen, die y-Achse die ganzzahligen Vielfachen von θ im Argument der Exponentialfunktion. Wie man sieht, wird von allen möglichen Besetzungsstellen nur ein (gedrehter) Quadrant tatsächlich belegt: dies liegt daran, daß zwar $ue^{i\theta}$ in A liegt, nicht aber $ue^{2i\theta}$. Die von A und Der X_0 erzeugte Algebra

$\mathcal{D}(X_0)^*$ enthält zunächst die Multiplikation mit allen Koordinatenfunktionen; beginnt man bei der konstanten Funktion Eins im linken Bildteil, so sind dies genau die drei nach rechts zeigenden Pfeile (zwei diagonal, einer horizontal). von jeder anderen Funktion gehen natürlich immer diese drei Pfeile aus; der Übersichtlichkeit halber haben wir sie nur am oberen und unteren Bildrand eingezeichnet, und ansonsten durch ein Sternchen angedeutet (jedes solche steht also für ein nach rechts zeigendes Pfeilkreuz). Interessant ist nun die Wirkung der Derivationen: $u\partial_u$ und ∂_θ sind Multiplikationen mit einer Konstanten und deswegen nicht eingezeichnet. Die einzig nichttrivialen Derivationen sind die Elemente R und S. Sie entsprechen (bis auf Vielfache, die hier nicht interessieren) einem „Auf-" und einem „Absteiger" bei fixiertem u-Grad.

Als mögliche Gruppenwirkungen auf X_0 bieten sich nun drei Kandidaten an. Die kanonische Wirkung der $\mathrm{SO}^0(2,1)$ ist relativ uninteressant, weil vielfachheitenfrei; ihre eindimensionalen Vielfachheitenräume sind wenig geeignet, um irgendwelche Effekte zu demonstrieren (es sei bemerkt, daß die Derivationen R und S eigentlich von dieser Gruppenwirkung stammen). Stattdessen betrachten wir die multiplikative Wirkung von $\mathbf{R}^*$ auf X_0 (von $\mathbf{C}^*$ auf X), sowie die Drehwirkung der $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$ in jeder x-y-Ebene bei festgehaltener z-Koordinate. Diese Gruppenwirkungen haben genau die „Spalten" bzw. die „Zeilen" von A als Vielfachheitenräume. Es gilt:

Proposition 8

(1) *Die Vielfachheitenräume der $\mathbf{R}^*$-Wirkung sind unter $\mathcal{D}^{\mathbf{R}^*}(X_0)^*$ irreduzibel, und die Algebra*

$$\mathcal{D}^{\mathbf{R}^*}(X_0)^* \;=\; \mathbf{C}[R,\, S,\, u\partial_u,\, \partial_\theta]$$

ist nicht abelsch;

(2) *Die Vielfachheitenräume der $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$-Wirkung sind unter $\mathcal{D}^{\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})}(X_0)^*$ zwar nicht irreduzibel, aber auch nicht zerlegbar, keine zwei Vielfachheitenräume enthalten isomorphe Teildarstellungen und die Algebra*

$$\mathcal{D}^{\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})}(X_0)^* \;=\; \mathbf{C}[u,\, u\partial_u,\, \partial_\theta]$$

$\mathcal{D}^{\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})}(X_0)^*$ ist nicht abelsch;

(3) *Die Vielfachheitenräume der $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$-Wirkung sind unter $\mathcal{D}^{\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})}(X_0)$ irreduzibel, und die Algebra $\mathcal{D}^{\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})}(X_0)$ ist nicht abelsch.*

Beweis. Mit Abbildung 1 bleibt hier fast nichts zu beweisen, da sie die Operation von $\mathcal{D}(X_0)^*$ auf A vollständig beschreibt. Betrachten wir zunächst die $\mathbf{R}^*$-Wirkung: weil es keine nichtkonstanten invarianten Funktionen gibt, sind die Vielfachheiten endlich, und die Irreduzibilität der „Spalten" wird durch die invarianten Derivationen R und S bewerkstelligt. Invariante Differentialoperatoren höherer Ordnung als die von den genannten erzeugten kann es in $\mathcal{D}(X_0)^*$ nicht geben, weil es keine zur Multiplikation mit den Koordinatenfunktionen „inversen" Derivationen gibt (etwa der Form ∂_u); somit scheidet die Möglichkeit, in Abbildung 1 etwa erst nach rechts, dann mit R oder S herauf oder herunter und dann in die ursprüngliche Spalte zurück zugehen, aus. Wegen Gleichung 4 hätte man ∂_θ in der Liste der erzeugenden Elemente auch weglassen können.

Für die $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$-Wirkung ist u eine invariante Funktion, deswegen sind die Vielfachheiten unendlich. Die einzigen G-invarianten Derivationen sind Produkte aus u mit $u\partial_u$ und ∂_θ. Alle aus R, S und den Koordinatenfunktionen konstruierbaren „Pfade" in Abbildung 1, die in der gleichen Zeile anfangen und aufhören, lassen sich als Kombination einer Multiplikation mit einer u-Potenz und den Elementen $u\partial_u$, ∂_θ ausdrücken, deswegen liefern sie keine neuen G-invarianten Differentialoperatoren. Jeder Teilraum, der aus Elementen mit u-Grad größer gleich einer vorgegebenen natürlichen Zahl besteht, ist invariant; aus dem gleichen Grunde sind die Vielfachheitenräume nicht zerlegbar. Zwei solche können keine isomorphen Teildarstellungen haben, weil sich zwei Zeilen immer in ihrem ∂_θ-Eigenwert unterscheiden.

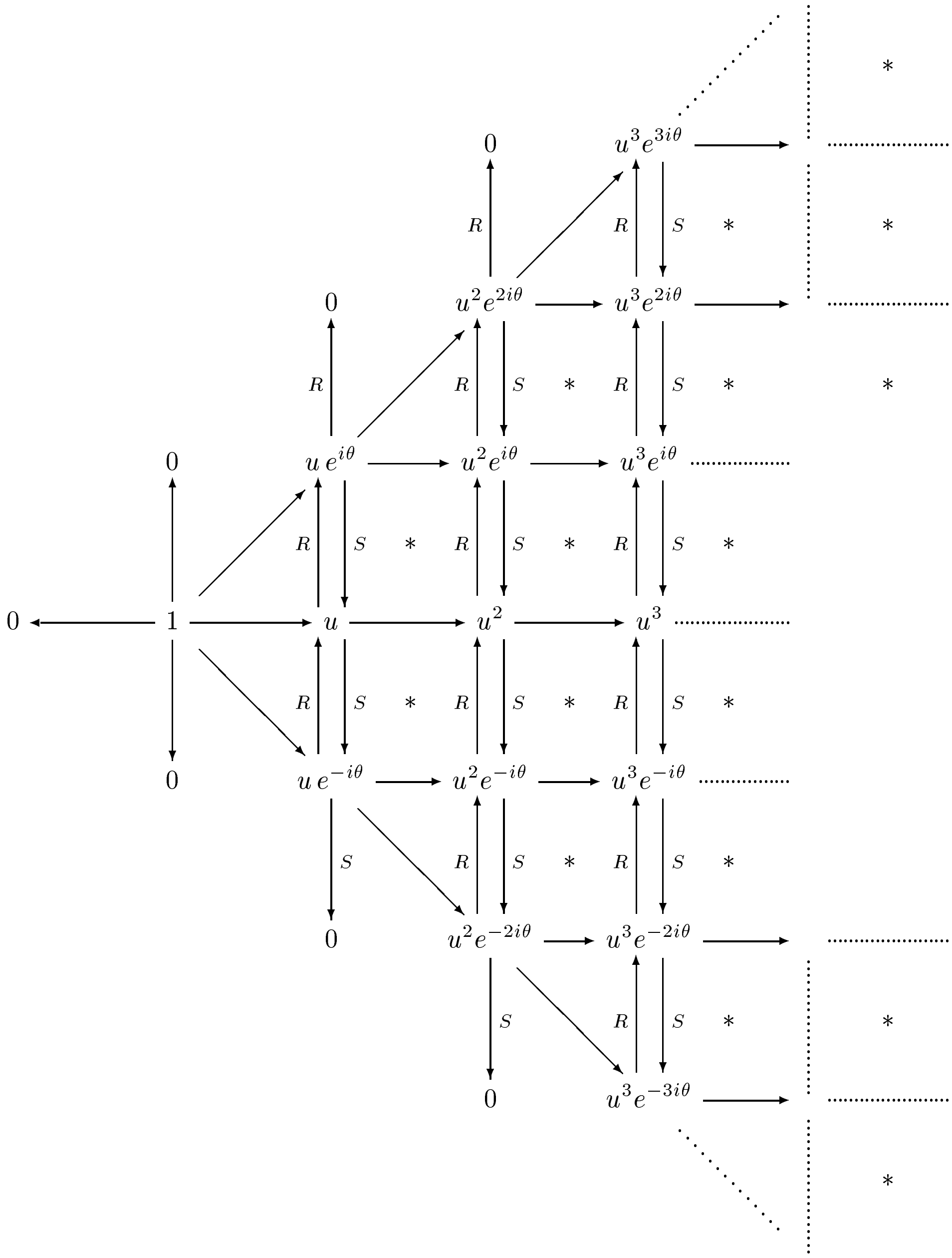

Abbildung 1: Koordinatenring des Doppelkegels $z^2 = x^2 + y^2$

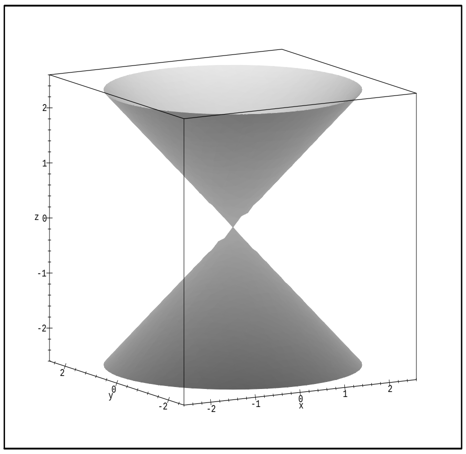

Abbildung 2: $z^2 = x^2 + y^2$

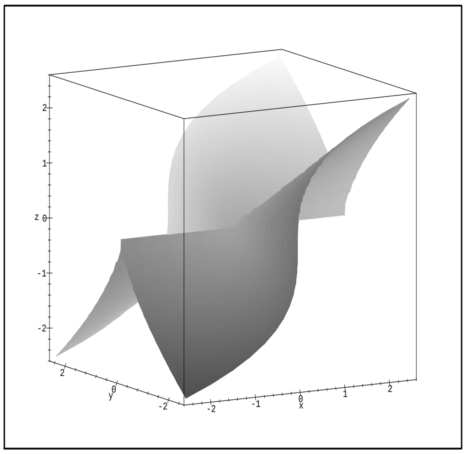

Abbildung 3: $z^3 = xy^2$

Wirklich zu beweisen gibt es nun etwas bei der letzten Aussage. Die Algebra $\mathcal{D}(X_0)$ aller algebraischer Differentialoperatoren des Kegels kann man nicht bestimmen; aber wir können einen $\mathrm{SO}(2, \mathbf{R})$-invarianten Operator hinschreiben, mit dem die Vielfachheitenräume irreduzibel werden. Der Operator

$$D \ := \ \frac{1}{u}(u\partial_u + i\partial_\theta)(u\partial_u - i\partial_\theta)$$

ist genau so gewählt, daß er den u-Grad um Eins absenkt, sofern er nicht auf ein Element der Gestalt $u^n e^{\pm in\theta}$ wirkt, welches er annuliert. Mit dem Kriterium aus Lemma 7 ist D ein zulässiger Differentialoperator zweiter Ordnung und offensichtlich invariant. In der Tat, in die Koordinaten x, y und z zurückübersetzt schreibt sich D als

$$D \ = \ z(\partial_x^2 + \partial_y^2)$$

und verdient damit den Namen „algebraisch“. □

Dieses Beispiel ist noch relativ gutmütig, und man könnte vermuten, daß Satz 5 vielleicht in einer schwächeren Version (etwa Unzerlegbarkeit statt Irreduzibilität) gilt. Das folgende Beispiel einer kubischen Regefläche wird zeigen, daß sich diese Hoffnung nicht erfüllt.

Bemerkung 12. Durch Auflösen der Singularität kann man einsehen, daß sich dieses Beispiel noch mit einer anderen Technik behandeln läßt. Es ist nämlich X isomorph zu $\mathbf{C}^2/\{1_2, -1_2\}$. Wählt man auf $\mathbf{C}^2$ Koordinaten v, w, dann wird der Koordinatenring des Quotienten erzeugt von $a := v^2$, $b := vw$ und $c := w^2$ mit der Relation $ac = b^2$. Damit entspricht a dem Element $ue^{i\theta}$, b ist u und c ist $ue^{-i\theta}$. Nun folgt aus neueren Ergebnissen von G. Schwarz [Sch95, 6.4], daß der Ring der Differentialoperatoren auf dem Quotienten nach einer endlichen Gruppe W, welche keine Pseudospiegelungen enthält, von den W-invarianten Differentialoperatoren erzeugt wird, hier also v^2, vw, w^2, $v\partial_v$, $w\partial_w$, $v\partial_w$, $w\partial_v$, ∂_v^2, ∂_w^2, $\partial_v\partial_w$. Die beiden betrachteten Gruppenwirkungen entsprechen dann der Wirkung von $\mathbf{C}^*$ auf $\mathbf{C}^2$ mit Gewichten $(1,1)$ bzw. $(1,-1)$, $\mathcal{D}^G(X)$ wird also von $v\partial_v$, $w\partial_w$, $w\partial_v$, $v\partial_w$ bzw. vw, $v\partial_v$, $w\partial_w$, $\partial_v\partial_w$ erzeugt.

Bemerkung 13. Ein kurzer Blick auf den (glatten !) unendlich langen Zylinder Z mit Koordinatenring $\mathbf{C}[u, e^{i\theta}, e^{-i\theta}]$ erklärt, warum hier für die S^1-Wirkung Irreduzibilität vorliegt: in dieser Situation ist nämlich ∂_u eine G-invariante Derivation.

Beispiel 10 (Kubische Regelfläche $z^3 = xy^2$). Wir betrachten die irreduzible kubische Regelfläche im $\mathbf{R}^3$ (vgl. Abb. 3)

$$Y_0 \ := \ \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^3 = xy^2\}\,.$$

Sie ist eine reelle Form der komplexen Fläche

$$Y \ := \ \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^3 = xy^2\}\,,$$

und der singuläre Ort besteht in beiden Fällen aus der x-Achse. Wir identifizieren deswegen wieder $\mathbf{C}[Y]$ mit $\mathbf{R}[Y_0]_\mathbf{C}$ und wählen für Y_0 die Parametrisierung

$$x \ = \ rs^2, \quad y \ = \ r/s, \quad z \ = \ r,$$

erhalten also als reguläre Funktionen

$$B \ := \ \mathbf{R}[Y_0]_\mathbf{C} \ \cong \ \mathbf{C}[r, r/s, rs^2]\,,$$

die wir ebenfalls graphisch dargestellt haben (Abb. 4). Um die Wirkung der Algebra $\mathcal{D}(Y_0)^*$ hierauf zu beschreiben, bestimmen wir wieder die Derivationen $\operatorname{Der} Y_0$. Den Koordinaten entsprechen zunächst die Derivationen

$$r\partial_r \ = \ x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z \quad \text{und} \quad s\partial_s \ = \ 2x\partial_x - y\partial_y\,.$$

Sodann bestimmen wir mit der gleichen Methode wie in Lemma 11 alle Derivationen von B, weswegen wir auf den Beweis verzichten:

Lemma 12 (Derivationen der Regelfläche** $z^3 = xy^2$**)

(1) *Ein Element der Gestalt $q\partial_r$ liegt genau dann in $\operatorname{Der} Y_0$, wenn*

$$q \in C \ := \ B - \{\mathbf{C} \cdot r^n s^m \mid 2n = m \text{ oder } n = -m\}\,;$$

(2) *Ein Element der Gestalt $q\partial_s$ liegt genau dann in $\operatorname{Der} Y_0$, wenn $q \in C$ oder $q \in s \cdot B$;*

(3) *Ein Element der Gestalt $q_1\partial_r + q_2\partial_s$ liegt genau dann in $\operatorname{Der} Y_0$, wenn es Summe zweier Derivationen der gerade genannten Gestalt oder in der B-linearen Hülle der Derivation*

$$D \ := \ \frac{r^2}{s^2}\partial_r + \frac{r}{s}\partial_s$$

enthalten ist.

□

Insbesondere gibt es weder den r- noch den s-Grad absenkende Derivationen, und nur die relativ uninteressanten Elemente $r\partial_r$ und $s\partial_s$ erhalten den Grad. Die Wirkung von D ist (bis auf von Null verschiedene Vielfache) in Abbildung 4 dargestellt; im Gegensatz zu zu den Elementen R und S, die beim Kegel aufgetreten waren, verändert D auch den "Spaltengrad". Wegen der geringeren Symmetrie haben wir als Gruppenwirkung hier nur die Wahl zwischen der multiplikativen $\mathbf{R}^*$-Wirkung oder der der s-Koordinate entsprechenden $\mathbf{R}^*$-Wirkung in jeder x-y-Ebene.

Proposition 9

(1) *Die Vielfachheitenräume der multiplikativen $\mathbf{R}^*$-Wirkung zerfallen unter der Wirkung der abelschen Algebra*

$$\mathcal{D}^{\mathbf{R}^*}(Y_0)^* \ = \ \mathbf{C}[r\partial_r,\, s\partial_s]$$

in eindimensionale irreduzible Darstellungen;

(2) *Die Vielfachheitenräume der s-Wirkung sind unter $\mathcal{D}^s(Y_0)^*$ weder irreduzibel noch zerlegbar, und keine zwei Vielfachheitenräume enthalten isomorphe Teildarstellungen der Algebra*

$$\mathcal{D}^s(Y_0)^* \;=\; \mathbf{C}[r,\, r\partial_r,\, s\partial_s]\,.$$

Beweis. Die beiden Behauptungen überlegt man sich leicht anhand von Abbildung 4 und dem vorangegangenen Lemma. Wir bemerken kurz, daß man hier nach dem gleichen Schema wie für den Kegel invariante Differentialoperatoren hinschreiben kann, die nicht in $\mathcal{D}(Y_0)^*$ liegen; zum Beispiel ist

$$T \;:=\; \frac{1}{s}(2r\partial_r - s\partial_s)(r\partial_r + s\partial_s) \;=\; 9z^2\partial^2_{xy} + 3y^2\partial^2_{yz} + 6xy\partial^2_{xz} + 2y\partial_y + 2zy\partial^2_{zz}$$

ein Operator, welcher unter der skalaren $\mathbf{R}^*$-Wirkung invariant ist, den s-Grad um Eins absenkt und die „Lücken“ im Koordinatenring gerade auf Null abbildet. □

Die erste Aussage ist ein Gegenbeispiel zu Proposition 5 im singulären Fall: die Algebra $\mathcal{D}^G(M)^*$ ist hier abelsch, obwohl die Wirkung *nicht* vielfachheitenfrei ist.

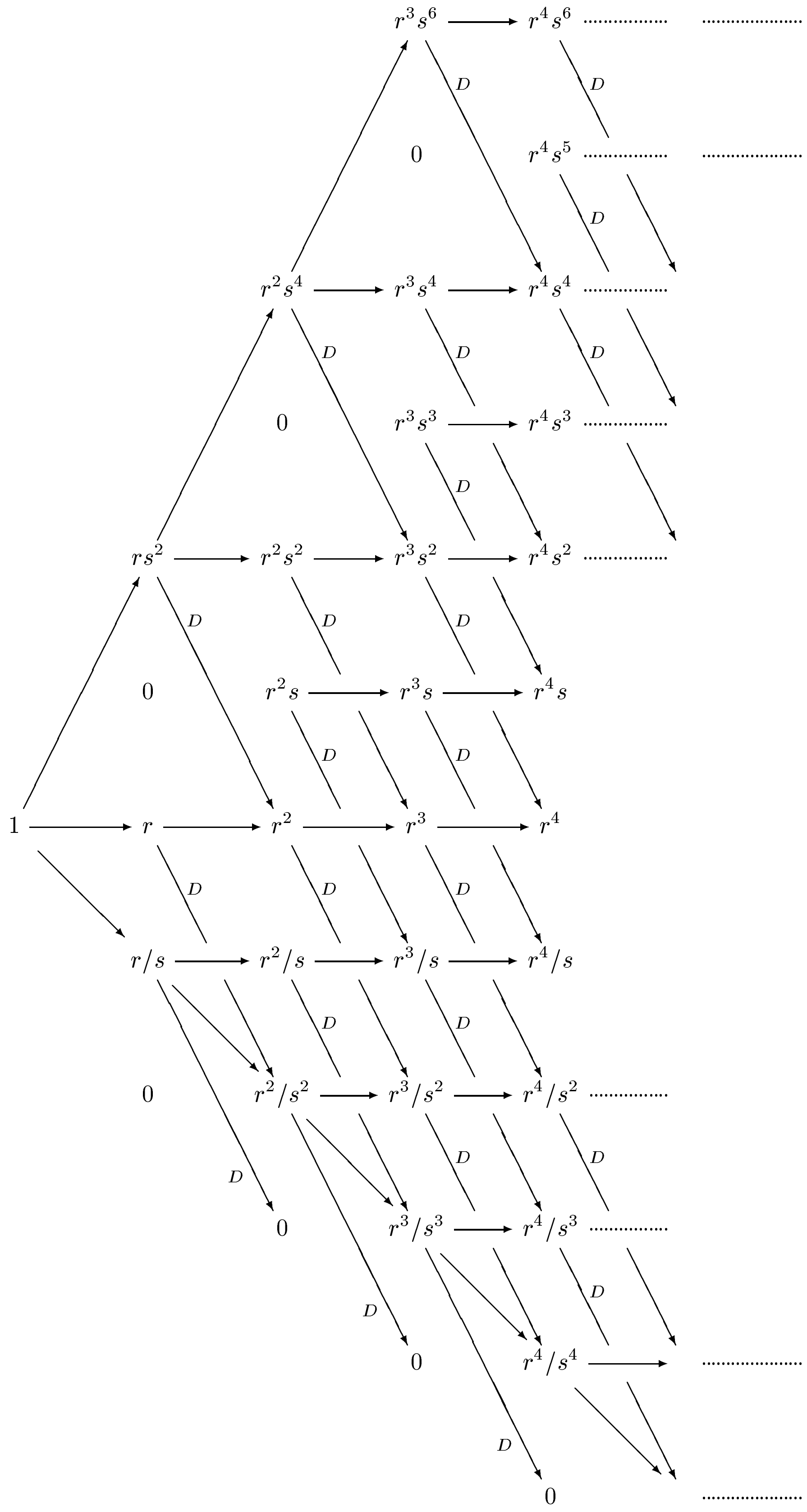

Abbildung 4: Koordinatenring der Regelfläche $z^3 = xy^2$

2 Zur Bedeutung der Geometrie des Kotangentialbündels

2.1 Bündelinvarianten und Differentialoperatoren der Basis

2.1.1 Einige Ergebnisse aus der Invariantentheorie

Hat man eine G-Wirkung auf einer Varietät M gegeben, so ist eine natürliche Frage die nach einer möglichst feinen Parametrisierung des Orbitraums. Gesucht wird also eine auf den Bahnen konstante Funktion aus $\mathbf{C}[M]$, die auf zwei gegebenen disjunkten Bahnen verschiedene Werte annimmt. Es ist bekannt, daß eine solche immer für endliche Gruppen und für kompakte Lie-Gruppen, die auf reellen Vektorräumen wirken, existiert (vgl. [OV90, Thm.3, S.133]). Das folgende Beispiel zeigt jedoch, daß in der Kategorie der komplexen algebraischen Gruppen ein solcher Satz nicht gelten kann: betrachtet man nämlich die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ mit der Konjugationswirkung auf den $n \times n$-Matrizen $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$, so bestehen die Orbits aus den Ähnlichkeitsklassen von Matrizen und ihr Invariantenring wird genau von den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms erzeugt. Hat jedoch eine Matrix die Jordansche Normalform $X_J = X_S + X_N$, wobei X_S bzw. X_N der halbeinfache bzw. nilpotente Anteil sei, so ist klar, daß X_S und X_J das gleiche charakteristische Polynom haben, sich also nicht durch Invarianten trennen lassen. Bekanntlich wird die Aussage aber richtig, wenn man sich auf die halbeinfachen Matrizen beschränkt, die immerhin in $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ dicht liegen. Allgemein definiert man nun:

Definition 1. Man sagt, daß die invarianten Funktionen $\mathbf{C}[M]^G$ Orbits in allgemeiner Lage trennen, wenn es eine offene, nichtleere und dichte Teilmenge M_0 von M gibt derart, daß $\mathbf{C}[M]^G$ nichtäquivalente Punkte aus M_0 trennt.

In der Praxis ist diese Eigenschaft bereits völlig ausreichend. Sie hat den Vorteil, daß man sie in eine algebraische Bedingung an die Gruppenwirkung übersetzen kann (vergleiche hierzu die Definition 8, S. 16):

Proposition 1 (Trennen von Orbits in allg. Lage [PSV94, Thm 3.4, S.166])
Es wirke die reduktive komplexe alg. Gruppe G auf der irreduziblen affinen Varietät M. Dann trennt $\mathbf{C}[M]^G$ genau dann die Orbits in allgemeiner Lage, wenn $\mathbf{C}(M)^G$ der Quotientenkörper von $\mathbf{C}[M]^G$ ist. In diesem Fall reichen hierfür bereits endlich viele Invarianten aus, und der Transzendenzgrad von $\mathbf{C}[M]^G$ ist gleich der Kodimension eines Orbits in allgemeiner Lage

$$\mathrm{tr\,deg}\, \mathbf{C}[M]^G \;=\; \mathrm{codim}\, Gx\,.$$

□

Bemerkung 1. Wenn die invarianten Funktionen $\mathbf{C}[M]^G$ Orbits in allgemeiner Lage trennen, so kann der algebraische Quotient $M//G$ wie folgt realisiert werden: man wähle ein Erzeugendensystem der Invarianten $f_1, \ldots, f_n$ und betrachte die Abbildung

$$M \longrightarrow \mathbf{C}^n, \quad x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))\,.$$

Dann ist $M//G$ isomorph zum Bild dieses Morphismus, welches wegen Proposition 1 (Kap. 1) automatisch abgeschlossen ist (vgl. [PSV94, 4.4, S.188]).

Freilich ist die äquivalente Bedingung der vorhergehenden Proposition meistens nicht leicht nachzuprüfen. In zwei Situationen, die uns besonders interessieren, ist die Antwort jedoch bekannt:

Satz 1 (Invarianten der koadjungierten Darstellung)
Betrachte die koadjungierte Darstellung einer reduktiven komplexen alg. Gruppe G auf dem Dualraum ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g}^*$. Dann trennt $\mathbf{C}[\mathfrak{g}]^{\mathrm{Ad}^* G}$ die $\mathrm{Ad}^* G$-Orbits in allgemeiner Lage von $\mathfrak{g}^*$.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes von B. Kostant (für die adjungierte Darstellung halbeinfacher Lie-Algebren) findet sich in dessen klassischer Arbeit zur Darstellungstheorie auf Polynomringen, nämlich [Kos63, Prop. 10, S.355], wenn man noch berücksichtigt, daß die halbeinfachen Elemente von $\mathfrak{g}$ hierin dicht liegen. Zerlegt man nun $\mathfrak{g}$ in seinen zentralen und seinen halbeinfachen Anteil

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_s$$

und wählt auf $\mathfrak{g}_s$ die (nichtentartete) Killingform sowie auf $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ eine beliebige nicht entartete symmetrische Bilinearform, so erhält man insgesamt eine $\operatorname{Ad} G$-invariante Bilinearform auf $\mathfrak{g}$, die nicht entartet ist und deswegen die Äquivalenz von adjungierter und koadjungierter Darstellung realisiert. Bei dieser Gelegenheit sei auf das relativ neue Lehrbuch [CG97, 6.7] hingewiesen, in dem sich wohl die erste geschlossene Darstellung der Kostantschen Arbeit (neben der Originalarbeit selbst) findet, weswegen es gleichermaßen zum Nachschlagen des genannten Sachverhalts empfohlen sei. □

Satz 2 (Invarianten des Kotangentialbündels [Kno94, Lemma 9.3])
Sei M eine irreduzible affine glatte Varietät, auf der eine reduktive zusammenhängende komplexe alg. Gruppe G wirke. Dann trennen die Invarianten des Kotangentialbündels $\mathbf{C}[T^*M]^G$ bzgl. der dort induzierten G-Wirkung die G-Orbits in allgemeiner Lage von T^*M. □

Man beachte, daß die letzte Aussage unabhängig davon gilt, ob die G-Invarianten auf M dort die Orbits trennen.

2.1.2 Die Momentabbildung $T^*M \to \mathfrak{g}^*$

Sei von nun an G eine zusammenhängende alg. Gruppe, die auf einer glatten Varietät M wirke. Für jeden Punkt $m \in M$ betrachten wir den Morphismus $G \to M,\ g \longmapsto gm$. Durch Differentiation im Einselement von G erhält man dann eine lineare Abbildung

$$\Psi_m : \ \mathfrak{g} \longrightarrow T_m M\,,$$

die sog. *Tangentialabbildung in m*, und kann die hierzu duale Abbildung bilden,

$$\Psi_m^* : \ T_m^* M \longrightarrow \mathfrak{g}^*\,,$$

welche wir die *Kotangentialabbildung in m* nennen. Faßt man in beiden Fällen diese Abbildungen für alle Basispunkte $m \in M$ zusammen, so erhält man insgesamt Abbildungen

$$\mathfrak{g} \times M \longrightarrow TM \text{ und } T^*M \longrightarrow \mathfrak{g}^* \times M.$$

Indem man in letzterer den Basispunkt m „vergißt" erhält man die *Momentabbildung* ψ : $T^*M \to \mathfrak{g}^*$. Sie hat die Eigenschaft, G-äquivariant zu sein und läßt sich anhand der geschlossenen Formel

$$\psi : \ T^*M \to \mathfrak{g}^*, \quad T^*M \ni \alpha \longmapsto [\xi \longmapsto \alpha(\xi_{\pi(\alpha)})]$$

schreiben. Dabei ist mit π die kanonische Projektion $T^*M \to M$ gemeint und das Element ξ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit dem von ihm erzeugten Vektorfeld auf M identifiziert. Die Momentabbildung ψ ist die „kommutative" Variante der Operatordarstellung von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$: der Homomorphismus $\tilde{\psi}$: $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{D}(M)$ liefert eine Abbildung auf den entsprechenden graduierten Ringen, welche wir ebenfalls $\tilde{\psi}$ nennen wollen,

$$\tilde{\psi} : \ \mathbf{C}[\mathfrak{g}^*] \longrightarrow \mathbf{C}[T^*M]\,,$$

und die genau der Komorphismus der Momentabbildung ψ ist. Dies möge als Motivation dienen, warum zu erwarten ist, daß die Momentabbildung zum Studium der G-invarianten Differentialoperatoren geeignet ist. Zunächst wollen wir aber noch das Bild der Momentabbildung bestimmen. Es bezeichne G_m die Isotropie-Gruppe von M im Punkte m, d.h. die Menge aller $g \in G$, für die $m = gm$ gilt, und $\mathfrak{g}_m$ ihre Lie-Algebra. Diese ist genau der Kern der Tangentialabbildung in m,

$$\mathfrak{g}_m \;=\; \ker \Psi_m\,.$$

Das Bild der Kotangentialabbildung Ψ_m^*in m ist $\mathfrak{g}_m^\perp$, der Unterraum von $\mathfrak{g}^*$ aller Linearformen, die auf $\mathfrak{g}_m$ verschwinden. Damit ergibt sich für das Bild der Momentabbildung

$$\psi(T^*M) \;=\; \bigcup_{m\,\in M} \mathfrak{g}_m^\perp \subset \mathfrak{g}^*\,.$$

Dies ist offensichtlich eine Vereinigung von Bahnen unter der koadjungierten Darstellung, weil

$$\mathfrak{g}_{gm}^\perp = \mathrm{Ad}^* g\, \mathfrak{g}_m^\perp$$

gilt (vgl. zu diesem Abschnitt [BB82]). Für ein detailliertes Studium der Momentabbildung ist allerding weniger das volle Bild als vielmehr das Bild einzelner G-Orbiten relevant. Zu deren Studium macht es Sinn, zum Quotienten der Momentabbildung überzugehen. Weil die Momentabbildung G-äquivariant ist, definiert der Homomorphismus $\tilde{\psi}_G : \mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]^G \to \mathbf{C}[T^*M]^G$ einen Morphismus $\psi_G : T^*M//G \to \mathfrak{g}^*//G$. Zwischen T^*M und $\mathfrak{g}^*$ führen wir noch den Abschluß des Bildes der Momentabbildung ein. Insgesamt erhält man dann das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
T^*M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{ct}}"'] & \overline{\psi(T^*M)} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathfrak{g}^* \arrow[d, "\pi_{\mathfrak{g}^*}"] \\
T^*M//G \arrow[r, "\psi_G"] & \overline{\psi(T^*M)}//G \arrow[r, hook] & \mathfrak{g}^*//G
\end{tikzcd}$$

Hierbei sei $\pi_{\mathrm{ct}} : T^*M \to T^*M//G$ der algebraische Quotient des Kotangentialbündels (der Index „ct" soll genau hieran erinnern), $\pi_{\mathfrak{g}^*} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*//G$ der algebraische Quotient der dualen Lie-Algebra bezüglich der koadjungierten Darstellung (von dem wir natürlich wissen, daß er sich mittels des Harish-Chandra-Homomorphismus als $\mathfrak{h}^*/W$ realisieren läßt); nach Proposition 1 (Kap. 1) kann der Quotient von $\overline{\psi(T^*M)}$ als die Einschränkung von $\pi_{\mathfrak{g}^*}$ realisiert werden, weswegen wir hierfür keine getrennte Notation eingeführt haben. Von Bedeutung ist nun vor allem der Quotient ψ_G der Momentabbildung. Um ihn geometrisch zu verstehen, ist es nützlich, wenn die Momentabbildung ψ die Eigenschaft hat, generische abgeschlossene Bahnen auf abgeschlossene Bahnen abzubilden (wir nennen sie dann *abgeschlossen auf den generischen G-Bahnen*). Nach [BB82, 4.4.] gilt dies zum Beispiel für vollständige homogene Räume M; nicht homogene Beispiele werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.

2.1.3 Der Spezialfall einer vielfachheitenfreien Wirkung

Das Hauptergebnis dieses Abschnittes wird es sein zu beweisen, daß die Wirkung von G auf M genau dann vielfachheitenfrei ist, wenn der Quotient ψ_G der Momentabbildung eine endliche Abbildung ist. Dieser Satz wurde vor allem von den ähnlich lautenden Ergebnissen der Arbeit [BJLR97] motiviert, die sich mit den Wirkungen kompakter Gruppen auf Heisenberg-Gruppen befaßt. In den nun folgenden Beispielen werden wir unser Ergebnis zunächst illustrieren und die Unterschiede zur genannten Arbeit herausarbeiten.

Beispiel 1. Wir betrachten die zweidimensionale Standard-Darstellung der $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ auf dem $\mathbf{C}^2 = V$. Die homogenen Polynome vom Grad k bilden eine irreduzible $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$-Darstellung, und zwei solche sind für $k \neq k'$ nicht äquivalent; die betrachtete Wirkung ist also vielfachheitenfrei. Das Kotangentialbündel ist $T^*M = V \times V^* \cong V \times V$, da die Darstellung V selbstdual ist.

Somit können wir die Wirkung des Gruppenelements $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ auf dem Paar von Vektoren (p,q) des Kotangentialbündel realisieren als

$$g\,(q,p) \;=\; (g\,q,\, g\,p)\,.$$

Liegen zwei Paare von Vektoren in der gleichen Bahn, so schreiben wir hierfür $(p,q) \sim (p',q')$. Auf $V \times V$ gibt es genau eine G-invariante Funktion, nämlich die Determinante der von p und q gebildeten Matrix:

$$\det(q,p) \;:=\; \det\begin{pmatrix} q_1 & p_1 \\ q_2 & p_2 \end{pmatrix} \;=\; q_1p_2 - q_2p_1\,.$$

Mit ihrer Hilfe kann man den Orbitraum parametrisieren.

Proposition 2 (Parametrisierung des Orbitraums [Kra85, Kap. I.4.])
(1) *Gilt* $\det(q,p) =: \lambda \neq 0$, *so ist*

$$(q,p) \;\sim\; \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\lambda\end{pmatrix}\right)\;;$$

(2) *Es ist* $\det(q,p) = 0$ *genau dann, wenn p und q linear abhängig sind. In diesem Fall gibt es unendlich viele Bahnen, für die man als Repräsentanten wählen kann:*

$$\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right),\quad \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right),\quad \left(\begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\ \textit{mit}\ \mu \in \mathbf{C}\,.$$

□

Die Orbits durch Paare linear unabhängiger Vektoren (q,p) sind abgeschlossen, in allgemeiner Lage und werden in der Tat von der Invariante $\det(q,p)$ getrennt. Der Abschluß eines „singulären Orbits“ enthält immer den Nullpunkt, deswegen sind sie alle (bis auf den Nullpunkt selber) nicht abgeschlossen. Identifiziert man anhand der Killing-Form $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ mit $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})^*$, so kann man die Momentabbildung in den Koordinaten von q und p ausdrücken. Hierzu bildet man aus (q,p) zunächst die Matrix

$$(q,p) \;\longmapsto\; \begin{pmatrix} q_1p_2 & -q_1p_1 \\ q_2p_2 & -q_2p_1 \end{pmatrix}$$

und nimmt sodann ihren spurfreien Anteil, d.h. man erhält insgesamt

$$\psi:\ V \times V \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbf{C}),\quad (q,p) \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(q_1p_2 + q_2p_1) & -q_1p_1 \\ q_2p_2 & -\frac{1}{2}(q_1p_2 + q_2p_1) \end{pmatrix}\,.$$

Man überzeugt sich, daß diese Abbildung – wie sie sollte – bezüglich der adjungierten Darstellung von $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ auf $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ äquivariant ist. Berechnen wir nun die Bilder der Bahn-Repräsentanten unter der Momentabbildung. Es ergibt sich folgendes Bild:

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\lambda\end{pmatrix}\right) \overset{\psi}{\longmapsto} \begin{pmatrix}\lambda/2 & 0\\ 0 & -\lambda/2\end{pmatrix},\quad \left(\begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \overset{\psi}{\longmapsto} \begin{pmatrix}0 & -\mu\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right),\ \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) \overset{\psi}{\longmapsto} \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Die Repräsentanten der generischen Orbits werden auf halbeinfache Lie-Algebra-Elemente abgebildet, deren Bahnen in der Tat abgeschlossen sind, zwei singuläre Bahnen werden auf das

Null-Element geschickt, die restlichen singuläre Bahnen haben nilpotentes Bild. Die Momentabbildung ist also generisch abgeschlossen auf den G-Bahnen. Allerdings ist sie dort nicht bijektiv: denn wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda/2 & 0 \\ 0 & -\lambda/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\lambda/2 & 0 \\ 0 & \lambda/2 \end{pmatrix}$$

werden die in $V \times V$ disjunkten Bahnen zu $\det(q,p) = \lambda$ und $\det(q,p) = -\lambda$ auf ein- und dieselbe adjungierte Bahn in $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ abgebildet. Es ist also *falsch*, daß für eine vielfachheitenfreie Wirkung die Momentabbildung bijektiv auf den abgeschlossenen Orbits wäre, obwohl dies für Gelfand-Paare *richtig* ist ([BJLR97, Thm. 1.3]). Dieses Bild bestätigt sich, wenn man die geometrische Konstruktion des Quotienten, wie in Bemerkung 1 skizziert, verwendet: der Invariantenring von $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ wird von der Determinante erzeugt

$$\det \begin{pmatrix} \lambda/2 & 0 \\ 0 & -\lambda/2 \end{pmatrix} = -\frac{\lambda^2}{4}\,.$$

Zieht man diese auf $V \times V \cong T^*M$ zurück, erhalt man demzufolge

$$\psi^*(\det)(p,q) = -\frac{\det(p,q)^2}{4}\,.$$

Diese Funktion trennt wie gesehen nicht die generischen Orbits von $V \times V$, erzeugt also nicht $\mathbf{C}[V \times V]^G$. Wohl aber ist wegen

$$\mathbf{C}[\det(p,q)] = \det(p,q) \cdot \mathbf{C}[\det(p,q)^2]$$

der Invariantenring von $V \times V$ als Modul endlich erzeugt über dem Invariantenring von $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$, d.h. der Quotient der Momentabbildung ist endlich.

Beispiel 2. Ein einfacher gebautes, aber trotzdem instruktives Beispiel erhält man, wenn man die multiplikative Wirkung von $G = \mathbf{C}^*$ auf dem $\mathbf{C}^n = V_n$ betrachtet. Die Vielfachheiten sind immer endlich und genau für $n = 1$ immer gleich eins. Schreibe das Kotangentialbündel als $T^*M = V_n \times V_n^*$ mit der Wirkung

$$\lambda(w,z) = (\lambda w,\, \lambda^{-1} z)\,.$$

Invariant sind demnach alle Produkte der Koordinaten $w_i z_j$, $i,j = 1,\dots,n$. Die Momentabbildung drückt sich in den Koordinaten von w und z aus

$$\psi(w,z) = \textstyle\sum_{k=1}^n w_k z_k\,.$$

Die Lie-Algebra ist isomorph zu $\mathbf{C}$, und weil die Ausgangsgruppe abelsch war, ist die Konjugationswirkung hierauf trivial, die Bahnen sind also einfach Punkte. Entsprechend ist der Invariantenring gleich dem ganzen Polynomring, $\mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]^G = \mathbf{C}[x]$. Hier offenbart sich nun das grundlegend unterschiedliche Verhalten der Fälle $n = 1$ und $n > 1$: bei $n = 1$ erhält man durch Zurückziehen des Invariantenrings den vollen Invariantenring des Kotangentialbündels

$$\mathbf{C}[V_1 \times V_1^*]^G = \mathbf{C}[z_1 w_1]$$

und in der Faser $\psi^{-1}(x)$ liegt für $x \neq 0$ immer genau eine abgeschlossene Bahn. Dagegen im Fall $n = 2$ z.B. ist natürlich

$$\mathbf{C}[V_1 \times V_1^*]^G = \mathbf{C}[z_1 w_1, z_1 w_2, z_2 w_1, z_2 w_2]$$

nicht als Modul über $\mathbf{C}[z_1 w_1 + z_2 w_2]$ endlich erzeugt, und zu $z_1 w_1 + z_2 w_2 = \mathrm{const}$ gehören unendlich viele abgeschlossene Bahnen.

Wir kommen nun zum Beweis des angekündigten Satzes.

Satz 3 (Geometrisches Kriterium für vielfachheitenfreie Wirkungen)
Die zusammenhängende komplexe algebraische Gruppe G wirkt genau dann auf der glatten irreduziblen affinen Varietät M vielfachheitenfrei, wenn der Quotient der Momentabbildung

$$\psi_G : \quad T^*M//G \longrightarrow \mathfrak{g}^*//G$$

eine endliche Abbildung ist, d.h. wenn $\mathbf{C}[T^*M]^G$ ein endlich erzeugter $\mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]^G$-Modul ist.

Beweis. Wenn G auf M vielfachheitenfrei wirkt, dann ist $\mathcal{D}^G(M)$ abelsch, stimmt also mit $\mathcal{Z}(M)$ überein. Nach dem bereits zitierten Satz 8 von F. Knop (S. 18) ist aber $\mathcal{Z}(M)$ immer ein endlich erzeugter $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-Modul. Wegen $\operatorname{gr}\mathcal{D}^G(M) = \mathbf{C}[T^*M]^G$ und $\operatorname{gr}\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^*//G = \mathfrak{h}^*/W$ folgt damit die Behauptung.

Sei nun andererseits $\mathbf{C}[T^*M]^G$ ein endlich erzeugter $\mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]^G$-Modul, d.h. in der nichtkommutativen Variante $\mathcal{D}^G(M)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-Modul. Wähle ein $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-Generatorensystem $D_1, \ldots, D_m$ von $\mathcal{D}^G(M)$. Es läßt sich nun jedes Element $D \in \mathcal{D}^G(M)$ schreiben als eine Linearkombination $D = z_1D_1 + \ldots + z_mD_m$ mit Koeffizienten z_i aus $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Nach dem Satz über die Frobenius-Zerlegung (Satz 5, S. 13) wirkt $\mathcal{D}^G(M)$ auf jedem Vielfachheitenraum $\mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ irreduzibel. Wählt man nun irgendein $v \in \mathbf{C}[M]^N(\lambda) - \{0\}$, so muß insgesamt $\mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ in der linearen Hülle von $D_1v, \ldots, D_mv$ liegen, da ja $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ skalar wirkt. Insbesondere gilt somit für jedes λ die Abschätzung $\dim \mathbf{C}[M]^N(\lambda) \leq m$, woraus mit Proposition 6 (S. 17) folgt, daß G vielfachheitenfrei wirkt. □

Bemerkung 2. In Satz 3 kann man ψ_G auch durch seine Einschränkung auf den Quotienten des Abschlusses des Bildes der Momentabbildung

$$\psi_G : \quad T^*M//G \longrightarrow \overline{\psi(T^*M)}//G$$

ersetzen (vgl. mit den Bemerkungen zu Beginn von Abschnitt 6 in [Kno90]).

Das folgende Korollar folgt aus den Standardeigenschaften endlicher Morphismen (vgl. z.B. [Sha77, I.5.3]).

Korollar 1
Wenn G auf M unter den Voraussetzungen des vorherigen Satzes vielfachheitenfrei wirkt, dann ist die Abbildung $\psi_G : T^*M//G \longrightarrow \mathfrak{g}^*//G$ abgeschlossen und jedes $g \in \mathfrak{g}^*//G$ hat nur endlich viele Urbilder. Insbesondere ist die Momentabbildung ψ abgeschlossen auf den generischen G-Bahnen.

3 Die lokale und die globale Frobenius-Zerlegung symmetrischer Räume

3.1 Harmonizität und Darstellungstheorie

3.1.1 Was heißt „harmonisch"?

Die klassische Theorie der sphärischen Funktionen ist deswegen von Bedeutung, weil sie es erlaubt, jedes Polynom auf eindeutige Weise als Summe von Produkten einer harmonischen und einer $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$-invarianten Funktion darzustellen. Versuche, dieses erfolgreiche Konzept zu verallgemeinern, wurden in etwa zeitgleich von S. Helgason [Hel63] und B. Kostant [Kos63] unternommen. S. Helgason konstruierte ein symplektisches Analogon der sphärischen Funktionen auf Grassmann-Algebren. Der Ansatz von B. Kostant war fruchtbarer: er erklärte den Begriff der Harmonizität für die adjungierte Darstellung einer reduktiven Lie-Gruppe und konnte damit in diesem Fall einen allgemeinen Satz über die Trennung der Variablen beweisen. Einige Jahre später hat er gemeinsam mit S. Rallis [KR71] diese Ergebnisse auf symmetrische Räume übertragen, wobei die Argumentation ähnlich verläuft, im Detail jedoch technisch aufwendiger ist. In beiden Fällen können die harmonischen Funktionen als Kerne invarianter Differentialoperatoren beschrieben werden, werden aber nicht explizit als solche realisiert. Alle weiteren Verallgemeinerungen ergeben sich aus der schönen Idee von R. W. Richardson, die Serre-Vermutung und ihren Beweis durch Quillen und Suslin auf Wirkungen algebraischer Gruppen anzuwenden (vgl. [Ric81], [Ric82]). Sie sind aber rein algebraischer Natur und verwenden keinerlei Differentialoperatoren. Alle diese Arbeiten befassen sich mit *kofreien Wirkungen* im Sinne der nun folgenden Definition.

Definition 1 (Kofreie G-Wirkungen). Die Wirkung einer zusammenhängenden algebraischen Gruppe G auf einer irreduziblen affinen Varietät M heißt *kofrei*, wenn es einen G-invarianten Untervektorraum H von $\mathbf{C}[M]$ gibt derart, daß die Produktabbildung

$$H \otimes \mathbf{C}[M]^G \longrightarrow \mathbf{C}[M], \quad h \otimes f \longmapsto hf \tag{5}$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Die kofreien Darstellungen einfacher algebraischer Gruppen wurden von G. Schwarz in [Sch78] klassifiziert. Man beachte, daß der Unterraum H weit davon entfernt ist, eindeutig zu sein ! Der Logik der Frobenius-Reziprozität folgend betrachten wir nun Harmonizität als eine besondere Eigenschaft der Vielfachheitenräume $\mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ unter der Wirkung gewisser G-invarianter Differentialoperatoren, die es noch zu finden gilt. Aus Satz 6 wissen wir bereits, daß $\mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ über dem Invariantenring $\mathbf{C}[M]^G$ immer endlich erzeugt ist. Der Leitgedanke wird deswegen sein, die Multiplikation mit einer G-invarianten Funktion als einen „Aufsteiger" aufzufassen und zu jeder solchen einen geeigneten „Absteiger" zu konstruieren. Damit hat $\mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ in gewisser Weise die Struktur eines Moduls mit höchstem Gewicht, nur daß man im allgemeinen mehrere solche Vektoren brauchen wird.

Definition 2 (Harmonische G-Wirkungen). Wir nennen eine kofreie Wirkung von G auf M *harmonisch*, wenn es endlich viele G-invariante Differentialoperatoren $D_1, \ldots, D_n$ in $\mathcal{D}^G(M)$ gibt derart, daß der Durchschnitt der Kerne dieser Operatoren einen Unterraum H von $\mathbf{C}[M]$ bildet, für den die Produktabbildung aus Gl. (5) ein Isomorphismus ist. Dies ist äquivalent dazu, daß es für jedes λ im Spektrum $\mathcal{S}(M)$ endliche viele Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ in $\mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ gibt derart, daß gilt:

(1) $f_1, \ldots, f_m$ erzeugen $\mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ über $\mathbf{C}[M]^G$;

(2) $f_1, \ldots, f_m$ spannen genau den Durchschnitt der Kerne aller Operatoren D_i in $\mathbf{C}[M]^N(\lambda)$ auf:

$$\mathrm{Lin}(f_1, \ldots, f_m) \;=\; \left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker D_i \right) \bigcap \mathbf{C}[M]^N(\lambda)\,.$$

Beispiel 1 (Der Fall einer Spiegelungsgruppe). Ein einfaches Beispiel möge zunächst illustrieren, wie sehr die Frage, ob eine gegebene kofreie G-Wirkung harmonisch ist, von der globalen Geometrie abhängt. Ein klassischer Satz von C. Chevalley [Che55] besagt, daß die reguläre Darstellung einer Spiegelungsgruppe immer kofrei ist; ist also $\mathfrak{g}$ eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra und W die Weylgruppe von $\mathfrak{g}$ bzgl. einer Cartanunteralgebra $\mathfrak{h}$, so ist $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W$ ein Polynomring in $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$ Variablen und es existiert ein W-invarianter Untervektorraum H von $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]$ mit

$$H \otimes \mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W \;\cong\; \mathbf{C}[\mathfrak{h}]\,.$$

Es war eben diese Situation, welche Chevalley veranlaßt hatte, die Wirkung von Spiegelungsgruppen auf Vektorräumen zu studieren. Weil die Einschränkung der Killingform auf $\mathfrak{h}$ positiv definit ist, hat man einen kanonischen W-äquivarianten Isomorphismus zwischen $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}^*$, und damit zwischen $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]$ und $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$. Damit kann man für H den Raum aller Polynome wählen, die von den W-invarianten Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten annuliert werden, die Darstellung von W auf $\mathfrak{h}$ ist also harmonisch (man sieht leicht ein, daß zur Charakterisierung von H bereits endlich viele Operatoren ausreichen). Ist nun andererseits G eine halbeinfache Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so wirkt W auch auf einem maximalen Torus T von G, und das aus der Serre-Vermutung hergeleitete Kriterium von Richardson [Ric81, 3.1] ist anwendbar, so daß die W-Wirkung auf T ebenfalls kofrei ist. Wir zeigen nun, daß sie im allgemeinen aber nicht harmonisch sein wird.

Lemma 1 (Beispiel einer nicht harmonischen, aber kofreien Wirkung)
Die Wirkung der Weylgruppe $W \cong \mathcal{S}_2$ auf einem maximalen Torus $T \cong \mathbf{C}^*$ von $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ ist nicht harmonisch.

Beweis. Der Ring der regulären Funktionen auf T ist isomorph zu $\mathbf{C}[e^z, e^{-z}]$, und das nicht triviale Element von W wirkt hierdrauf als die Inversion, d.h. $e^{nz} \mapsto e^{-nz}$. Damit ist der Invariantenring $\mathbf{C}[e^z, e^{-z}]$ genau der Polynomring in $e^z + e^{-z}$, d.h. $\mathbf{C}[T]^W = \mathbf{C}[e^z + e^{-z}]$. Man beweist nun ohne Mühe, daß der Ring der Derivationen von T frei von ∂_z erzeugt wird (dies wird als einfaches Beispiel z.B. in [MR87, 15.3.13] vorgerechnet). Weil T glatt ist, impliziert Lemma 8 aus Abschnitt 1.1.4 zudem, daß ∂_z und $\mathbf{C}[e^z, e^{-z}]$ ganz $\mathcal{D}(T)$ erzeugen, und diese beiden Elemente kommutieren miteinander. Es wirkt also jeder Operator D aus $\mathcal{D}(T)$ auf e^{mz} als Multiplikation mit einem Polynom in m (von ∂_z kommend) mit Koeffizienten aus $\mathbf{C}[T]$, und D ist genau dann W-invariant, wenn dieses Polynom gerade in m ist und W-invariante Koeffizienten hat. Nun zerlegt sich der Koodinatenring in die isotypische Komponente zur trivialen und zur signum-Darstellung, z.B. mit $H = \mathbf{C} \cdot 1 + \mathbf{C} \cdot (e^z - e^{-z})$,

$$\mathbf{C}[T] \;=\; 1 \cdot \mathbf{C}[T]^W \;+\; (e^z - e^{-z}) \cdot \mathbf{C}[T]^W\,.$$

Jeder zur signum-Darstellung isomorphe Unterraum von $\mathbf{C}[T]$ wird von einem Element der Gestalt $e^{mz} - e^{-mz}$ aufgespannt, und da jeder Operator D aus $\mathcal{D}^W(T)$ auf e^{mz} und e^{-mz} als Multiplikation mit dem gleichen Skalar wirkt, kann $e^{mz} - e^{-mz}$ niemals im Kern von D liegen, die Wirkung also nicht harmonisch sein. Nebenbei zeigt dieses Beispiel, daß für Spiegelungsgruppen die Vielfachheitenräume nicht irreduzibel unter der Wirkung von $\mathcal{D}^W(T)$ sind. □

Das lokale Bild ist wie gesagt ein ganz anderes. In unserem Beispiel ist die Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ von T einfach ein eindimensionaler Vektorraum, auf dem $W \cong \mathcal{S}_2$ mittels Spiegelung am Ursprung operiert. Der Invariantenring ist demnach gleich dem Ring der in x geraden Polynome, $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W = \mathbf{C}[x^2]$, und der volle Polynomring zerlegt sich in

$$\mathbf{C}[\mathfrak{h}] \;=\; 1\cdot\mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W + x\cdot\mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W \,.$$

Aber 1 und x spannen gerade den Kern des eindimensionalen Laplace-Operators d^2/dx^2 auf, der zudem auf dem Invariantenring die Funktion eines „Absteigers“ erfüllt. Immerhin kann man im Hinblick auf die nächsten Abschnitte festhalten, daß der Unterraum H sich leicht aus den harmonischen Funktionen auf $\mathfrak{h}$ zurückgewinnen läßt: denn die Abbildung $T \to \mathfrak{h}$, $a \mapsto a - a^{-1}$ ist W-äquivariant und macht aus den harmonischen Funktionen 1, x durch Zurückziehen auf T genau H.

Bemerkung 1. Hieran kann man eine verblüffende Bemerkung anschließen. Bereits im ersten Kapitel wurde im Zusammenhang mit der Singularitätenauflösung des Kegels auf die Arbeiten von G. Schwarz und anderen ([Sch95]) hingewiesen, die sich damit beschäftigen, wann die kanonische Abbildung

$$\mathcal{D}^G(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M/\!/G)$$

surjektiv ist, d.h. wann alle G-invarianten Operatoren auf M von den Operatoren auf dem Quotienten $M/\!/G$ kommen. Bei Wirkungen endlicher Gruppen muß dort immer vorausgesetzt werden, daß diese keine Pseudospiegelungen enthalten mögen. Dieses Beispiel zeigt, wie sehr diese Einschränkung nötig ist: denn $T/\!/W$ ist hier ein eindimensionaler Vektorraum, hat also sehr viele Differentialoperatoren, doch lassen sich hiervon kaum welche auf T zurückziehen. Leider impliziert dies auch, daß die Isomorphie der Quotienten

$$G/\!/\operatorname{Ad}G \;\cong\; T/W$$

bei der Konstruktion von $\operatorname{Ad}G$-invarianten Differentialoperatoren auf G nicht behilflich sein wird.

3.1.2 Zusammenfassung einiger Ergebnisse von Kostant und Richardson

Wir beginnen mit einigen allgemeinen Bemerkungen zu Differentialoperatoren auf einem Polynomring, d.h. dem Koordinatenring eines endlichdimensionalen Vektorraums V. Seien $\mathsf{S}V$ sowie $\mathsf{S}V^*$ die symmetrische Algebra auf V bzw. seinem Dualraum V^*. Beide sind graduierte Algebren. Weiterhin ist die Algebra $\mathsf{S}V^*$ auf kanonische Weise isomorph zu $\mathbf{C}[V]$, und dieser Isomorphismus ist mit der Graduierung verträglich, d.h. die homogene Komponente S^nV^* wird mit den homogenen Polynomen vom Grad n identifiziert. Ebenso existiert ein kanonischer Algebrenisomorphismus zwischen $\mathsf{S}V$ und der (kommutativen !) Algebra der Differentialperatoren mit konstanten koeffizienten auf V, geschrieben $\mathcal{D}_c(V)$, welcher jedem $v \in V = \mathsf{S}^1V$ den Operator erster Ordnung ∂_v, d.i. die Richtungsableitung nach v, zuordnet. Um einen natürlichen Isomorphismus graduierter Vektorräume

$$\mathsf{S}V^* \;\cong\; (\mathsf{S}V)^* \;:=\; \bigoplus_n (\mathsf{S}^nV)^* \tag{6}$$

zu definieren, führen wir auf $\mathcal{D}_c(V) \times \mathbf{C}[V]$ die Form

$$\langle\,,\,\rangle : \quad \mathcal{D}_c(V) \times \mathbf{C}[V]\,, \quad \langle D, p\rangle \;:=\; (Dp)(0)$$

ein. Wenn p und D homogene Elemente gleicher Ordnung sind, dann ist Dp konstant und klarerweise gleich seinem Wert im Nullpunkt. Ist dagegen $D \in \mathcal{D}_c(V)_i$ und $p \in \mathbf{C}[V]_j$ (der untere Index entspreche der Graduierung) mit $i \neq j$, dann folgt $(Dp)(0) = 0$, so daß die Räume S^iV und S^jV^* bzgl. $\langle\,,\,\rangle$ orthogonal sind. Verwendet man nun, daß $\mathsf{S}^iV = \mathcal{D}_c(V)_i$ und $\mathsf{S}^iV^* = \mathbf{C}[V]_i$ ist, so hat man eine Abbildung

$$\mathsf{S}^iV \times \mathsf{S}^iV^* \longrightarrow \mathbf{C}\,,$$

die den gewünschten Isomorphismus von Gleichung 6 herstellt. Sei nun $G \subset \mathrm{GL}(V)$ eine reduktive linearer Transformationen auf V. Sie induziert auf jeder der Algebren $\mathsf{S}V$, $\mathsf{S}V^*$, $\mathcal{D}_c(V)$, $\mathbf{C}[V]$ eine Grad-erhaltende G-Wirkung durch Algebrenautomorphismen.

Satz 1 ([Kos63, sect.1.][CG97, 6.3.])
Die Algebra $\mathcal{D}_c^G(V)$ ist endlich erzeugt. Falls $\mathbf{C}[V]^G$ ein Polynomring in den Erzeugenden $f_1, \dots, f_n$ ist, dann ist auch $\mathcal{D}_c^G(V)$ ein Polynomring, und als Generatoren kann man die durch

$$\langle D_i, f_j^k \rangle \;=\; D_i(f_j^k)(0) \;=\; \begin{cases} \delta_{ij} & \text{falls } k = 1 \\ 0 & \text{falls } k \geq 2 \end{cases}$$

eindeutig definierten Differentialoperatoren $D_1, \dots, D_n$ wählen. Sei $\mathcal{H}$ der Durchschnitt aller Kerne der Operatoren D_i. Dann ist die Produktabbildung

$$\mathcal{H} \otimes \mathbf{C}[V]^G \longrightarrow \mathbf{C}[V]$$

ein Isomorphismus, und somit jede kofreie Darstellung notwendig auch harmonisch. □

Zum konkreten Rechnen macht es nun einen großen Unterschied, ob auf V ein G-invariantes Skalarprodukt existiert oder nicht, denn dies ist äquivalent zur Existenz eines *kanonischen* Isomorphismus zwischen $\mathcal{D}_c^G(V)$ und $\mathbf{C}[V]^G$. Der folgende einfache und wohlbekannte Satz ist ebenfalls (mehr oder weniger explizit) in der Arbeit von B. Kostant enthalten.

Satz 2 (Bestimmung von $\mathcal{D}_c^G(V)$ für orthogonale Darstellungen)
Sei (G, V) kofrei und β ein G-invariantes Skalarprodukt auf V mit darstellender Matrix B bzgl. der Koordinaten $x_1, \dots, x_p$. Durch

$$\langle \partial_x, \beta\partial_y \rangle \;=\; \beta(x, y) \quad \text{für } x, y \in V$$

wird ein G-äquivarianter Ringisomorphismus $\beta : \mathsf{S}V \to \mathbf{C}[V]$ definiert. Sind $f_1, \dots, f_n$ Erzeugende von $\mathbf{C}[V]^G$, so erhält man den zu f_i assoziierten Differentialoperator D_i, in dem man $w := B^{-1}v$, $v = (x_1, \dots, x_p)^t$ bildet, aus der Invarianten f_i das Polynom $f_i(w_1, \dots, w_p) =: g_i(x_1, \dots, x_p)$ berechnet und

$$D_i \;:=\; g_i(\partial_1, \dots, \partial_p)$$

setzt. Insbesondere ist $v^t Bv$ das zu β gehörende invariante Polynom vom Grad 2 und $\partial_v^t B^{-1} \partial_v$, $\partial_v := (\partial_1, \dots, \partial_p)$, der dazu assoziierte Differentialoperator. □

Auf diese Weise kann man zum Beispiel folgende Fälle behandeln:

(1) die reguläre Darstellung von W auf $\mathfrak{h}$;

(2) die adjungierte Darstellung von G auf $\mathfrak{g}$;

(3) die Isotropie-Darstellung eines symmetrischen Raums G/K (vgl. [KR71] sowie den nächsten Abschnitt).

R. W. Richardson konnte nun unter Verwendung der Serre-Vermutung folgendes „globale“ Analogon beweisen:

Satz 3 (Kriterium für kofreie Wirkungen [Ric81, Thm.B], [Ric82])
Sei G eine algebraische Gruppe mit reduktiver Zusammenhangskomponente der Eins und M eine glatte irreduzible affine G-Varietät. Es gelte

(1) die Algebra der Invarianten $\mathbf{C}[M]^G$ ist ein Polynomring;

(2) für jedes $x \in M//G$ hat die Faser $\pi^{-1}(x)$ die Dimension $\dim M - \dim M//G$.

Dann existiert ein G-invarianter Teilraum H von $\mathbf{C}[M]$ derart, daß die Produktabbildung $H \otimes \mathbf{C}[M]^G \to \mathbf{C}[M]$ ein Isomorphismus ist, d.h. die G-Wirkung auf M ist kofrei.

Sei nun G eine einfach zusammenhängende halbeinfache algebraische Gruppe, T ein maximaler Torus und W die Weylgruppe von G bzgl. T. Dann erfüllen folgende Wirkungen die oben genannten Voraussetzungen und sind folglich kofrei:

(1) *die Wirkung der Weylgruppe W auf dem maximalen Torus T von G;*

(2) *die Konjugationswirkung von G auf sich selbst;*

(3) *die K-Wirkung auf einem symmetrischen Raum G/K, wobei K die Fixpunktmenge einer Involution θ auf G ist.*

$\square$

Wie Richardson selbst bemerkt, erlaubt es seine Beweismethode nicht, den Unterraum H näher zu bestimmen oder charakterisieren. Beispiel 1 hatte gezeigt, daß im ersten der drei genannten Fälle der Raum H keine Beschreibung über invariante Differentialoperatoren zulassen muß. Wir widmen uns nun der Untersuchung dieser Frage in den beiden verbleibenden Fällen. Da die adjungierte Wirkung von G auf sich selbst sich als die K-Wirkung auf einem symmetrischen Raum verstehen läßt, kann man die Diskussion beider Fälle lange parallel führen.

3.2 Die K-Wirkung auf einem symmetrischen Raum G/K

3.2.1 Symmetrische Räume und die Richardson-Einbettung

Sei G eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit einfacher Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, θ ein nichttrivialer involutiver Automorphismus von G und $K := G^\theta$ die Menge der Fixpunkte von G unter dieser Involution. Zerlege $\mathfrak{g}$ wie gewöhnlich in den $+1$- bzw. -1-Eigenraum von θ

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

und betrachte die Einschränkung der adjungierten Wirkung von K auf $\mathfrak{p}$. Es ist $\mathfrak{p}$ isomorph zum Tangentialraum an G/K in eK und die soeben betrachtete Wirkung stimmt mit der Isotropie-Darstellung von K hierauf überein. Bezüglich der Wirkung von G ist G/K sphärisch, und diese Wirkung ist Grundlage der harmonischen Analysis auf symmetrischen Räumen. Insbesondere ist der Ring der G-invarianten Differentialoperatoren abelsch und wohlbekannt. Wir wollen stattdessen die (Links-)wirkung von K auf G/K studieren und sie soweit möglich mit der Isotropie-Darstellung von K auf $\mathfrak{p}$ in Verbindung bringen, um möglichst viel über die Algebra der K-invarianten Operatoren sowohl auf G/K als auch auf $\mathfrak{p}$ zu erfahren.

Wähle eine mit θ vertauschende Konjugation τ auf G derart, daß die zugehörige reelle Form kompakt ist, und setze $\sigma = \tau\theta$. Dann ist die Fixpuntmenge G_0 von G unter σ eine weitere, diesmal nicht kompakte reelle Form von G und $K_0 = G_0 \cap K$ eine kompakte reelle form von K. Wir nennen einen Torus $A \in G$ *θ-anisotrop*, wenn jedes seiner Elemente a die Eigenschaft $\theta(a) = a^{-1}$ hat. Man zeigt, daß in G immer ein maximaler θ-anisotroper Torus A existiert und man jeden solchen zu einem θ-invarianten maximalen Torus H von G erweitern kann (vgl. [Vus74, §1]). Ist die Gruppe $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ klassisch und liegt G/K in der gleich hieran anschließend besprochenen Richardson-Einbettung vor, so kann man für H einfach die Diagonalmatrizen in G und für A die Zusammenhangskomponente der Eins von $H \cap Q$, also $A = (H \cap Q)^0$ wählen. Wir setzen $T = H \cap K$ und erhalten auf dem Niveau der Lie-Algebren die Zerlegung

$$\mathfrak{h} \;=\; \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}\,,$$

wobei offensichtlich $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ gilt. Sei κ die Killing-Form auf $\mathfrak{g}$ und setze $\langle x, y\rangle_\theta = -\kappa(x, \theta y)$. Damit wird für $X \in \mathfrak{p}$ der Operator $\mathrm{ad}X$ symmetrisch. Ist nun M der Zentralisator von A in K, so erhält man, weil $\{\mathrm{ad}X \mid X \in \mathfrak{a}\}$ eine kommutierende Familie symmetrischer Endomorphismen von $\mathfrak{g}$ ist, eine Wurzelzerlegung bezüglich $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{a})} \mathfrak{g}_\alpha \,.$$

Nun ist es möglich, für ganz $\mathfrak{g}$ bezüglich seiner Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ ein Wurzelsystem $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ so zu wählen, daß

$$\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \;=\; \{\beta|_{\mathfrak{a}} \mid \beta \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\}$$

gilt. Deswegen nennt man die Elemente von $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ meist *eingeschränkte Wurzeln.* Umgekehrt liefert jeder θ-anisotrope Torus A in H eine Zerlegung von $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ in solche Wurzeln, die auf $\mathfrak{a}$ verschwinden und solche, die es nicht tun. Unterteilt man nun noch $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ in seine positiven und negativen Wurzeln und definiert

$$\mathfrak{n}^{\pm} \;=\; \bigoplus_{\alpha \in \Delta^{\pm}(\mathfrak{g},\mathfrak{a})} \mathfrak{g}_\alpha \,,$$

mit den zugehörigen Gruppen $N^{\pm} \subset G$, so erhält man schlußendlich die *Iwasawa-Zerlegung* von $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+ \;=\; \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+ \,.$$

Dabei ist AN^+ in der durch das Wurzelsystem $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ definierten Boreluntergruppe B von G enthalten.

Konkrete Beispiele sind oft nur so gut oder schlecht behandelbar wie die Realisierung des zugrundeliegenden symmetrischen Raumes explizit ist. Bereits E. Cartan war bekannt ([Car84, p. 1218-1219], [Hel78, Ch. VII, ex. 2]), daß man G/K als eine total geodätische Untermannigfaltigkeit in die Gruppe G einbetten kann. Doch scheint es Richardson gewesen zu sein, der erkannt hat, daß diese Einbettung ohne Mühe G-äquivariant gemacht werden kann, indem man die Konjugationswirkung von G auf sich selbst geeignet mit dem K definierenden Automorphismus θ „verdreht". Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist ein zweifacher: zum einen erhält man auf diese Weise gute Modelle der klassischen symmetrischen Räume (einige werden in Anhang A eingehend beschrieben), zum anderen kann man die zusätzliche Struktur von G beweistechnisch nutzbar machen. Für $g, y \in G$ definieren wir also die *θ-verdrehte Wirkung* von g auf y durch

$$g \star y \;=\; g\, y\, \theta(g)^{-1} \,.$$

Sie hat die Eigenschaft, daß $g \star e = e$ genau dann gilt, wenn g in K liegt. Sei weiterhin

$$Q \;=\; \{y \in G : \theta(y) \;=\; y^{-1}\}$$

und P die irreduzible Komponente von Q, die die Identität enthält, also

$$P \;=\; \{g\,\theta(g)^{-1} :\; g \in G\} \,.$$

Nun kann man den Einbettungssatz von Richardson formulieren:

Satz 4 (Einbettungssatz von Richardson [Ric82, 2.4], [GW97, Cor.11.2.8])
Die Bahn $P = G \star e$ ist eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge von G und vermöge der Abbildung

$$\psi : \quad G/K \longrightarrow P, \quad gK \longmapsto g\,\theta(g)^{-1}$$

als G-Raum (mit der θ-verdrehten Wirkung) isomorph zu dem symmetrischen Raum G/K (mit der Linkstranslation). Das Differential von ψ in eK ist gegeben durch

$$d\psi : \quad \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{p}, \quad X \longmapsto X - \theta(X) \,,$$

wobei

$$\mathfrak{p} \;= \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

genau der Tangentialraum an P in e ist. □

3.2.2 Beschreibung des Koordinatenrings und der K-invarianten Vektorfelder

Wir setzen von nun an und für die Dauer dieses Abschnittes voraus, daß G/K entweder einer der klassischen symmetrischen Räume aus Anhang A oder aber G halbeinfach und einfach zusammenhängend ist.

Wir beginnen mit einigen Eigenschaften der Klasse der *K-sphärischen* Darstellungen von G, welche ihre Bedeutung dadurch erlangen, daß sie genau diejenigen sind, die in der Zerlegung des Koordinatenrings $\mathbf{C}[G/K]$ unter der G-Wirkung vorkommen.

Definition 3. Eine irreduzible G-Darstellung V wird *K-sphärisch* genannt, wenn sie bis auf Vielfache genau einen K-invarianten Vektor hat, also $\dim V^K = 1$ ist. Mitunter nennt man eine solche Darstellung auch *θ-zulässig* oder *der Klasse Eins* („θ-admissible“, „class one“). Offensichtlich bilden die höchsten Gewichte K-sphärischer G-Darstellungen eine Halbgruppe, die wir $P_+^K(G)$ nennen wollen; in Anhang A ist bei der expliziten Realisierung der klassischen symmetrischen Räume jeweils ein Generatorensystem für diese Halbgruppe angegeben.

Ist V^λ eine K-sphärische G-Darstellung vom höchsten Gewicht λ, so folgt aus $\varrho(k)v = v$ sofort für jede beliebige Funktion f auf V die Identität $t^\lambda f(v) = f(v)$ für $t \in T = H \cap K$, also $t^\lambda = 1$ falls f nicht identisch verschwindet. Daß auch die Umkehrung dieses Sachverhalts gilt, ist der Inhalt eines Satzes von Cartan und Helgason:

Satz 5 (Satz von Cartan-Helgason [GW97, Thm.12.3.6])
Ist V^λ eine irreduzible G-Darstellung vom höchsten Gewicht λ, so sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) *V^λ ist K-sphärisch;*

(2) *V^λ enthält bis auf Vielfache genau einen MN^+-invarianten Vektor;*

(3) *$t^\lambda = 1$ für alle $t \in T = H \cap K$.*

□

Satz 6 (G-Zerlegung von $\mathbf{C}[G/K]$ [GW97, Cor.12.3.8])
Als G-Modul ist $\mathbf{C}[G/K]$ vielfachheitenfrei und es gilt $\mathbf{C}[G/K] \cong \bigoplus_\lambda V^\lambda$, wobei λ alle K-sphärischen höchsten Gewichte $P_+^K(G)$ von G durchläuft.

Beweis. Der Beweis an sich ist natürlich eine Standardaufgabe in der Darstellungstheorie. Von wesentlicher Bedeutung wird für uns aber noch die explizite Realisation dieses Isomorphismus sein, weswegen wir sie hier besprechen wollen. Schreibt man nämlich die Zerlegung völlig äquivalent als

$$\mathbf{C}[G/K] \cong \bigoplus_{\lambda \in P_+(G)} (V^{\lambda^*})^K \otimes V^\lambda ,$$

wobei $g \in G$ auf jedem Summanden als $1 \otimes \varrho_\lambda(g)$ wirkt, dann wähle man einen Vektor $0 \neq v_\lambda^* \in (V^{\lambda^*})^K$ und setze

$$\Psi_v(gK) := \langle \varrho_\lambda^*(g) v_\lambda^*, v \rangle \qquad \text{für } v \in V^\lambda . \qquad (*)$$

Weil v_λ^* K-invariant war, ist diese Abbildung wohl definiert und zudem offensichtlich G-äquivariant (also erst recht K-äquivariant). Sie ist es, die den gewünschten Isomorphismus realisiert. Dabei ist es natürlich gleich, ob man ihn in der angegebenen Form oder unter Vertauschung der Rollen von V^λ und V^{λ^*} schreibt, da mit V^λ auch immer dessen duale Darstellung K-sphärisch ist, in der Summe also ebenfalls erscheinen muß. □

Will man nun die K-Wirkung auf G/K und $\mathfrak{p}$ vergleichen, so stellt man zunächst fest, daß ihre Spektren übereinstimmen:

Satz 7 (K-Spektrum von G/K und $\mathfrak{p}$ [KR71, Thm.18], [Ric82, Thm.12.3])
Die irreduzible K-Darstellung W liegt genau dann in $\mathcal{S}(G/K)$ und $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$, wenn $W^M \neq 0$ ist. □

Bemerkung 2. Man könnte nun versucht sein, Funktionen auf $\mathfrak{p}$ durch eine der auf G/K analoge Formel, etwa

$$\Psi_v(X) \ := \ \langle d\varrho^*_\lambda(X)v^*_\lambda, v\rangle$$

zu definieren; hierbei wäre zunächst $X \in \mathfrak{g}$, zerlegt man dies aber in seinen in $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}$ liegenden Anteil, $X = K+P$, so ist $d\varrho^*_\lambda(K)v^*_\lambda = 0$ und man erhält in der Tat eine auf $\mathfrak{p}$ definierte Funktion. Nicht ganz so trivial wie gerade eben sieht man ein, daß auch dies eine K-äquivariante (aber nicht G-äquivariante !) Abbildung ist. Trotzdem leistet sie keine guten Dienste: für die meisten interessanten Vektoren v ist sie nämlich gleich Null. Insbesondere kann man so prinzipiell keine Monome vom Grad echt größer als Eins auf $\mathfrak{p}$ erzeugen.

Einen Ausweg liefert folgende, wohl auf N. Wallach zurückgehende Beobachtung:

Lemma 2 (Eigenschaften K-sphärischer Darstellungen [Wal72, Prop. 8.1])
Ist die Isotropie-Darstellung von G/K irreduzibel, so enthält jede nicht-triviale K-sphärische Darstellung von G diese als Summanden.

Beweis. Sei (V, ϱ) eine irreduzible K-sphärische Darstellung mit nichtverschwindendem K-invarianten Vektor v_0. Wir definieren eine – offensichtlich K-äquivariante – Abbildung

$$\mathfrak{p} \longrightarrow V, \quad X \longmapsto d\varrho(X)v_0\,.$$

Weil $\mathfrak{p}$ nach Voraussetzung K-irreduzibel war, ist das Bild nach dem Schurschen Lemma entweder isomorph zu $\mathfrak{p}$ oder Null. Der zweite Fall bedeutet aber $d\varrho(\mathfrak{p})v_0 = 0$, und da bereits $d\varrho(\mathfrak{k})v_0 = 0$ gilt, folgt insgesamt $d\varrho(\mathfrak{g})v_0 = 0$, im Widerspruch zur Irreduzibilität von ganz V unter G. □

Da sich $\mathfrak{g}$ unter K in $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ zerlegt, gilt die Umkehrung im allgemeinen nicht (z.B. nicht, wenn $\mathfrak{k}$ triviales Zentrum hat).

Definition 4. Ein symmetrischer Raum G/K heiße *irreduzibel*, wenn seine Isotropie-Darstellung irreduzibel ist. In diesem Fall liegt genau eine der drei folgenden Situationen vor (vgl. [KN96, XI.7.5.]):

(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}'$, wobei $\mathfrak{g}'$ einfach und $\theta(X, Y) = (Y, X)$ ist;

(2) $\mathfrak{g}$ ist einfach;

(3) $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = 0$.

Der erste Fall entspricht der Konjugationswirkung von G auf sich selbst (siehe Beispiel 2), zum zweiten gehören die meisten klassischen symmetrischen Räume (aber zum Beispiel die hermiteschen symmetrischen Räume nicht, da für sie sich $\mathfrak{p}$ unter der nach Voraussetzung existierenden komplexen Struktur in dessen Eigenräume $\mathfrak{p}^\pm$ zerlegt, welche K-invariant sind). Der letzte Fall ist natürlich pathologischer Natur und deswegen uninteressant.

Es liefert also jede K-sphärische Darstellung $(V^\lambda, \varrho_\lambda)$ eine K-äquivariante Projektion

$$\Pi_\lambda : \quad V^\lambda \longrightarrow \mathfrak{p}\,.$$

Ist nun $0 \neq v_\lambda$ in V^λ ein K-invarianter Vektor, dann wird durch

$$\Phi_\lambda : \quad G/K \longrightarrow \mathfrak{p}, \quad \Phi_\lambda(gK) \ := \ \Pi_\lambda(\varrho_\lambda(g)v_\lambda)$$

eine K-äquivariante Abbildung definiert, die z. B. eK auf den Nullvektor schickt. Mit ihr kann man nun Invarianten, Vektoren mit einem höchsten Gewicht usw. von $\mathfrak{p}$ auf G/K zurückziehen. Zudem hat sie folgende geometrische Interpretation als Vektorfeld auf G/K:

Proposition 1 (Vektorfelder aus K-sphärischen Darstellungen)
Sei der irreduzible symmetrische Raum G/K mittels der Richardson-Einbettung $\psi : G/K \hookrightarrow P \subset G$ eingebettet in G, und V^λ eine irreduzible K-sphärische G-Darstellung vom höchsten Gewicht λ. Für $y \in P$ hat man eine Identifizierung der Tangentialräume

$$T_yP \;\cong\; \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(y^{-1})\theta(X) + X = 0\},$$

so daß durch

$$T_eP \longrightarrow T_yP, \quad \Phi_\lambda(gK) \longmapsto \Phi_\lambda(gK) + \mathrm{Ad}(y^{-1})\Phi_\lambda(gK)$$

ein Vektorfeld ξ_λ auf G/K definiert wird, welches zudem die Eigenschaft hat, K-invariant zu sein.

Beweis. Die Identifizierung ergibt sich einfach durch Linkstranslation um y^{-1} (vgl. auch [GW97, Thm. 11.2.7.] für Details). Weil $\Phi_\lambda(gK) =: X$ ein Vektor in $\mathfrak{p}$ ist, gilt hierfür $\theta(X) = -X$, also ist

$$X + \mathrm{Ad}(y^{-1})X = X - \mathrm{Ad}(y^{-1})\theta(X)$$

ein Element von T_yP. Damit haben wir mittels V^λ in jedem Punkt von P einen Tangentialvektor, also ein Vektorfeld ξ_λ auf G/K definiert. Die $\mathrm{Ad}K$-Invarianz folgt aus der $\mathrm{Ad}K$-Äquivarianz von Φ_λ: sei hierzu gK das Urbild von $y \in P$ unter der Richardson-Einbettung. Unter der Wirkung von $k \in K$ geht dann kgK in $kyk^{-1} \in P$ über. Nun ist einerseits nach Definition

$$\Phi_\lambda(kgK) \longmapsto \Phi_\lambda(kgK) + \mathrm{Ad}(ky^{-1}k^{-1})\Phi_\lambda(kgK).$$

Andererseits bedeutet die $\mathrm{Ad}K$-Äquivarianz von Φ_λ aber in Formeln

$$\Phi_\lambda(kgK) \;=\; \mathrm{Ad}(k)\Phi_\lambda(gK),$$

man kann die rechte Seite der vorherigen Formel also umschreiben zu

$$\mathrm{Ad}(k)\Phi_\lambda(gK) + \mathrm{Ad}(ky^{-1}k^{-1})\mathrm{Ad}(k)\Phi_\lambda(gK) \;=\; \mathrm{Ad}(k)\left(\Phi_\lambda(gK) + \mathrm{Ad}(y^{-1})\Phi_\lambda(gK)\right),$$

was den Beweis beendet. Die Formel für den Spezialfall der adjungierten Wirkung wird in Beispiel 2 besprochen. □

In folgendem Sinne gilt auch die Umkehrung:

Lemma 3 (Charakterisierung K-invarianter Vektorfelder)
Sei G/K ein irreduzibler symmetrischer Raum. Es gilt:

(1) *Jedes K-invariante Vektorfeld auf G/K wird von einer K-äquivarianten Abbildung $G/K \to \mathfrak{p}$ induziert;*

(2) *Der Raum der K-äquivarianten Abbildungen $G/K \to \mathfrak{p}$ wird von den Projektionen auf K-sphärische Darstellungen erzeugt.*

Beweis. Angenommen, es ist ein K-invariantes Vektorfeld $\xi_{gK}(pK)$ gegeben, wobei pK der Punkt sei, an dem das Vektorfeld ausgewertet wird, und der Index gK eine Abhängigkeit von G/K andeuten soll, die wir nun näher bestimmen wollen. Die K-Invarianz ist dann äquivalent zu der Forderung, daß für $k \in K$ die Gleichung

$$\xi_{gK}(pK) \;=\; dL_k\, dR_k\, \xi_{k^{-1}gK}(k^{-1}pK)$$

gelten möge. Ausgewertet an der Stelle $pK = eK$ bedeutet dies genau

$$\xi_{kgK}(eK) \;=\; \mathrm{Ad}(k)\xi_{gK}(eK),$$

was wegen $T_{eK}G/K \cong \mathfrak{p}$ die erste Behauptung beweist. Zum Beweis der zweiten sei eine nichttriviale K-äquivariante Abbildung $\Phi : \ G/K \to \mathfrak{p}$ gegeben. Diese induziert einen ebenfalls K-äquivarianten Komorphismus

$$\tilde{\Phi} : \ \mathbf{C}[\mathfrak{p}] \longrightarrow \mathbf{C}[G/K] .$$

Der Koordinatenring $\mathbf{C}[\mathfrak{p}]$ enthält auf kanonische Weise die K-Darstellung $\mathfrak{p}$, nämlich in Gestalt der Koordinaten $p_1, \ldots, p_n$ von $\mathfrak{p}$. Nach dem Schurschen Lemma ist deren Bild $\tilde{p}_i(gK) := p_i(\Phi(gK))$ in $\mathbf{C}[G/K]$ zu $\mathfrak{p}$ isomorph (da es nach Voraussetzung an Φ nicht trivial sein kann). Nach Satz 6 existiert nun genau eine K-sphärische G-Darstellung V^λ mit K-invariantem Vektor v_λ sowie Vektoren $v_1^*, \ldots, v_n^* \in V^{\lambda^*}$ derart, daß

$$\tilde{p}_i(gK) \ = \ \langle v_i^*, \varrho_\lambda(g) v_\lambda \rangle$$

gilt. Somit spannen die Funktionen $\tilde{p}_i(gK)$ wie behauptet die Projektion auf $\mathfrak{p} \subset V^\lambda$ von $\varrho_\lambda(g) v_\lambda$ auf. □

Bemerkung 3. Sei $\lambda \in P_+^K(G)$ eine K-sphärische G-Darstellung. Dann stimmt das assoziierte K-invariante Vektorfeld ξ_λ auf G/K überein mit dem Gradientenfeld bezüglich der biinvarianten Metrik von G/K der in Gleichung $(*)$ definierten K-invarianten Funktion $\Psi_{v_\lambda}(gK)$. Die K-Invarianz dieser Gradientenfelder ergibt sich sofort aus der Definition des Gradienten, deswegen impliziert der soeben bewiesene Charakterisierungssatz, daß man sie nur noch mit den Vektorfeldern aus Proposition 1 in Beziehung setzen muß. Da wir diese Beschreibung nicht verwenden wollen, sei auf diesen Schritt jedoch hier verzichtet.

Beispiel 2 (Die adjungierte Darstellung). Sei G eine einfache zusammenhängende algebraische Gruppe und betrachte $\tilde{G} = G \times G$ an der Stelle von G mit dem involutiven Automorphismus $\theta(g,h) = (h,g)$. Dann ist $K = \tilde{G}^\theta \cong G$ diagonal in $G \times G$ eingebettet. Vermöge der Abbildung

$$(G \times G)/G \longrightarrow G, \quad (g,h) \longmapsto gh^{-1}$$

geht die K-Linkswirkung auf $(G \times G)/G$ über in die Konjugationswirkung von G auf sich selbst, und die Isotropie-Darstellung ist genau die adjungierte Darstellung Ad auf $\mathfrak{g}$. Ist H ein maximaler Torus in G, so ist $A := \{(h, h^{-1}) \mid h \in H\}$ ein maximaler anisotroper Torus, der in dem maximalen Torus $H \times H$ von $G \times G$ liegt. Der Zentralisator von A in K ist dann $M := \{(h,h) \mid h \in H\}$, also einfach der diagonal eingebettete Torus in K. Eine Darstellung $V \otimes W$ von $G \times G$ enthält genau dann einen G-invarianten Vektor, wenn W zu V dual ist, und der entsprechende Vektor ist dann unter der Identifikation $V \otimes V^* \cong \mathrm{End} V$ die Spur $\mathrm{tr}\, \varrho(g)$ der g darstellenden Matrix. Der Isomorphismus

$$\mathbf{C}[G] \ \cong \ \bigoplus_{\lambda \in P_+(G)} V^{\lambda^*} \otimes V^\lambda$$

ist für $v \in V^\lambda, \ v^* \in V^{\lambda^*}$ gegeben durch

$$\Psi_{v^*,v}(g) \ := \ \langle v^*, \varrho_\lambda(g) v \rangle \ . \qquad (**)$$

Weil andererseits für jede treue Darstellung V die adjungierte Darstellung in $V \otimes V^*$ enthalten ist, sieht man hier Lemma 2 auch direkt ein. Die oben gemachte Identifizierung von $(G \times G)/G$ kann man auch aus der Richardson-Einbettung ablesen, denn für sie ergibt sich

$$(g,h)K \ \longmapsto (g,h)\theta(g,h)^{-1} \ = \ (gh^{-1}, hg^{-1}) \in G \times G .$$

Es wurde also mit der ersten Komponente der Richardson-Einbettung gearbeitet, was kein Verlust ist, da die zweite nur redundante Information enthält. Wir wollen noch kurz zeigen, daß das in Lemma 1 konstruierte Vektorfeld für die Konjugationswirkung von G auf sich selbst eine wohlvertraute Gestalt hat. In den dort verwendeten Notationen rechnet man nach, daß

$$T_{(y,y^{-1})}P \;\cong\; \{(X, -\mathrm{Ad}(y)X) \;: X \in \mathfrak{g}\}$$

ist. Der Kürze halber schreiben wir das Element $\Phi((g,h)K)$ als Paar $(X, -X) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$. Unter der Bildungsvorschrift in Lemma 1 ist dann

$$(X,-X) \;\longmapsto\; (X,-X) + \mathrm{Ad}(y^{-1}, y)(X,-X) \;=\; (X, -\mathrm{Ad}(y)X) \;+\; (\mathrm{Ad}(y^{-1})X, -X)\,.$$

Aus der Identifizierung von $T_{(y,y^{-1})}P$ mit einem Teilraum von $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ macht man nun den Tangentialraum an $G \times G$ im Punkte (y, y^{-1}) durch Linkstranslation mit y bzw. y^{-1}, erhält also für die rechte Seite

$$(dL_y X, -dR_y X) + (dR_{y^{-1}} X, -dL_{y^{-1}} X) = (2dL_y X, -2dR_y X)\,.$$

Dies ist man gewöhnt, für $X \in \mathfrak{g}$ und $g \in G$ unter der Form $\xi(g) \;:=\; dL_g(X)$ anzutreffen, wobei X von der Nebenklasse $(g,h)K$ abhängt. Daran sieht man sofort, daß das so konstruierte Vektorfeld nur für den den trivialen Summanden $V^{0^*} \otimes V^0$ von $\mathbf{C}[G]$ biinvariant ist; denn nur dann ist das Lie-Algebra-Element X konstant und $\mathrm{Ad}\,G$-invariant.

Abschließend möge ein kurzes Beispiel erläutern, wie ein solches Vektorfeld typischerweise auf Funktionen wirkt. Sei dazu $G = \mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ und

$$\Phi_k : G \to \mathfrak{g}, \quad g \longmapsto g^k - \frac{1}{n}\mathrm{tr}\,(g^k)$$

eine G-äquivariante Projektion von G auf $\mathfrak{g}$ (siehe auch das nächste Beispiel). Die Entwicklung von $g\,\exp(t\Phi_k(g))$ bis zur ersten Ordnung in t lautet

$$g\,\exp(t\Phi_k(g)) \;=\; g + tg^{k+1} - \frac{t}{n}\,g\,\mathrm{tr}\,(g^k) + \ldots\,,$$

woraus zum Beispiel für $f_1(g) = \mathrm{tr}\,g$ oder $f_2(g) = g_{21}$ folgt

$$\Phi_k(f_1)(g) \;=\; \frac{d}{dt} f_1\,(g\exp(t\Phi_k(g)))\,|_{t=0} \;=\; \mathrm{tr}\,(g^{k+1}) - \frac{1}{n}\mathrm{tr}\,(g)\,\mathrm{tr}\,(g^k)\,, \quad \Phi_k(f_2)(g) \;=\; \mathrm{tr}\,(g)\cdot g_{21}/2\,.$$

Insgesamt haben wir also ein vollständiges Bild über die K-invarianten Vektorfelder eines symmetrischen Raums G/K gewonnen. Ohne Beweis wollen wir noch kurz erläutern, wie Kommutatoren der in Proposition 1 konstruierten K-invarianten Vektorfelder zu bilden sind. Sei V^λ eine K-sphärische G-Darstellung, $\Phi_\lambda :\; G/K \to \mathfrak{p}$ die daraus konstruierte K-äquivariante Abbildung sowie $dL_y\Phi_\lambda(gK)$ das zugehörige K-invariante Vektorfeld auf $P \cong G/K$. Weil solche Vektorfelder nicht linksinvariant sind, berechnet sich für zwei K-sphärische Darstellungen mit den höchsten Gewichten λ und μ der Kommutator der assoziierten Vektorfelder nicht einfach als Kommutator in $\mathfrak{p}$. Stattdessen überzeugt man sich leicht von der Gültigkeit der Formel

$$[dL_y\Phi_\lambda,\, dL_y\Phi_\mu] \;=\; dL_y\left([\Phi_\lambda,\, \Phi_\mu] \;+\; dL_y\Phi_\lambda(\Phi_\mu) - dL_y\Phi_\mu(\Phi_\lambda)\right)\,.$$

3.2.3 Harmonizität der adjungierten Wirkung auf $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$

Sei $V = \mathbf{C}^2 = \mathrm{Lin}(x,y)$ die Standard-Darstellung von $G = \mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ und $V_d := \mathsf{S}^d V$ deren d-te symmetrische Tensorpotenz mit Dimension $d+1$ und Koordinatenfunktionen $a_0, \ldots, a_d$, definiert durch

$$a_0\,x^d + \binom{d}{1}\,a_1\,x^{d-1}y + \ldots + \binom{d}{d}\,a_d\,y^d\,.$$

Eine der Hauptforschungsrichtungen der Invariantentheorie des 19. Jahrhunderts hatte zum Ziel, Generatoren und Relationen für $\mathbf{C}[V_d]^G$ zu finden. Im einfachsten Fall $d=2$ ist V_2 genau die adjungierte Darstellung von G auf $\mathfrak{g}$ vermöge des Isomorphismus

$$v \;=\; (a_0,a_1,a_2) \longmapsto X \;=\; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad gv \longmapsto g^{-1}Xg\,.$$

Wir realisieren N als obere unipotente Dreiecksmatrizen und setzen $f(a_0,a_1,a_2) := a_0a_2 - a_1^2$, welches genau die G-invariante Funktion ist, die auf $\mathfrak{g}$ der Determinante entspricht. Bekanntlich gilt dann

$$\mathbf{C}[V_2]^N \;=\; \mathbf{C}[a_0,f] \;\text{ und }\; \mathbf{C}[V_2]^G \;=\; \mathbf{C}[f]\,.$$

Wir setzen $\partial_i := \partial/\partial a_i$. Der zu f assoziierte G-invariante Operator ist

$$D_f \;:=\; 4\,\partial_0\partial_2 - \partial_2^2\,,$$

der mit f den Kommutator

$$[D_f,f] \;=\; 6 + 4\,(a_0\,\partial_0 + a_1\,\partial_1 + a_2\,\partial_2)$$

bildet. Eine Funktion heiße *harmonisch*, wenn sie im Kern von D_f liegt. Von der Basis $\{a_0^n f^m\}$ von $\mathbf{C}[V_2]^N$ ist nur a_0^n harmonisch und hat Gewicht $2n$, erzeugt also die $(2n+1)$-dimensionale $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$-Darstellung. Jedes Polynom auf $\mathfrak{g}$ läßt sich nun schreiben als eine Summe von Produkten von f-Potenzen und einer harmonischen Funktion, die in der von einem a_0^n erzeugten Darstellung $\mathrm{Lin}(\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})\cdot a_0^n)$ liegt. Nach Satz 6 zerlegt sich nun der Ring der regulären Funktionen auf $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ in die Summe

$$\mathbf{C}[\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})] \;\cong\; \bigoplus_{d\geq 0} V_d\otimes V_d^*\,,$$

und $V_d\otimes V_d^*$ enthält für jedes d sowohl die triviale als auch die adjungierte Darstellung von $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$; die entsprechende Projektion $\Phi_d : G\to\mathfrak{g}$ lautet dann

$$\Phi_d : \mathrm{SL}(2,\mathbf{C}) \to \mathfrak{sl}(2,\mathbf{C}), \quad g \longmapsto g^{d-1} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, g^{d-1}\,.$$

In der Wahl der Projektion liegt also eine gewisse Willkür; in der Praxis wird freilich meist klar sein, welche Projektion am geeignetesten ist. Hier ist es $\Phi := \Phi_2$. Zum Zurückziehen von Invarianten eignet sich Φ nur mäßig, was wenig verwundert, weiß man doch, daß die Beschreibung der Invarianten auf G mit denen auf $\mathfrak{g}$ wenig gemein hat. Zum Beispiel rechnet man nach, daß für $g\in\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$

$$\Phi^*f(g) \;=\; 1 - \frac{1}{4}(\mathrm{tr}\,g)^2$$

gilt, was zwar auf $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ invariant ist, dessen Invariantenring aber nicht erzeugt. Besser sieht es für die harmonischen Vektoren mit höchstem Gewicht aus: sind g_{ij} die Matrixfunktionen von $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$, so ist

$$\Phi^*a_0^n(g) \;=\; (-g_{21})^n\,,$$

was ein Erzeuger über $\mathrm{tr}\,g$ von $\mathbf{C}[\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})]^N(2n)$ ist: somit zerlegt sich auch hier jede Matrixfunktion auf G in das Produkt einer Potenz von $\mathrm{tr}\,g$ mit einem in $\mathrm{Lin}(G\cdot g_{21}^n)$ liegenden Vektor. Das qualitative Bild auf G stimmt also mit dem auf $\mathfrak{g}$ überein. Bestimmen wir nun einen G-invarianten Differentialoperator $\tilde{D}$ auf G, für den

$$\mathbf{C}[\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})]^N \cap \ker\tilde{D} \;=\; \mathbf{C}[g_{21}]$$

gilt ! Dafür ist es zweckmäßig, den Isomorphismus (**) zu verwenden. Sei u, v eine Basis von V und x, y die hierzu duale Basis von V^*. Wähle als Basis von $V_d = \mathsf{S}^d V$ die Monome $u^k v^{d-k}$, $k = 0, \ldots d$, und realisiere den Isomorphismus $\mathsf{S}^d(V^*) \cong (\mathsf{S}^d V)^*$ mittels

$$\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_d \longmapsto [v_1 \cdot \ldots \cdot v_d \longmapsto \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \varphi_{\sigma(1)}(v_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_{\sigma(d)}(v_d)] \, .$$

Dann ist $\binom{d}{k} x^k y^{d-k}$ der zu $u^k v^{d-k}$ duale Basisvektor. Bei den Elementen von

$$\bigoplus_{d \geq 0} V_d \otimes V_d^*$$

lassen wir abkürzend das Tensorproduktzeichen weg, $ux := u \otimes x$ usw. Da der linke und der rechte Faktor in jedem Tensorprodukt nicht übereinstimmen, kann es hierdurch nicht zu Verwechslungen kommen. Die vollständige Kontraktion in jedem Summanden ist dessen G-invarianter Vektor; aufgrund unserer Wahl der Dualbasen kann man dies

$$(ux + vy)^d = \mathrm{tr}\,(\mathsf{S}^d V)$$

schreiben; insbesondere wird der Invariantenring $\mathbf{C}[G]^{\mathrm{Ad}\,G}$ in diesem Sinne von $ux + vy$ „erzeugt“, wobei freilich zu beachten ist, daß die Multiplikation von Tensoren *nicht* der Multiplikation der zugehörigen Matrixfunktionen entspricht.

Ein Operator, der bisher nicht in Erscheinung getreten ist, ist der Laplace-Operator Δ der jedem symmetrischen Raum G/K zugrunde liegenden Riemannschen Mannigfaltigkeit, ausgestattet mit der biinvarianten Metrik. Es ist wohlbekannt, daß der geometrische Laplace-Operator in diesem Fall dem quadratischen Casimir-Operator entspricht und sogar G-invariant, also erst recht K-invariant ist. Er operiert auf jeder isotypischen Komponente V^λ von $\mathbf{C}[G/K]$ als Multiplikation mit einem nur von λ abhängigen Skalar c_λ. Zerlegt man nun jede K-sphärische G-Darstellung in ihre K-Darstellungen, so kommt eine gleicher K-Summand in unendlich vielen verschiedenen K-sphärischen Darstellungen vor, auf denen folglich der Laplace-Operator zwar skalar, aber mit unterschiedlichen Eigenwerten operiert. Deswegen liegt Δ nicht im Zentrum von $\mathcal{D}^K(G/K)$. In unserer konkreten Situation sei Δ derart normiert, daß

$$\Delta|_{V_d \otimes V_d^*} \;=\; d(d+2) \cdot \mathrm{id}$$

gilt, und sei weiterhin ξ das von der Projektion Φ induzierte Vektorfeld auf $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$. Um $\mathrm{Ad}\,\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$-invariante Differentialoperatoren mit den gewünschten Eigenschaften zu konstruieren, stehen uns nun Δ, die Potenzen von ξ sowie der Invariantenring $\mathbf{C}[\mathrm{tr}\,(g)]$ zur Verfügung. Daß dies tatsächlich möglich ist, zeigt die folgende Proposition.

Proposition 2 (Ein deformierter Laplace-Operator auf $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$***)***
Betrachte auf $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ den $\mathrm{Ad}\,\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$-invarianten Differentialoperator

$$\tilde{D} \;:=\; -\mathrm{tr}\,(g)^3 \Delta \;+\; 4\,\mathrm{tr}\,(g)\,\xi^2 \;+\; 2(\mathrm{tr}\,(g)^2 + 4)\,\xi \, .$$

Der Durchschnitt seines Kerns mit $\mathbf{C}[\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})]^N$ besteht genau aus der linearen Hülle der Matrixfunktionen g_{21}^n, $n \in \mathbf{N}_0$.

Beweis. Der Beweis besteht aus einer anstrengenden Rechnung. Zum Zwecke der Vereinfachung führen wir für die Basisvektoren von $\mathbf{C}[\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})]^N$ die Bezeichnung

$$f_{m,n}(g) \;:=\; \mathrm{tr}\,(g)^m \cdot g_{21}^n$$

ein. Dann rechnet man wie in Beispiel 2 aus, daß ξ auf $f_{m,n}$ durch

$$\xi(f_{m,n}(g)) \;=\; \frac{1}{2}(n+m)f_{m+1,n}(g) \;-\; 2m\, f_{m-1,n}(g)$$

wirkt, woraus sich für das Quadrat von ξ die Formel

$$\xi^2(f_{m,n}) \;=\; \frac{1}{4}(n+m)(n+m+1)f_{m+2,n} \;-\; (2m^2+mn+n)\, f_{m,n} \;+\; 4m(m-1)f_{m-2,n}$$

ergibt. Insbesondere für $m=0$ folgt

$$\begin{aligned}\tilde{D} f_{0,n} &= -\mathrm{tr}\,(g)^3 n(n+2)f_{0,n} + 4\mathrm{tr}\,(g)\left[\frac{1}{4}n(n+1)f_{2,n} - n f_{0,n}\right] + 2(\mathrm{tr}\,(g)^2+4)\frac{n}{2}f_{1,n} \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Der Nachweis, daß für $m \neq 0$ notwendig $\tilde{D} f_{m,n} \neq 0$ gilt, gestaltet sich etwas schwieriger, weil dem (wie überhaupt bei all diesen Untersuchungen) die kombinatorisch komplizierte Struktur des Invariantenrings im Wege steht. Wir führen den Beweis für $m=0$ im Detail vor und skizzieren die Vorgehensweise im allgemeinen Fall. Das Problem liegt in der Bestimmung der Wirkung des Laplace-Operators auf $f_{m,n}$, denn die Eigenfunktionen von Δ in $V_d \otimes V_d^*$ sind die Matrixfunktionen zu

$$(vx)^k(ux+vy)^l, \quad k+l=d\,.$$

Bereits für $k=0$ und $l=d$ sieht man das Problem: es ist

$$\Delta \mathrm{tr}\,(g)|_{V_d} \;=\; d(d+2)\mathrm{tr}\,(g)|_{V_d}\,,$$

aber $\mathrm{tr}\,(g)|_{V_d} \neq \mathrm{tr}\,(g)^d$. Wir benötigen also eine präzise Formel für die Matrixfunktionen, ausgedrückt durch Potenzen von $\mathrm{tr}\,(g)$. Im allgemeinen bekommt man diese nur durch komplizierte Induktionsbeweise aus $(vx)^k(ux+vy)^l$; zur Berechnung von $\mathrm{tr}\,(g)|_{V_d}$ kann man alternativ auch die Formel für die erzeugende Funktion von Spuren symmetrischer Tensorpotenzen (vgl. [CG97, 6.7.23])

$$\frac{1}{\det(1-t\cdot g)} \;=\; \sum_{n\geq 0}\mathrm{tr}\;(g, \mathsf{S}^n V)\cdot t^n$$

verwenden. Aus ihr leitet man sofort die ersten Terme

$$\mathrm{tr}\,(g)|_{V_2} = \mathrm{tr}\,(g)^2-1, \quad \mathrm{tr}\,(g)|_{V_3} = \mathrm{tr}\,(g)^3 - 2\mathrm{tr}\,(g), \quad \mathrm{tr}\,(g)|_{V_4} = \mathrm{tr}\,(g)^4 - 3\mathrm{tr}\,(g)^2+1, \ldots$$

und ganz allgemein die Formel, $t := \mathrm{tr}\,(g)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(g)|_{V_n} &= t^n - \binom{n-1}{1}t^{n-2} + \binom{n-2}{2}t^{n-4} - \binom{n-3}{3}t^{n-6} + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n-k}{k}t^{n-2k}\end{aligned}$$

her. Wir wollen nun mit vollständiger Induktion daraus

$$\Delta\, t^n \;=\; n(n+2)t^n - 4n(n-1)t^{n-2}$$

beweisen. Für $n=1$ ist $\mathrm{tr}\,(g)|_{V_1} = t$ und damit nichts zu beweisen. Obgleich natürlich nicht nötig, besprechen wir noch $n=2$ und 3: für $n=2$ ergibt sich aus der Spurformel über V_2 und der Normierung des Laplace-Operators

$$\Delta\,(t^2-1) \;=\; 8(t^2-1)\,,$$

woraus, da $\Delta 1 = 0$ ist, die Behauptung für $n = 2$ folgt. Bei $n = 3$ ist dann

$$\Delta\,(t^3 - 2\,t) \;=\; 15\,(t^3 - 2\,t), \quad \text{also} \quad \Delta\,t^3 \;=\; 15\,(t^3 - 2\,t) + 2\,\Delta\,t \;=\; 15\,t^3 - 24\,t\,.$$

Für den Induktionsschritt sei die Behauptung für alle $k < n$ bewiesen. Es ist

$$\Delta\left(\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n-k}{k} t^{n-2k}\right) \;=\; n(n+2) \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n-k}{k} t^{n-2k}\,,$$

also, wenn man alle Terme mit $k \neq 0$ der linken Seite auf die rechte bringt,

$$\begin{aligned} \Delta\,t^n \;&=\; n(n+2)t^n + \sum_{k=1}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n-k}{k} \left[n(n+2)t^{n-2k} - \Delta\,t^{n-2k}\right] \\ &=\; n(n+2)t^n + (n-1)\left[\Delta\,t^{n-2} - n(n+2)t^{n-2}\right] - \frac{(n-3)(n-2)}{2}\left[\Delta\,t^{n-4} - n(n+2)t^{n-4}\right] + \ldots \end{aligned}$$

Wende nun die Induktionsannahme an. Aus ihr folgt insbesondere, daß eine gegebene t-Potenz nur in aufeinander folgenden Summanden vorkommen kann. Wir schreiben den Induktionsschritt deswegen nur stellvertretend für die ersten drei Terme aus:

$$\begin{aligned} \Delta\,t^n \;&=\; n(n+2)t^n + (n-1)\left[n(n-2)t^{n-2} - 4(n-2)(n-3)t^{n-4} - n(n+2)t^{n-2}\right] \\ &\quad -\frac{(n-3)(n-2)}{2}\left[(n-4)(n-2)t^{n-4} - 4(n-4)(n-5)t^{n-6} - n(n+2)t^{n-4}\right] + \ldots \\ &=\; n(n+2)t^n - 4n(n-1)t^{n-2} - 4(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-4} \\ &\quad -\frac{(n-3)(n-2)}{2}\left[8(1-n)t^{n-4} - 4(n-4)(n-5)t^{n-6}\right] + \ldots \\ &=\; n(n+2)t^n - 4n(n-1)t^{n-2} + 0\,. \end{aligned}$$

Nun kann man die Wirkung des deformierten Laplace-Operators $\tilde{D}$ auf $t^n = \operatorname{tr}(g)^n$ exakt ausrechnen und erhält hierfür die bemerkenswert simple Formel

$$\tilde{D}t^n \;=\; -4n\,t^{n+1} \;+\; 16n(n-2)t^{n-1}\,,$$

deren rechte Seite, wie sie soll, genau für $n = 0$ verschwindet. Weiterhin zeigt diese Formel, daß aus Gradgründen auch Linearkombinationen von t-Potenzen nicht im Kern von $\tilde{D}$ liegen können. Den allgemeinen Fall beweist man nun analog, indem man zeigt, daß die Matrixfunktion zu $(vx)^n(ux+vy)^m$ nach Anwenden des Laplace-Operators Terme der Gestalt

$$\Delta f_{m,n} \;=\; \alpha f_{m,n} + \beta f_{m-2,n}$$

implizieren. Nach Multiplikation mit t^3 kann von $\Delta f_{m,n}$ somit kein zu $f_{m-1,n}$ proportionaler Term kommen; Betrachten des Terms $f_{m-1,n}$ zeigt dann, daß dieser bereits für (fast) alle m und n nicht verschwinden kann (die verbleibenden endlich vielen Ausnahmewerte, oben etwa $n = 2$, betrachte man separat). $\square$

Bemerkung 4. Die geometrische Bedeutung des Operators $\tilde{D}$ ist mir unklar. Seine Existenz beweist, daß es Sinn macht, auf symmetrischen Räumen nach Differentialoperatoren zu suchen, die die Frobenius-Zerlegung bzgl. der K-Wirkung induzieren. Ebenso klar ist aber auch, daß der hier dargestelle Zugang sich nicht für Verallgemeinerungen eignet...

Vergleicht man mit der adjungierten Darstellung auf $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, so sieht man daß die diversen Differentialoperatoren doch eine sehr unterschiedliche Rolle spielen:

(1) das einzige invariante Vektorfeld ξ auf $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ wirkt auf relativ komplizierte Weise gleichzeitig als ein Auf- und Absteiger in den Invarianten. Dagegen ist das einzige invariante Vektorfeld auf $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ das Eulervektorfeld, wirkt also auf sehr einfache Weise, nämlich als Multiplikation mit dem Grad;

(2) der Laplace-Operator Δ auf $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ spielt die Rolle des Eulervektorfeldes, wenn man die Polynome fixierten Grades durch die G-isotypischen Komponenten ersetzt. Dagegen hat der Laplace-Operator D_f bzgl. der von der Killingform induzierten Metrik auf $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ das Verhalten eines Absteigers;

(3) Weil die Vielfachheitenräume von $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ irreduzible $\mathcal{D}^{\mathrm{Ad}\,\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})}(\mathrm{SL}(2,\mathbf{C}))$-Moduln sind, müssen auf der $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ noch weitere invariante Differentialoperatoren existieren, die auf den Invarianten als Absteiger wirken.

Satz 8 (Harmonizität der adjungierten Wirkung auf $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$***)***
Auf $G=\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ existiert ein Differentialoperator $\tilde{D}$ derart, daß die adjungierte Wirkung von G hierauf harmonisch im Sinne der Definition 2 ist, genauer:

(1) *g_{21}^n erzeugt $\mathbf{C}[G]^N(2n)$ über $\mathbf{C}[G]^G=\mathbf{C}[\mathrm{tr}\,g]$;*

(2) *Jede bzgl. $\tilde{D}$ harmonische Funktion in $\mathbf{C}[G]^N(2n)$ ist ein Vielfaches von g_{21}^n;*

(3) *Die Funktionen g_{21}^n sind genau die unter Ψ auf G zurückgezogenen Funktionen der harmonischen Erzeuger von $\mathbf{C}[\mathfrak{g}]^N$.*

□

Obwohl Ψ nicht bijektiv ist, haben wir also in diesem Sinne einen Harmonizitätsbegriff auf G gefunden, der den auf $\mathfrak{g}$ auf vernünftige Weise umfaßt.

3.2.4 Konstruktion invarianter Differentialoperatoren auf Vektorräumen

Alle Rechnungen dieses Abschnitts wurden mit **Maple V Rel. 4** ausgeführt. In Anhang B wird am Beispiel der adjungierten Wirkung der $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$ (s.u.) die genaue Vorgehensweise erklärt; der geneigte Leser möge mir glauben, daß alle hier vorgestellten Ergebnisse auf im Grunde analogen, obgleich mitunter per Hand kaum mehr durchführbaren Berechnungen beruhen. Grundlage hierfür ist zunächst der nicht schwer zu beweisende

Satz 9 (Kofreie Darstellungen mit kleinem Invariantenring [Pop76], [Sch78, 2.2])
Sei V eine (nicht notwendig irreduzible) Darstellung der algebraischen reduktiven Gruppe G. Wenn die Dimension von $\mathbf{C}[V]^G$ gleich 1 oder 2 ist, dann ist die Darstellung kofrei. □

Außerdem sind alle G-invarianten Differentialoperatoren nach einem gleichen Prinzip aufgebaut. Sind (ϱ_1, V_1) und (ϱ_2, V_2) irreduzible G-Darstellungen, dann enthält ihr Tensorprodukt $\varrho_1\otimes\varrho_2$ genau dann einen G-invarianten Vektor, wenn $\varrho_1\cong\varrho_2^*$ ist. Falls dies zutrifft, ist dieser Vektor bis auf Vielfache eindeutig und kann wie folgt konstruiert werden: wähle irgendeine Basis $\{v_i\}$ auf V_1 und sei $\{v_i^*\}$ ihre duale Basis auf V_2. Dann ist

$$\mu(\varrho_1,\varrho_2) := \sum_i v_i\otimes v_i^*$$

die Invariante in $\varrho_1\otimes\varrho_1^*$. Weil nun $\mathcal{D}_c(V)\cong\mathbf{C}[V^*]$ ist, ergibt sich daraus sofort:

Proposition 3 (Invariante Differentialoperatoren von G-Darstellungen)
Die Operatoren $\mu(\varrho,\varrho)$, wobei $\varrho\in\mathcal{S}(V)$ ist, bilden eine Basis von $\mathcal{D}^G(V)$. □

Beispiel 3 (Die adjungierte Wirkung von $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$**).** Wir betrachten die adjungierte Wirkung der Lie-Gruppe $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$ auf ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbf{C})$. Aus den Ergebnissen von Kostant folgt, daß diese Wirkung harmonisch ist. Hierfür geben wir die Differentialoperatoren an. Es seien die Elemente X von $\mathfrak{g}$ parametrisiert als

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & -x_1 - x_5 \end{pmatrix}.$$

Der Invariantenring ist ein Polynomring, der von dem homogenen Polynom

$$m_1 := x_1^2 + x_5^2 + x_1x_5 + x_2x_4 + x_3x_7 + x_6x_8$$

vom Grad 2 sowie einem weiteren Polynom vom Grad 3

$$m_2 := x_1^2x_5 + x_1x_5^2 + x_1x_6x_8 + x_3x_5x_7 - x_2x_6x_7 - x_2x_4x_5 - x_3x_4x_8 - x_1x_2x_4$$

erzeugt wird. Bis auf unwesentliche Konstanten sind dies genau $\operatorname{tr} X^2$ und $\operatorname{tr} X^3$. Weil die Hessische $\mathcal{H}$ von m_1 bzgl. der Variablen $x_1, \dots, x_8$ regulär ist, kann man den zu m_1 gehörenden „Absteiger" D_1 anhand der Formel

$$D_1 = \sum_{i,j=1}^{8} g^{ij} \partial_i \partial_j$$

berechnen, wobei g^{ij} die Einträge von $\mathcal{H}^{-1}$ seien (vgl. [RS87][2]). Auf diese Weise erhält man ohne Mühe den $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$-invarianten Differentialoperator

$$D_1 = \frac{2}{3}\partial_1^2 + \frac{2}{3}\partial_5^2 - \frac{2}{3}\partial_1\partial_5 + 2\,\partial_2\partial_4 + 2\partial_3\partial_7 + 2\,\partial_6\partial_8\,.$$

Setzt man

$$\partial_X = \begin{pmatrix} \partial_1 & \sqrt{3}\,\partial_2 & \sqrt{3}\,\partial_3 \\ \sqrt{3}\,\partial_4 & \partial_5 & \sqrt{3}\,\partial_6 \\ \sqrt{3}\,\partial_7 & \sqrt{3}\,\partial_8 & -\partial_1 - \partial_5 \end{pmatrix},$$

so kann man D_1 auch in der Gestalt

$$D_1 = \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\partial_X)^2$$

schreiben. Auf die Reihenfolge der Faktoren braucht hierbei nicht achtgegeben werden, da ∂_X die Koordinatenfunktionen $x_1, \dots, x_8$ nicht enthält. Nennen wir den Euler-Operator auf $\mathfrak{sl}(3,\mathbf{C})$ wie üblich E, so gelten die gewohnten $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$-Kommutator-Relationen

$$[D_1, m_1] = 8 + 2E, \quad [D_1, E] = 2D_1, \quad [m_1, E] = -2m_1\,.$$

Sehr viel schwieriger ist es, den zu m_2 gehörenden invarianten Differentialoperator D_2 zu bestimmen. Dieser ist zwar durch die Invarianz sowie die Forderung

$$D_2(m_2^k)(0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 1 \\ 0 & \text{falls } k \geq 2 \end{cases}$$

eindeutig bestimmt, doch existiert im allgemeinen keine geschlossene Formel, die es einem erlauben würde, D_2 aus m_2 herzuleiten. Im vorliegenden Fall existiert auf $\mathfrak{g}$ ein G-invariantes

[2] An dieser Stelle sei vermerkt, daß natürlich auch zu invarianten Funktionen vom Grad 2 mit singulärer Hesse-Matrix ein assoziierter Absteiger gehört, dieser aber eben nicht mittels dieser Formel bestimmt werden kann. Ein ganz leicht zu rechnendes Beispiel hierfür ist die Wirkung von $\mathrm{Sp}(n,\mathbf{C}) \times \mathrm{SO}(3,\mathbf{C})$ auf den Matrizen $\mathcal{M}_{2n,3}$, vgl. [SK77, Ex.16].

$E_{11}-E_{33}$	$X_1 = x_2\partial_2 + 2x_3\partial_3 - x_4\partial_4 + x_6\partial_6 - 2x_7\partial_7 - x_8\partial_8$
E_{12}	$X_2 = x_4\partial_1 + (x_5-x_1)\partial_2 + x_6\partial_3 - x_4\partial_5 - x_7\partial_8$
E_{13}	$X_3 = x_7\partial_1 + x_8\partial_2 - (2x_1+x_5)\partial_3 - x_4\partial_6$
E_{21}	$X_4 = -x_2\partial_1 + (x_1-x_5)\partial_4 + x_2\partial_5 + x_3\partial_6 - x_8\partial_7$
$E_{22}-E_{33}$	$X_5 = -x_2\partial_2 + x_3\partial_3 + x_4\partial_4 + 2x_6\partial_6 - x_7\partial_7 - 2x_8\partial_8$
E_{23}	$X_6 = -x_2\partial_3 + x_7\partial_4 + x_8\partial_5 - (x_1+2x_5)\partial_6$
E_{31}	$X_7 = -x_3\partial_1 - x_6\partial_4 + (2x_1+x_5)\partial_7 + x_2\partial_8$
E_{32}	$X_8 = -x_3\partial_2 - x_6\partial_5 + x_4\partial_7 + (x_1+2x_5)\partial_8$

Tabelle 1: Fundamentale Vektorfelder der adjungierten Darstellung von $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$.

Skalarprodukt, weswegen Satz 2 hier weiterhilft. Die allgemeine Vorgehensweise wird in Anhang B erklärt. In jedem Fall ergibt sich für D_2 der Ausdruck

$$\begin{aligned} D_2 \;=\;& -3\,\partial_1^2\partial_5 - 3\,\partial_1\partial_5^2 - 18\,\partial_1\partial_6\partial_8 - 18\,\partial_3\partial_5\partial_7 + 27\,\partial_2\partial_6\partial_7 + 9\,\partial_2\partial_4\partial_5 \\ & + 27\,\partial_3\partial_4\partial_8 + 9\,\partial_1\partial_2\partial_4 + 2\,\partial_5^3 + 2\,\partial_1^3 + 9\,\partial_1\partial_3\partial_7 + 9\,\partial_5\partial_6\partial_8\,. \end{aligned}$$

Die G-Invarianz dieses Operators prüft man, in dem man seinen Kommutator mit jedem der fundamentalen Vektorfelder X_i berechnet und die Identität $[D_2, X_i] = 0$ überprüft. Weiterhin beobachtet man, daß D_2 auf den m_2-Potenzen nicht als ein reiner Absteiger wirkt, denn es gilt

$$D_2(m_2^3) \;=\; -1332\,m_2^2 + 12\,m_1^3\,.$$

Abschließend sei noch der Kommutator $[D_2, m_2]$ bestimmt:

$$\begin{aligned} [D_2, m_2] \;=\;& -120 - 45E \\ & +3\,(2\,x_1x_5 - x_3x_7 - x_2x_4 + 2\,x_6x_8 - x_1^2 + 2\,x_5^2)\,(\partial_1^2 - 3\,\partial_6\partial_8 + 3\,\partial_2\partial_4 - 2\,\partial_1\partial_5) \\ & +3\,(2\,x_1x_5 + 2\,x_3x_7 - x_2x_4 - x_6x_8 + 2\,x_1^2 - x_5^2)\,(\partial_5^2 - 3\,\partial_3\partial_7 + 3\,\partial_2\partial_4 - 2\,\partial_1\partial_5) \\ & -9\,(x_1x_2 + x_3x_8 + x_2x_5)\,(\partial_1\partial_2 + \partial_2\partial_5 + 3\,\partial_3\partial_8) \\ & -9\,(x_1x_4 + x_4x_5 + x_6x_7)\,(\partial_1\partial_4 + \partial_4\partial_5 + 3\,\partial_6\partial_7) \\ & +9\,(x_3x_5 - x_2x_6)\,(\partial_1\partial_3 + 3\,\partial_2\partial_6 - 2\,\partial_3\partial_5) \\ & +9\,(x_1x_6 - x_3x_4)\,(\partial_5\partial_6 + 3\,\partial_3\partial_4 - 2\,\partial_1\partial_6) \\ & +9\,(x_5x_7 - x_4x_8)\,(\partial_1\partial_7 + 3\,\partial_4\partial_8 - 2\,\partial_5\partial_7) \\ & +9\,(x_1x_8 - x_2x_7)\,(\partial_5\partial_8 + 3\,\partial_2\partial_7 - 2\,\partial_1\partial_8) \end{aligned}$$

An ihm erkennt man sehr schön, wie die invarianten Differentialoperatoren aus zwei zueinander „dualen“ Darstellungen in $\mathbf{C}[V]$ und $\mathcal{D}_c(V)$ zusammengesetzt sind.

Beispiel 4 (Binäre Formen II). Betrachte die Wirkung der $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ auf den binären Formen der Ordnung 4, d.h. auf $V_3 = \mathsf{S}^3\mathbf{C}^2 =: ae_1^3 + be_1^2e_2 + ce_1e_2^2 + de_2^3$. Der Invariantenring $\mathbf{C}[V_3]^G$ wird von dem Polynom

$$f(a,b,c,d) \;=\; -18\,abcd + 4\,ac^3 + 27\,a^2d^2 + 4\,b^3d - b^2c^2\,.$$

Gewicht	Vielfht.	harmonische Erzeuger
0	1	1
2	1	v_2
3	2	$a,\, v_3$
4	1	v_2^2
5	2	$av_2,\, v_2v_3$
6	3	$a^2,\, av_3,\, 7\,v_3^2 + 86\,v_2^3$
7	2	$av_2^2,\, v_3v_2^2$
8	3	$a^2v_2,\, av_3v_2,\, v_2(173\,v_2^3 + 36\,v_3^2)$
9	4	$a^3,\, a^2v_3,\, a(9\,v_3^2 + 131\,v_2^3),\, 11\,v_3^3 + 555\,v_3v_2^3$
10	3	$a^2v_2^2,\, av_3v_2^2,\, 142\,v_2^5 + 55\,v_3^2v_2^2$

Tabelle 2: Harmonische Erzeuger von $\mathbf{C}[V_3]^N(k)$.

erzeugt, weswegen nach Satz 9 diese Darstellung kofrei und damit automatisch harmonisch ist. Der Ring der G-invarianten Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten wird generiert von

$$D_f \;=\; -\partial_a\partial_b\partial_c\partial_d + \frac{2}{3}\partial_a\partial_c^3 + \frac{1}{6}\partial_a^2\partial_d^2 + \frac{2}{3}\partial_b^3\partial_d - \frac{1}{2}\partial_b^2\partial_c^2\,,$$

und somit hat jeder Vielfachheitenraum ein Erzeugendensystem über $\mathbf{C}[V_3]^N$ aus D_f-harmonischen Funktionen. Auf f wirkt D_f als ein reiner Absteiger, allerdings mit einem Eigenwert vom Grad 4:

$$D_f(f^n) \;=\; 4\,n^2\,(36\,n^2-1)f^{n-1}\,.$$

Die Vektoren $v_2 := b^2 - 3\,ac$ und $v_3 := 2\,b^3 + 27\,a^2d - 9abc$ sind N-invariant mit Gewicht 2 bzw. 3. Aißer der Invariante f und dem Monom a gibt es keine weiteren N-invarianten Polynome, so daß der Ring der Vektoren von höchstem Gewicht gleich

$$\mathbf{C}[V_3]^N \;=\; \mathbf{C}[a,\, v_2,\, v_3,\, f]$$

ist, welcher jedoch kein Polynomring ist, sondern im dem die Relation

$$2\,v_3^2 \;=\; 8\,v_2^3 \,+\, 27\,a^2 f$$

gilt. Das Spektrum besteht folglich aus $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, hat also beim höchsten Gewicht 1 eine „Spektrallücke“. Abschließend geben wir noch in Form einer Tabelle zu den ersten Eigenwerten ein Erzeugendensystem aus harmonischen Vektoren an. Mit Maple sind diese relativ leicht zu bestimmen. Die äußerlich komplizierte Gestalt der Vektoren z.B. bei den Gewichten 6, 8,... ist eine Konsequenz der Relation in $\mathbf{C}[V_3]^N$.

4 Analysis auf affinen Varietäten

4.1 Konstruktion eines kanonischen Hilbertraums

4.1.1 Problemstellung

In diesem Abschnitt geht es um die Untersuchung folgender Frage:

> Gegeben eine reelle affine Varietät M, gibt es einen kanonischen Hilbertraum, in dem der Koordinatenring von M dicht liegt ?

Dabei lassen wir uns leiten von der einfachsten aller reeller Varietäten, dem euklidischen $\mathbf{R}^n$. Für diesen ist bekannt, daß im Hilbertraum $L^2(\mathbf{R}^n, e^{-r^2}\mathrm{d}\mu)$, $r^2 := \|x\|^2$ alle Polynome enthalten sind und sie einen dichten, linearen Teilraum bilden, für den die Hermite-Polynome ein vollständiges wohlbekanntes Orthonormalsystem bilden. Entsprechend wollen wir den Hilbertraum $L^2(M, e^{-r^2}\mathrm{d}\mu)$ untersuchen, wobei $\mathrm{d}\mu$ nun das Oberflächenmaß von M ist.

Es stellt sich heraus, daß hierbei ein Sachverhalt entscheidend ist. Man benötigt die Algebraizität von M nämlich nur in Gestalt einer Kontrolle des Volumenwachstums von M, genauer, es wird benötigt, daß eine Konstante $C > 0$ existiert und eine natürliche Zahl $d \in \mathbf{N}$ derart, daß für das Volumen des Schnittes von M mit der Kugel B_r vom Radius r folgende Ungleichung gilt:

$$\mathrm{vol}_d(M \cap B_r) \;\leq\; C \cdot r^d\,. \tag{7}$$

Die Gültigkeit dieser Ungleichung für reelle affine Varietäten (mit $d = \dim M$) ist prinzipiell schon lange bekannt und beruht auf den Arbeiten von J. Milnor über die Betti-Zahlen reeller Varietäten aus den sechziger Jahren [Mil64], [Mil94] sowie das Croftonsche Verfahren zur Berechnung von Volumina.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind veröffentlicht in der gemeinsamen Arbeit mit Prof. Th. Friedrich [AF99].

Bemerkung 1. Interessiert man sich stattdessen für komplexe Varietäten, so kommt man zu ganz ähnlichen und ebenso interessanten, aber ganz anders zu behandelnden Fragestellungen. Im $\mathbf{C}^n$, aufgefaßt als reeller Vektorraum, erhält man zunächst das Analogon des oben geschilderten Ergebnisses: die Polynome in z und $\bar{z}$ liegen dicht in $L^2(\mathbf{C}^n, e^{-r^2}\mathrm{d}\mu)$. Man erinnert sich zudem, daß dieser L^2-Raum noch einen ausgezeichneten Unterraum enthält, nämlich den Fock-Raum der analytischen, bzgl. des Gauß-Maßes quadrat-integrablen Funktionen

$$\mathcal{F}(\mathbf{C}^n) \;:=\; \{f \in L^2(\mathbf{C}^n, e^{-r^2}\mathrm{d}\mu) \mid f \text{ analytisch }\}\,,$$

der bereits abgeschlossen ist, und in dem die Polynome in z dicht liegen.

Für komplexe affine Varietäten $N \subset \mathbf{C}^n$, immer noch aufgefaßt als reelle affine Varietät $N^{\mathbf{R}} \subset \mathbf{R}^{2n}$ doppelter Dimension hat man zunächst die Übertragung der erwähnten Volumenabschätzung. Ein Satz von W. Stoll [Sto64a], [Sto64b] liefert sogar noch mehr: unter den analytischen Mannigfaltigkeiten sind es *genau* die algebraischen Varietäten, deren Volumenwachstum polynomial wie in Gl. (7) beschrieben ist; es sind also dies Mannigfaltigkeiten (und vermutlich die einzigen), für die das konstante Polynom integrierbar bzgl. des Gauß-Maßes ist, und deswegen die solche, für die der Koordinatenring $\mathbf{R}[N^{\mathbf{R}}]$ in $L^2(N, e^{-r^2}\mathrm{d}\mu)$ liegt. Weiterhin kann man den Fock-Raum definieren

$$\mathcal{F}(N) \;:=\; \{f \in L^2(N, e^{-r^2}\mathrm{d}\mu) \mid f \text{ analytisch }\}\,.$$

Dabei ist es unwesentlich, ob man hierbei die Einschränkungen analytischer Funktionen des $\mathbf{C}^n$ auf N oder auf N analytische Funktionen betrachtet, da nach einem wohlbekannten Satz von Cartan letztere sich immer auf den ganzen $\mathbf{C}^n$ fortsetzen lassen. Dieser Raum ist ebenfalls wieder abgeschlossen und enthält auch weiterhin die komplexen Polynome auf N, doch ist unbekannt, ob die Polynome hierin dicht liegen. Von Prof. Leiterer (HU Berlin) und Prof. Ohsawa (Nagoya) habe ich im November 1998 erfahren, daß dies wohl nicht uneingeschränkt gelten wird, sondern erheblich von den Glattheitseigenschaften von N abhängen sollte. Leichte explizite Beispiele für diese Effekte sind aber auch hier nicht ohne weiteres hinzuschreiben.

4.1.2 Das Volumenwachstum einer affinen Varietät und Folgerungen

Satz 1 (Polynomiales Wachstum des Volumens [Brö95, Satz (1), Abs.8, S.142])
Ist $M \subset \mathbf{R}^n$ eine reelle affine Varietät der Dimension d, so existiert eine Konstante C, die nur vom Grad der M definierenden Polynome abhängt, derart, daß für das d-dimensionale Volumen des Schnittes von M mit der Kugel B_r vom Radius r folgende Ungleichung gilt:

$$\mathrm{vol}_d(M \cap B_r) \;\leq\; C \cdot r^d \,.$$

□

Satz 2
Sei $M \subset \mathbf{R}^n$ eine glatte abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des euklidischen Raumes mit der Volumenform $\mathrm{d}\mu$, und es existieren eine reelle Konstante C sowie eine natürliche Zahl d derart, daß für alle Kugeln B_r vom Radius r die Ungleichung

$$\mathrm{vol}(M \cap B_r) \;\leq\; C \cdot r^d$$

gelte. Sei schließlich $\mathbf{R}[M]$ derjenige Ring von Funktionen, der durch Einschränkung der Polynome in n Variablen auf M entsteht. Dann gilt:

(1) *$\mathbf{R}[M]$ ist im Hilbertraum $L^2(M, e^{-r^2}\mathrm{d}\mu)$ enthalten;*

(2) *alle Funktionen $e^{\alpha r^2}$ mit $\alpha < 1/2$ sind in $L^2(M, e^{-r^2}\mathrm{d}\mu)$ enthalten.*

Mit der vorangegangenen Volumenabschätzung folgt also für affine Varietäten:

Korollar 1
Sei M eine reelle affine Varietät. Dann liegen $\mathbf{R}[M]$ und alle Funktionen $e^{\alpha r^2}$ mit $\alpha < 1/2$ in $L^2(M, e^{-r^2}\mathrm{d}\mu)$.

□

Beweis (von Satz 2): Für die erste Behauptung ist es ausreichend,

$$\mathrm{I}(M) \;:=\; \int_M r^m e^{-r^2}\mathrm{d}\mu < \infty$$

für eine beliebige natürliche Zahl m zu beweisen. Wir schreiben dieses Integral mittels Integration über Kugelschalen B_j vom Radius j um zu

$$\mathrm{I}(M) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \int_{M \cap (B_{j+1} - B_j)} r^m e^{-r^2}\mathrm{d}\mu$$

und schätzen dies ab durch die Volumina der Schnitte von M mit den entsprechenden Kugeln mal dem Supremum des Integranden über die Ränder (innere Sphäre für e^{-r^2}, äußere Sphäre für r^m)

$$\mathrm{I}(M) \;\leq\; \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^m e^{-j^2}\left[\mathrm{vol}(M \cap B_{j+1}) - \mathrm{vol}(M \cap B_j)\right] \;\leq\; \sum_{r=0}^{\infty}(r+1)^m e^{-r^2}\mathrm{vol}(M \cap B_{r+1})\,.$$

Hier benutzen wir die Volumenabschätzung

$$\mathrm{I}(M) \;\leq\; C \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)^{m+d} e^{-r^2}\,, \tag{8}$$

und es verbleibt, die Endlichkeit der rechten Seite nachzuweisen. Dies kann man zum Beispiel mit dem Quotientenkriterium einsehen: nennen wir die Summanden dieser Reihe a_r, so ist

$$\frac{a_{r+1}}{a_r} \;=\; \frac{(r+1)^{m+d} e^{-r^2-2r-1}}{(r)^{m+d} e^{-r^2}} \;=\; \left(\frac{r+1}{r}\right)^{m+d} \frac{1}{e^{2r+1}} \longrightarrow 0,$$

welches offensichtlich für $r \to \infty$ gegen Null strebt. Eine ähnliche Rechnung liefert das Resultat für die Familie $e^{\alpha r^2}$ mit $\alpha < 1/2$. □

Für die weiteren Überlegungen benötigen wir den Sachverhalt, daß bei festem $k \in \mathbf{R}^n$ die Funktion $e^{-r^2} e^{i\langle k,x\rangle}$ gleichmäßig approximiert werden kann.

Lemma 1
Sei $p_m(x) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} i^\alpha \langle k,x\rangle^\alpha / \alpha!$ für $m \geq 1$. Dann konvergiert die Funktionenfolge $e^{-r^2} p_m(x)$ auf $\mathbf{R}^n$ gleichmäßig gegen $e^{-r^2} e^{i\langle k,x\rangle}$.

Beweis. Aus der Ungleichung

$$|\, p_m(x) - e^{i\langle k,x\rangle}\,| \;\leq\; \frac{\|k\|^m \|x\|^m}{m!}\; e^{\|k\|\cdot\|x\|}$$

erhalten wir mit $y = \|k\| \cdot \|x\|$ sofort

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n} |\, e^{-r^2} p_m(x) - e^{-r^2} e^{i\langle k,x\rangle}\,| \;\leq\; \sup_{0\leq y} \frac{y^m}{m!}\; e^{y - y^2/\|k\|^2} \;=:\; C_m$$

und wir müssen bei festem $k \in \mathbf{R}^n$ zeigen, daß die rechte Seite für $m \to \infty$ gegen Null konvergiert. Dabei wollen wir fortan unter k den Betrag des Vektors k verstehen, um die Formeln nicht zu überfrachten. Eine direkte Bestimmung des Maximums im Intervall $y \in [0,\infty[$ führt auf die Gleichung

$$C_m \;=\; \frac{1}{m!}\left(\frac{k^2}{4} + \frac{k}{4}\sqrt{k^2+8m}\right)^m \exp\left(\frac{k^2}{4} + \frac{k}{4}\sqrt{k^2+8m} - \frac{1}{k^2}\left(\frac{k^2}{4} + \frac{k}{4}\sqrt{k^2+8m}\right)^2\right).$$

Im folgenden behandeln wir die Asymptotik von C_m und lassen insbesondere von m unabhängige Konstanten weg. Fassen wir in diesem Sinne die Terme der Exponentialfunktion zusammen, so ergibt sich

$$C_m \;\approx\; \frac{1}{m!}\left(\frac{k^2}{4} + \frac{k}{4}\sqrt{k^2+8m}\right)^m \exp\left(\frac{k}{8}\sqrt{k^2+8m} - \frac{k^2+8m}{16}\right).$$

Die Stirlingsche Formel $m! \approx \sqrt{m}\, m^m e^{-m}$ führt zu

$$C_m \;\approx\; \frac{1}{\sqrt{m}\, m^m}\left(\frac{k^2}{4} + \frac{k}{4}\sqrt{k^2+8m}\right)^m \exp\left(\frac{k}{8}\sqrt{k^2+8m} + \frac{m}{2}\right).$$

Wegen

$$\lim_{m\to\infty} (\sqrt{k^2+8m} - \sqrt{8m}) \;=\; 0$$

können wir $\sqrt{k^2+8m}$ im Exponenten der Exponentialfunktion ersetzen durch $2\sqrt{2m}$:

$$C_m \;\approx\; \frac{1}{\sqrt{m}\, m^m}\left(\frac{k^2}{4} + \frac{k}{4}\sqrt{k^2+8m}\right)^m \exp\left(\frac{k}{4}\sqrt{2m} + \frac{m}{2}\right) \;=:\; e^{C_m^*}$$

mit

$$C_m^* \;=\; m\ln\left(\frac{k^2}{4}+\frac{k}{4}\sqrt{k^2+8m}\right)+\frac{k}{2\sqrt{2}}\sqrt{m}+\frac{m}{2}-m\ln(m)-\frac{1}{2}\ln(m)\,.$$

Ist m hinreichend groß bezüglich k, so kann $\ln(k^2/4+k/4\cdot\sqrt{k^2+8m})$ durch $\frac{1}{2}\ln(m)+\alpha$ mit α konstant abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
C_m^* &\lessapprox \frac{m}{2}\ln(m)+\alpha m+\frac{k}{2\sqrt{2}}\sqrt{m}+\frac{m}{2}-m\ln(m)-\frac{1}{2}\ln(m)\\
&\leq -\frac{m}{2}\ln(m)+(\alpha+1/2)m+\frac{k}{2\sqrt{2}}\sqrt{m}\\
&\leq -\frac{m}{2}\ln(m)+(\alpha+1/2+\frac{k}{2\sqrt{2}})m\\
&= m\left(\alpha+1/2+\frac{k}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln(m)\right)\,.
\end{aligned}$$

Also konvergiert $C_m=\exp(C_m^*)$ für $m\to\infty$ gegen Null. □

Satz 3
Sei $X = S^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ und $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ die Polynome des $\mathbf{R}^n$. Dann liegt der Vektorraum $\Sigma_\infty := \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)\cdot e^{-r^2}$ dicht im Raum $\mathcal{C}^0_\infty(S^n)$ aller stetigen, im Punkte ∞ verschwindenden Funktionen.

Beweis. Angenommen, der Abschluß $\overline{\Sigma_\infty}$ des Vektorraums Σ_∞ fällt nicht mit $\mathcal{C}^0_\infty(S^n)$ zusammen. Dann existiert nach dem Satz von Hahn-Banach ein stetiges lineares Funktional $L:\mathcal{C}^0(S^n)\to\mathbf{R}$, welches auf Σ_∞ identisch verschwindet, und mindestens ein $g_0\in\mathcal{C}^0_\infty(S^n)$, auf dem L nicht verschwindet, wofür also $L(g_0)\neq 0$ gilt.

Nach dem Satz von Riesz [Rud66, Ch.6, p.129 ff.] über die Darstellbarkeit der linearen Funktionale auf $\mathcal{C}^0(S^n)$ existieren zwei reguläre Borel-Maße μ_+, μ_- auf S^n derart, daß

$$L(f) \;=\; \int_{S^n} f(x)\,\mathrm{d}\mu_+(x)-\int_{S^n} f(x)\,\mathrm{d}\mu_-(x)$$

gilt. Insbesondere sind μ_+ und μ_- endlich, d.h. $\mu_\pm(S^n)<\infty$. Wegen $L|_{\Sigma_\infty}=0$ gilt für jedes Polynom $p(x)$

$$\int_{S^n} e^{-r^2}p(x)\,\mathrm{d}\mu_+(x) \;=\; \int_{S^n} e^{-r^2}p(x)\,\mathrm{d}\mu_-(x)\,.$$

Auf der Teilmenge $\mathbf{R}^n\subset S^n$ betrachten wir die Maße $\nu_\pm=e^{-r^2}\mu_\pm$. Es gilt also

$$\int_{\mathbf{R}^n} p(x)\,\mathrm{d}\nu_+(x) \;=\; \int_{\mathbf{R}^n} p(x)\,\mathrm{d}\nu_-(x)$$

nun auch für jedes komplex-wertige Polynom $p(x)$. Wir wählen $p(x)$ wie im vorangegangenen Lemma

$$p_m(x) \;=\; \sum_{\alpha=0}^{m-1} i^\alpha\,\langle k,x\rangle^\alpha/\alpha!\,.$$

Dann folgt aus

$$\int_{S^n} p_m(x)e^{-r^2}\,\mathrm{d}\mu_+(x) \;=\; \int_{\mathbf{R}^n} p_m(x)\,\mathrm{d}\nu_+(x) \;=\; \int_{\mathbf{R}^n} p_m(x)\,\mathrm{d}\nu_-(x) \;=\; \int_{S^n} p_m(x)e^{-r^2}\,\mathrm{d}\mu_-(x)$$

sowie der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge $p_m(x)e^{-r^2}$ gegen die Funktion $e^{i\langle k,x\rangle}e^{-r^2}$ auf S^n sofort

$$\int_{S^n} e^{i\langle k,x\rangle}e^{-r^2}\,\mathrm{d}\mu_+(x) \;=\; \int_{S^n} e^{i\langle k,x\rangle}e^{-r^2}\,\mathrm{d}\mu_-(x)\,,$$

d.h.

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle k,x\rangle}\, \mathrm{d}\nu_+(x) \;=\; \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle k,x\rangle}\, \mathrm{d}\nu_-(x)\,.$$

Die Fouriertransformationen der Maße ν_+ und ν_- stimmen demnach überein. Mit dem Satz von Bochner [Mau80, Ch.XIX, p.774 ff.] schließen wir $\nu_+ = \nu_-$ auf $\mathbf{R}^n$. Damit ist der Träger des Differenzmaßes $\nu_+ - \nu_-$ in der aus einem einzigen Punkt bestehenden Menge $\{\infty\}$ enthalten, und das lineare Funktional $L : \mathcal{C}^0(S^n) \to \mathbf{R}$ kann folglich nur eine δ-Distribution sein:

$$L(f) \;=\; c \cdot f(\infty) \quad \forall f \in \mathcal{C}^0(S^n).$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu der Annahme, es gäbe ein $g_0 \in \mathcal{C}^0_\infty(S^n)$ mit $L(g_0) \neq 0$. $\square$

4.1.3 Hauptsatz

Satz 4

Sei M eine glatte abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^n$, welche der Volumenwachstumsbedingung aus Satz 2 genügt, und $\mathbf{R}[M]$ der Ring derjenigen Funktionen, die durch Einschränkung der Polynome in n Variablen auf M entstehen. Dann gilt:

(1) *Der lineare Teilraum $\mathbf{R}[M] \cdot e^{-r^2}$ liegt dicht in $\mathcal{C}^0_\infty(\hat{M})$;*

(2) *Der Ring $\mathbf{R}[M]$ liegt dicht in $L^2(M, e^{-r^2}\mathrm{d}\mu)$.*

Beweis. Wir gehen über zur Ein-Punkt-Kompaktifizierung $\hat{M}$ von M und bemerken, daß $\hat{M} \subset S^n$ in der Sphäre enthalten ist. Ist eine beliebige Funktion aus $\mathcal{C}^0_\infty(\hat{M})$ gegeben, so setzen wir sie zunächst mittels des Tietzeschen Fortsetzungslemmas zu einer Funktion in $\mathcal{C}^0_\infty(S^n)$ fort und approximieren sie dort wie in dem vorangegangenen Satz 3 beschrieben. Durch Einschränkung der approximierenden Funktion auf M folgt, daß der lineare Teilraum $\mathbf{R}[M] \cdot e^{-r^2}$ in $\mathcal{C}^0_\infty(\hat{M})$ dicht liegt; damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Für den zweiten Teil ist es günstig, den Gauß-Faktor e^{-r^2} geeignet umzunormieren. Wir setzen

$$\Sigma_\infty(\hat{M}) \;:=\; \mathbf{R}[M] \cdot e^{-r^2/4}$$

und bemerken, daß auch dieser Raum eine dichte Teilmenge von $\mathcal{C}^0_\infty(\hat{M})$ ist. Zu dem Oberflächenmaß $\mathrm{d}\mu$ von M betrachten wir nun das Maß $\mathrm{d}\nu = e^{-r^2/2}\mathrm{d}\mu$ auf M und setzen es fort zu einem Maß $\mathrm{d}\hat{\nu}$ auf $\hat{M}$ mittels $\mathrm{d}\hat{\nu}(\infty) = 0$. Weil dann mit Satz 2

$$\int_{\hat{M}} \mathrm{d}\hat{\nu} \;=\; \int_M \mathrm{d}\nu \;=\; \int_M e^{-r^2/2}\mathrm{d}\mu \;=\; \int_M (e^{r^2/4})^2 e^{-r^2}\mathrm{d}\mu \;=:\; V \;<\; \infty$$

gilt, ist $\mathrm{d}\hat{\nu}$ ein endliches reguläres Borel-Maß auf $\hat{M}$. Daher ist die Algebra $\mathcal{C}^0_\infty(\hat{M})$ aller in einem Punkte verschwindenden, stetigen Funktionen bereits dicht in $L^2(\hat{M}, \mathrm{d}\hat{\nu})$

$$\overline{\mathcal{C}^0_\infty(\hat{M})} \;=\; \mathrm{L}^2(\hat{M}, \mathrm{d}\hat{\nu})\,.$$

Ist f eine Funktion in $L^2(M, e^{-r^2}\mathrm{d}\mu)$, so haben wir

$$\int_M \|fe^{-r^2/4}\|^2 e^{-r^2/2}\mathrm{d}\mu \;=\; \int_M \|f\|^2 e^{-r^2}\mathrm{d}\mu \;<\; \infty$$

und demnach liegt $fe^{-r^2/4}$ in $L^2(\hat{M}, \mathrm{d}\hat{\nu})$. Folglich existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathcal{C}^0_\infty(\hat{M})$ mit

$$\int_M \|fe^{-r^2/4} - g(x)\|^2 e^{-r^2/2}\mathrm{d}\mu \;<\; \varepsilon/2\,.$$

Nach Satz 3 können wir ein Polynom $p(x) \in \mathbf{R}[M]$ mit

$$\sup_{x\in\hat{M}} |g(x) - p(x)e^{-r^2/4}|^2 \ < \ \varepsilon/2V$$

wählen. Aus der allgemeinen Ungleichung $\|x+y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ folgt

$$\int_M \|f(x)e^{-r^2/4} - p(x)e^{-r^2/4}\|^2 e^{-r^2/2}\mathrm{d}\mu \ < \ \varepsilon\,;$$

dies ist aber äquivalent zu

$$\int_M \|f(x) - p(x)\|^2 e^{-r^2}\mathrm{d}\mu \ < \ \varepsilon\,.$$

□

Bemerkung 2. Die Glattheit von M ist im Beweis nicht wesentlich; mit der gleichen Argumentation zeigt man obigen Satz für jede abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^n$, sofern sie nur ein Maß besitzt derart, daß die Bedingung polynomialen Volumenwachstums wir in Satz 2 formuliert gültig bleibt.

Weiterhin ist klar, daß man ohne weitere Struktur auf M keine „kanonischen" Orthonormalbasen konstruieren kann, denn diese hängen entscheidend von der – subjektiven – Wahl eines Koordinatensystems auf M ab (vgl. hierzu z.B. Abschnitt 4.2.1, wo dies für $M = \mathbf{R}^2$ ausgeführt ist).

4.1.4 Erste einfache Beispiele

Wir führen nun einige Beispiele an; zunächst erhält man natürlich die lineare Dichtheit der Hermite-Polynome auf dem $\mathbf{R}^n$ und die der Legendre-Polynome im Intervall $M = [-1, 1]$.

Beispiel 1. Betrachte die durch zwei Polynome f, h definierte Drehfläche im $\mathbf{R}^3$

$$\begin{cases} x = f(u_1)\cos u_2 \\ y = f(u_1)\sin u_2 \\ z = h(u_1) \end{cases} , \quad f(u_1) > 0\,, \quad (u_1, u_2) \in \mathbf{R} \times [0, 2\pi]\,.$$

Dann ist $\mathrm{d}\mu = f\sqrt{f'^2 + h'^2}\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2$ und $r^2 = f^2 + h^2$, wir erhalten also

$$\mathbf{R}[f\cos u_2,\, f\sin u_2,\, h] \text{ liegt dicht in } L^2(\mathbf{R}\times[0,2\pi], e^{-(f^2+h^2)} f\sqrt{f'^2+h'^2}\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2)\,.$$

Im Spezialfall $f = 1$, $h = u_1$ des Zylinders erhalten wir den wohlbekannten Sachverhalt, daß der Polynomring

$$\mathbf{R}[u_1,\, \cos u_2,\, \sin u_2,] = \mathbf{R}[u_1] \otimes \mathbf{R}[\cos u_2,\, \sin u_2]$$

dicht liegt im Hilbertraum

$$L^2(\mathbf{R}\times[0,2\pi], e^{-u_1^2}\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2) = L^2(\mathbf{R}, e^{-u_1^2}\,\mathrm{d}u_1) \otimes L^2([0,2\pi], \mathrm{d}u_2)\,.$$

Beispiel 2. Sei $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ein Polynom; wir betrachten dessen Betragsfläche

$$f:\ \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}^3, \quad f(z) = (x, y, |F(z)|), \quad z = x + iy\,.$$

Dann rechnet man nach, daß $\mathrm{d}\mu = \sqrt{1+|F'|^2}\,|\mathrm{d}z|^2$ und $r^2 = |z|^2 + |F(z)|^2$ ist. Folglich gilt

$$\overline{\mathbf{R}[x, y, |F(z)|]} \ = \ L^2(\mathbf{R}^2, e^{-(|z|^2+|F(z)|^2)}\sqrt{1+|F'|^2}\,|\mathrm{d}z|^2)\,.$$

Studieren wir nun das Polynom $F = z^{2k}$ genauer. Hier stimmt der Koordinatenring mit $\mathbf{R}[x,y]$ überein, und wir erhalten, daß die Polynome in den Variablen x und y dicht liegen in

$$L^2(\mathbf{R}^2, e^{-(|z|^2+|z|^{4k})}\sqrt{1+4k^2|z|^{2(2k-1)}}\,|\mathrm{d}z|^2)\,.$$

Beispiel 3. Zum Schluß betrachten wir noch ein eindimensionales Beispiel: den Graphen $M = \{(x, f(x))\}$, wobei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ polynomial sei. Es ist dann $\mathrm{d}\mu = \sqrt{1 + \|f'\|^2}\,\mathrm{d}x$, und wir erhalten

$$\overline{\mathbf{R}[x]} \;=\; L^2(\mathbf{R}, e^{-(x^2+\|f(x)\|^2)}\sqrt{1+\|f'\|^2}\,\mathrm{d}x)\,.$$

4.2 Anwendung auf Matrixfunktionen nicht kompakter Gruppen

4.2.1 Das klassische Beispiel der Laguerre-Polynome

Wir beginnen mit einer kurzen Darstellung des klassischen Beispiels der Laguerre-Polynome, die sich stark an das jeweils 12. Kapitel in [VK93] und [Waw84] anlehnt. Betrachte die folgende reelle, per Konstruktion algebraische Gruppe

$$G \;:=\; \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \bar z & \bar z z/2 + ix \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = g(z,x) \;:\; z \in \mathbf{C},\; x \in \mathbf{R} \right\}$$

mit der Gruppenmultiplikation

$$g(z,x)g(w,y) \;:=\; g(z+w, x+y+\operatorname{Im}\bar z w)\,.$$

Sie ist isomorph zur Heisenberg-Gruppe aller reellen Dreiecksmatrizen mit Diagonaleinträgen gleich Eins. Die Untergruppe H aller Elemente der Gestalt $g(0,x)$ in G ist darin normal und der Quotient G/H isomorph zu $\mathbf{C}$; bezeichne mit dz das übliche Lebesgue-Maß hierauf, welches automatisch G-invariant ist. Wir betrachten den Hilbertraum

$$H \;:=\; L^2\left(\mathbf{C}, e^{-|z|^2}/\pi\, dz\right)\,,$$

auf dem vermöge der Vorschrift

$$\varrho(g(w,x)f)(z) \;:=\; \exp\left(ix - \bar w w/2 - \bar w z\right) f(z+w)$$

eine unitäre Darstellung (*Bargmann-Darstellung*) von G definiert wird. Entscheidend für die Gestalt der Matrixfunktionen wird sein, daß das Lebesgue-Maß sich in Polarkoordinaten schreiben läßt als

$$\int_{\mathbf{C}} f(z)dz \;=\; \int_0^\infty r\,dr \int_{S^1} f(rs)\,ds \;=\; \int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,d\theta\,.$$

Die 1-Sphäre ist natürlich die Lie-Gruppe U(1) und ds genau ihr Haarsches Maß. Deswegen sind die Polynome

$$e_m \;:=\; z^m/\sqrt{m!}$$

in H orthonormal zueinander, weil ihre Restriktionen auf U(1) dort bekanntermaßen orthogonal sind; der Faktor $1/\pi$ in der Definition von H paßt die Normierung geeignet an. Eine mühselige, wenngleich auch nicht schwierige Rechnung (man entwickle in eine Taylor-Reihe) führt für G auf die Formel für die Matrixfunktionen

$$u_{nm}(w,x) \;:=\; \langle e_n, g(w,x)e_m\rangle \;=\; \left(\frac{n!}{m!}\right)^{1/2} \exp\left(ix - |w|^2/2\right) \bar w^{m-n} L_n^{m-n}(|w|^2)\,,$$

wobei L_n^{m-n} die durch

$$\frac{d^n}{dz^n} e^{-t} t^m \;=\; n!\, e^{-t} t^{m-n} L_n^{m-n}(t)$$

definierten Laguerre-Polynome sind; sie sind unabhängig vom Wert von m immer Polynome vom Grad n in t, und $\bar z^{m-n} L_n^{m-n}(|z|^2)$ ist ein Polynom vom Grad n in z und Grad m in $\bar z$.

Folglich spannen diese Produkte ganz $\mathbf{C}[z,\bar{z}]$ auf. Zur Rolle der Laguerre-Polynome in der Darstellungstheorie, ihren Anwendungen in der theoretischen Physik wäre viel zu sagen; wir wollen aber sofort zu ihren Orthogonalitäts- und Dichtheitseigenschaften übergehen. Für unsere weiteren Betrachtungen können wir $x = 0$ setzen, uns also auf Gruppenelemente der Form $g(z, 0)$ beschränken. Der Gestalt der Matrixfunktionen entnimmt man sofort, daß alle $u_{nm}(z, 0)$ in $L^2(\mathbf{C}, dz)$ liegen. Aus Satz 4 folgt zunächst, daß dort der lineare Teilraum $e^{-|z|^2/2}\mathbf{C}[z,\bar{z}]$ dicht liegt; doch weil der Grundraum zweidimensional ist, hängt jede Orthonormalisierungsvorschrift hierfür entscheidend von der Wahl eines Koordinatensystems ab, oder, anders ausgedrückt, durch die Forderung, ein System von Polynomen $\varphi_{nm} \in \mathbf{C}[z,\bar{z}]$ zweier natürlicher Parameter möge die Gleichung

$$\int_{\mathbf{C}} \varphi_{nm}(z,\bar{z})\bar{\varphi}_{kl}(z,\bar{z})e^{-|z|^2}\, dz \;=\; \delta_{nk}\delta_{ml} \tag{9}$$

erfüllen, ist dieses noch nicht eindeutig bestimmt. Denn wählt man z.B. auf $\mathbf{C}$ euklidische Koordinaten, $dz = dx\, dy$, so erhält man als Orthonormalsystem die Produkte von Hermite-Polynomen, und die Orthogonalitätsrelation liest sich

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^2} H_n(x)H_m(y)H_k(x)H_l(y)e^{-x^2-y^2}\, dxdy \;=\\ &\qquad \int_{\mathbf{R}} H_n(x)H_k(x)e^{-x^2}\, dx \int_{\mathbf{R}} H_m(y)H_l(y)e^{-y^2}\, dy \;=\; \delta_{nk}\,\delta_{ml}\,.\end{aligned}$$

Wir wollen stattdessen zeigen, daß die Laguerre-Polynome durch Orthogonalisierung in demselben Hilbertraum, aber bzgl. Polarkoordinaten entstehen. Hierzu berechnen wir zunächst das Skalarprodukt zweier Matrixfunktionen in $L^2(\mathbf{C}, dz)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{C}} u_{nm}(z)\bar{u}_{kl}(z)\, dz \;&=\; \left(\frac{n!\,k!}{m!\,l!}\right)^{1/2} \int_{\mathbf{C}} e^{-|z|^2}\bar{z}^{m-n}z^{l-k}L_n^{m-n}(|z|^2)L_k^{l-k}(|z|^2)\, dz\\ &=\; \int_0^\infty e^{-r^2}r^{(m-n)+(l-k)+1}L_n^{m-n}(r^2)L_k^{l-k}(r^2)\, dr \int_0^{2\pi} e^{i\theta[(l-k)-(m-n)]}\, d\theta\,,\end{aligned}$$

wobei das zweite Integral den Wert $2\pi\,\delta_{m-n,l-k}$ hat. Deswegen setzt man $m - n = l - k =: p$ und erhält

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{C}} u_{n,n+p}(z)\bar{u}_{k,k+p}(z)\, dz \;&=\; \pi\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2p}L_n^p(r^2)L_k^p(r^2)\, 2r\, dr\\ &=\; \pi\int_0^\infty e^{-x}x^pL_n^p(x)L_k^p(x)\, dx\\ &=\; \pi\,\frac{n!}{(n+p)!}\,\delta_{nk}\,.\end{aligned}$$

Die Orthogonalitätsrelation für die Matrixfunktionen lautet somit zusammenfassend

$$\int_{\mathbf{C}} u_{nm}(z)\bar{u}_{kl}(z)\, dz \;=\; \pi\,\frac{n!}{m!}\,\delta_{nk}\,\delta_{ml}$$

und die eingangs betrachteten Polynome

$$Q_n^p(z,\bar{z}) \;:=\; \bar{z}^pL_n^p(|z|^2)/\sqrt{\pi} \;=\; r^pe^{-i\theta p}L_n^p(r^2)/\sqrt{\pi} \;=\; u_{n,n+p}(z)\, e^{|z|^2/2}\left(\frac{\pi(n+p)!}{n}\right)^{1/2}$$

bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbf{C},\, e^{-|z|^2}\, dz)$. Das klassische Ergebnis, nämlich die Dichtheit der Laguerre-Polynome $L_n^p(t)$ in $L^2([0,\infty[,\, e^{-t}t^p\, dt)$, folgt nun sofort hieraus. Ähnlich wie hier vorgeführt eignen sich die Laguerre-Polynome nun auch, um zusammen mit den Eigenfunktionen des Laplace-Operators Orthonormalsysteme in Kugelkoordinaten für $L^2(\mathbf{R}^n)$ zu konstruieren (vgl. [VK93, 12.3.2]).

A Affine Realisation der klassischen symmetrischen Räume

Sei $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ eine zusammenhängende klassiche reduktive algebraische Gruppe mit einfacher Lie-Algebra, θ ein involutiver Automorphismus von G und $K := G^\theta$ die Menge der Fixpunkte von G unter dieser Involution. Der symmetrische Raum G/K kann drei verschiedenen geometrischen Strukturen auf $\mathbf{C}^n$ entsprechen:

(1) nicht-entarteten symmetrischen oder schiefsymmetrischen Bilinearformen (zwei Fälle);

(2) Polarisierungen $\mathbf{C}^n = V_+ + V_-$, wobei $V_\pm$ vollständig isotrope Unterräume bzgl. einer Bilinearform sind; diese Bilinearform kann die Nullform, oder nicht-entartet symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch sein (drei Fälle);

(3) orthogonale Zerlegungen $\mathbf{C}^n = V_+ + V_-$, bzgl. einer nicht-entarteten symmetrischen oder schiefsymmetrischen Bilinearform (zwei Fälle).

Wir setzen $\tau(g) = \bar{g}^{-1}$. Die Involution θ wird immer so gewählt sein, daß sie folgende Eigenschaften hat:

(1) $\tau(G) = G$ und G^τ ist eine kompakte reelle Form von G;

(2) Die Untergruppe H aller in G liegenden Diagonalmatrizen ist ein maximaler und unter θ invarianter Torus;

(3) τ und θ kommutieren.

Wir stellen nun die explizite Realisierung der Richardson-Einbettung für die klassichen symmetrischen Räume zusammen. Alle symmetrischen Räume sind mit ihrer Cartan-Bezeichnung versehen und die Hermitesch symmetrischen Räume unter ihnen als solche gekennzeichnet („H “). Ansonsten sind die meisten Einträge selbsterklärend; am Ende ist immer ein Generatorensystem des Rings der K-sphärischen Darstellungen angegeben (vgl. Abschnitt 3.2.2). Für die Beweise und Bezeichnungen sei auf die Kapitel [GW97, Ch. 11-12] verwiesen.

Notation 1. Folgende Matrizen werden nun häufig gebraucht werden:

- $S_p := (\delta_{p+1-i,j})_{i,j}$: die Matrix, die auf der Schiefdiagonalen immer den Eintrag Eins und sonst den Eintrag Null hat;
- $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad T_n := \mathrm{diag}(J, \ldots, J)$ (n-mal), $\quad T_n^2 = -I_{2n}$, $\quad T_n^{-1} = T_n^t$;
- $J_{p,q} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & S_p \\ 0 & I_{q-p} & 0 \\ S_p & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad p \leq q,\ p+q=n$, $\quad J_{p,q}^t = J_{p,q}^{-1} = J_{p,q}$, $\quad S_n J_{p,q} S_n = J_{p,q}$
  und $K_{p,q} := \begin{pmatrix} J_{p,q} & 0 \\ 0 & J_{p,q} \end{pmatrix}$, $\quad K_{p,q}^2 = I_{2n}$;
- $J_n := \begin{pmatrix} 0 & S_n \\ -S_n & 0 \end{pmatrix}$, $\quad J_n^2 = -I_{2n}$, $\quad J_n^{-1} = J_n^t$;
- $\gamma := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad n = 2l$, $\quad \Gamma_n S_n + S_n \Gamma_n = 0$, $\quad \Gamma_n = \Gamma_n^t$, $\quad \Gamma_n^2 = -I_n$
  falls $l = 2r$ gerade: $\Gamma_n := i\mathrm{diag}(\gamma, \ldots, \gamma, -\gamma, \ldots, -\gamma)$ (jeweils r-mal)
  falls $l = 2r+1$ gerade: $\Gamma_n := i\mathrm{diag}(\gamma, \ldots, \gamma, 1, -1, -\gamma, \ldots, -\gamma)$ (jeweils r-mal)

Involutionen, die zu Bilinearformen gehören

Typ AI – symmetrische Bilinearform:

- $G = \mathrm{SL}(n,\mathbf{C}), \quad \theta(g) = g^{-t}, \quad K = G^\theta = \mathrm{SO}(n,\mathbf{C})$
- $g \star y = gyg^t$, Q zusammenhängend, $\sigma = \theta\tau : \sigma(g) = \bar{g}$
- $\mathrm{SL}(n,\mathbf{C})/\mathrm{SO}(n,\mathbf{C}) = \{y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) : y = y^t, \det y = 1\}, \quad gK \mapsto gg^t$
- $\mathfrak{p} = \{y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) : y = y^t, \operatorname{tr} y = 0\}, \quad \varrho(k)X = kXk^{-1}$ für $X \in \mathfrak{p}$
- $\operatorname{rk} G = n-1 =: l, \quad \operatorname{rk} G/K = l, \quad 2\varpi_1, 2\varpi_2, \ldots, 2\varpi_l$

Typ AII – schiefsymmetrische Bilinearform:

- $G = \mathrm{SL}(2n,\mathbf{C}), \quad \theta(g) = T_n g^{-t} T_n^t, \quad K = G^\theta = \mathrm{Sp}(2n,\mathbf{C})$
- $g \star y = gyT_n g^t T_n^t$, Q zusammenhängend, $\sigma(g) = T_n \bar{g} T_n^t$
- $\mathrm{SL}(2n,\mathbf{C})/\mathrm{Sp}(2n,\mathbf{C}) = \{y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) : yT_n = -(yT_n)^t, \det y = 1\}, \quad gK \mapsto gT_n g^t T_n^t$
- $\operatorname{rk} G = 2n-1 =: l, \quad \operatorname{rk} G/K = (l-1)/2, \quad \varpi_2, \varpi_4, \ldots, \varpi_{l-1}$

Involutionen, die zu Polarisierungen gehören

Typ AIII (H) – Nullform:

- $G = \mathrm{SL}(p{+}q,\mathbf{C}), \quad p \le q,\ p{+}q = n, \quad \theta(g) = J_{p,q} g J_{p,q}, \quad K = G^\theta = \mathrm{S}\,(\mathrm{GL}(p,\mathbf{C}) \times \mathrm{GL}(q,\mathbf{C}))$
- $P_\pm = \frac{1}{2}(I_n \pm J_{p,q})$ ist die Projektion auf den ± 1-Eigenraum $V_\pm$ von $J_{p,q}$, $\mathbf{C}^n = V_+ \oplus V_-$,
  $\dim V_+ = p$, $\dim V_- = q$
- $g \star y = gyJ_{p,q} g^{-1} J_{p,q}, \quad Q = \{y \in G \mid (yJ_{p,q})^2 = I_n\}$ nicht zusammenhängend,
- Zu jedem $y \in Q$ gehört das idempotente Element $yJ_{p,q}$, definiert also eine Zerlegung
  $\mathbf{C}^n = V_+(y) \oplus V_-(y), \quad \dim V_+(y) = \operatorname{tr} yJ_{p,q} = 0, \ldots, n$
- $\mathrm{SL}(p+q,\mathbf{C})/\mathrm{S}\,(\mathrm{GL}(p,\mathbf{C}) \times \mathrm{GL}(q,\mathbf{C})) = \{y \in G \mid (yJ_{p,q})^2 = I_n,\ \operatorname{tr}(yJ_{p,q}) = q-p\}$,
  $gK \mapsto gJ_{p,q} g^{-1} J_{p,q}, \quad \sigma(g) = J_{p,q} \bar{g}^{-t} J_{p,q}$
- $\operatorname{rk} G = n-1 =: l, \quad \operatorname{rk} G/K = p, \quad 2p \le l+1, \quad \varpi_1 + \varpi_l, \varpi_2 + \varpi_{l-1}, \ldots, \varpi_p + \varpi_{l+1-p}$

Typ CI (H) – schiefsymmetrische Bilinearform:

- $G = \mathrm{Sp}(2n,\mathbf{C}), \quad \theta(g) = -J_n g J_n, \quad K = G^\theta = \mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$
- $P_\pm = \frac{1}{2}(I_n \mp iJ_n)$ ist die Projektion auf den $\pm i$-Eigenraum $V_\pm$ von J_n, $\mathbf{C}^{2n} = V_+ \oplus V_-$,
  $\dim V_\pm = n$, die Form $\Omega(u,v) = u^t J_n v$ verschwindet identisch auf $V_\pm$
- $g \star y = gyJ_n g^{-1} J_n, \quad Q = P$ zusammenhängend
- Zu jedem $y \in P$ hat yJ_n die Eigenschaft $(yJ_n)^2 = -I_{2n}$, definiert also eine Zerlegung
  $\mathbf{C}^{2n} = V_+(y) \oplus V_-(y)$, wobei $V_\pm(y)$ bzgl. Ω maximal isotrop sind
- $\mathrm{Sp}(2n,\mathbf{C})/\mathrm{GL}(n,\mathbf{C}) = \{y \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbf{C}) \mid (yJ_n)^2 = -I_{2n}\}$,
  $gK \mapsto gJ_n g^{-1} J_n^t, \quad \sigma(g) = -J_n \bar{g}^{-t} J_n$
- $\operatorname{rk} G = n, \quad \operatorname{rk} G/K = n, \quad 2\varpi_1, 2\varpi_2, \ldots, 2\varpi_n$

Typ DIII (H) – symmetrische Bilinearform:

- $G \;=\; \mathrm{SO}(2n,\mathbf{C}), \quad \theta(g) \;=\; -\Gamma_{2n} g \Gamma_{2n}, \quad K \;=\; G^\theta \;=\; \mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$
- Zerlege $\mathbf{C}^{2n}$ in seinen $\pm i$-Eigenraum $V_\pm$ von Γ_{2n}, $\mathbf{C}^{2n} = V_+ \oplus V_-$,
  $\dim V_\pm = n$, die Form $B(u,v) = u^t \Gamma_{2n} v$ verschwindet identisch auf $V_\pm$
- $g \star y \;=\; g y \Gamma_{2n} g^{-1} \Gamma_{2n}, \quad Q = P$ zusammenhängend
- Zu jedem $y \in P$ hat $y\Gamma_{2n}$ die Eigenschaft $(y\Gamma_{2n})^2 = -I_{2n}$, definiert also eine Zerlegung
  $\mathbf{C}^{2n} = V_+(y) \oplus V_-(y)$, wobei $V_\pm(y)$ bzgl. B maximal isotrop sind
- $\mathrm{SO}(2n,\mathbf{C})/\mathrm{GL}(n,\mathbf{C}) \;=\; \{y \in \mathrm{SO}(2n,\mathbf{C}) \mid (y\Gamma_{2n})^2 = -I_{2n}\}$,
  $gK \mapsto g\Gamma_{2n} g^{-1} \Gamma_{2n}, \quad \sigma(g) = -\Gamma_{2n} \bar{g}^{-t} \Gamma_{2n}$
- $\mathrm{rk}\, G = n, \quad \mathrm{rk}\, G/K = [n/2]$, Fallunterscheidung je nach Parität von n:
  n gerade: $\varpi_2, \varpi_4, \ldots, \varpi_{n-2}, 2\varpi_n$; n ungerade: $\varpi_2, \varpi_4, \ldots, \varpi_{n-3}, \varpi_{n-1} + \varpi_n$

Involutionen, die zu orthogonalen Zerlegungen gehören

Typ BDI (H für $p = 2$) – symmetrische Bilinearform:

- $G \;=\; \mathrm{SO}(p{+}q,\mathbf{C}),\ p \le q,\ p{+}q = n, \quad \theta(g) \;=\; J_{p,q} g J_{p,q}, \quad K \;=\; G^\theta \;=\; \mathrm{S}\,(\mathrm{O}(p,\mathbf{C}) \times \mathrm{O}(q,\mathbf{C}))$
  K ist nicht zusammenhängend
- $P_\pm = \frac{1}{2}(I_n \pm J_{p,q})$ ist die Projektion auf den ± 1-Eigenraum $V_\pm$ von $J_{p,q}$, $\mathbf{C}^n = V_+ \oplus V_-$,
  $\dim V_+ = p,\ \dim V_- = q, \quad V_+ \perp V_-$ bzgl. $B(u,v) = u^t s_n v$
- $g \star y \;=\; g y J_{p,q} g^{-1} J_{p,q}, \quad Q = \{y \in G \mid (yJ_{p,q})^2 = I_n\}$ nicht zusammenhängend,
- Zu jedem $y \in Q$ gehört das idempotente Element $yJ_{p,q}$, definiert also eine Zerlegung
  $\mathbf{C}^n = V_+(y) \oplus V_-(y), \quad \dim V_+(y) = \frac{1}{2}(n - \mathrm{tr}\, yJ_{p,q}) = 0, \ldots, n, \quad V_+(y) \perp V_-(y)$ bzgl. B
- $\mathrm{SO}(p+q,\mathbf{C})/\mathrm{S}\,(\mathrm{O}(p,\mathbf{C}) \times \mathrm{O}(q,\mathbf{C})) \;=\; \{y \in G \mid (yJ_{p,q})^2 = I_n,\ \mathrm{tr}\,(yJ_{p,q}) = q - p\}$,
  $gK \mapsto gJ_{p,q} g^{-1} J_{p,q}, \quad \sigma(g) = J_{p,q} \bar{g}^{-t} J_{p,q}$
- $\mathrm{rk}\, G = [n/2] =: l, \quad \mathrm{rk}\, G/K = p$, Fallunterscheidung je nach Parität von n:

$$n \text{ gerade (D I)}: \begin{cases} 2\varpi_1, 2\varpi_2, \ldots, 2\varpi_p & p < l-1 \\ 2\varpi_1, 2\varpi_2, \ldots, 2\varpi_{l-2}, 2\varpi_{l-1} + 2\varpi_l & p = l-1 \\ 2\varpi_1, 2\varpi_2, \ldots, 2\varpi_{l-2}, 2\varpi_{l-1}, 2\varpi_l & p = l \end{cases}$$

$$n \text{ ungerade (B I)}: \begin{cases} 2\varpi_1, 2\varpi_2, \ldots, 2\varpi_p & p < l \\ 2\varpi_1, 2\varpi_2, \ldots, 2\varpi_{l-1}, 4\varpi_l & p = l \end{cases}$$

Typ CII – schiefsymmetrische Bilinearform:

- $G \;=\; \mathrm{Sp}(2(p{+}q),\mathbf{C}),\ p \le q,\ p{+}q = n, \quad \theta(g) \;=\; K_{p,q} g K_{p,q}, \quad K \;=\; \mathrm{Sp}(2p,\mathbf{C}) {\times} \mathrm{Sp}(2q,\mathbf{C})$
- Zerlege $\mathbf{C}^{2n}$ in seinen ± 1-Eigenraum $V_\pm$ von $K_{p,q}$, $\mathbf{C}^{2n} = V_+ \oplus V_-$,
  $\dim V_+ = 2p,\ \dim V_- = 2q, \quad V_+ \perp V_-$ bzgl. $\Omega(u,v) = u^t J_n v$
- $g \star y \;=\; g y K_{p,q} g^{-1} K_{p,q}, \quad Q = \{y \in G \mid (yK_{p,q})^2 = I_{2n}\}$ nicht zusammenhängend,

- Zu jedem $y \in Q$ gehört das idempotente Element $yK_{p,q}$, definiert also eine Zerlegung $\mathbf{C}^{2n} = V_+(y) \oplus V_-(y), \quad V_+(y) \perp V_-(y)$ bzgl. Ω
- $\mathrm{Sp}(2(p+q), \mathbf{C})/\mathrm{Sp}(2p, \mathbf{C}) \times \mathrm{Sp}(2q, \mathbf{C}) = \{y \in G \mid (yK_{p,q})^2 = I_{2n},\ \mathrm{tr}\,(yK_{p,q}) = 2(q-p)\}$, $gK \mapsto gJ_ng^{-1}J_n, \quad \sigma(g) = K_{p,q}\bar{g}^{-t}K_{p,q}$
- $\mathrm{rk}\, G = n, \quad \mathrm{rk}\, G/K = p, \quad 2p \leq n, \quad \varpi_2, \varpi_4, \ldots, \varpi_{2p}$

B Berechnung invarianter Differentialoperatoren mit Maple

Da einige der in dieser Arbeit studierten Beispiele sich ganz wesentlich auf Computer-Rechnungen stützen, schien es mir angebracht, in einem kurzen Anhang exemplarisch zu illustrieren, wie diese Rechnungen prinzipiell programmiert werden können. Zu diesem Zwecke wird hier die Behandlung der adjungierten Wirkung von $\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$ auf ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(3,\mathbf{C})$ mit **Maple V Rel. 4** im Detail besprochen.

Zum Anfangen benötigen wir das „lineare Algebra“-Paket:

```
> with(linalg):
```

Definition des generischen Elements $X \in \mathfrak{sl}(3,\mathbf{C})$:

```
> X:=matrix(3,3,[x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,-x1-x5 ]);
```

$$X := \begin{bmatrix} x1 & x2 & x3 \\ x4 & x5 & x6 \\ x7 & x8 & -x1-x5 \end{bmatrix}$$

Definition der quadratischen Invariante m_1:

```
> m_1:=x1^2+x5^2+x1*x5+x2*x4+x3*x7+x6*x8;
```

$$m\_1 := x1^2 + x5^2 + x1\,x5 + x2\,x4 + x3\,x7 + x6\,x8$$

Definition der kubischen Invariante m_2:

```
> m_2:= x1^2*x5+x1*x5^2+x1*x6*x8+x3*x5*x7-x2*x6*x7-x2*x4*x5-x3*x4*x8-x1*x2*x4;
```

$$m\_2 := x1^2\,x5 + x1\,x5^2 + x1\,x6\,x8 + x3\,x5\,x7 - x2\,x6\,x7 - x2\,x4\,x5 - x3\,x4\,x8 - x1\,x2\,x4$$

Nun werden die Ableitungsregeln definiert. Dies ist nötig, weil Maple zwar den Befehl `diff(x1, x2)` richtig als 0 interpretiert, die Operatorschreibweise `D[x1](x2)` aber nicht versteht. Da jedoch nur die Operatorschreibweise die Lesbarkeit der Ergebnisse gewährleistet, behelfen wir uns mit diesem Trick und nutzen die Gelegenheit, um Maple gleich die Abkürzung $\partial_i := \partial/\partial_{x_i}$ beizubringen.

```
> D[1](x1):=1: D[2](x1):=0: D[3](x1):=0: D[4](x1):=0: D[5](x1):=0: D[6](x1):=0:
D[7](x1):=0: D[8](x1):=0:
> D[1](x2):=0: D[2](x2):=1: D[3](x2):=0: D[4](x2):=0: D[5](x2):=0: D[6](x2):=0:
D[7](x2):=0: D[8](x2):=0: D[1](x3):=0: D[2](x3):=0: D[3](x3):=1: D[4](x3):=0:
D[5](x3):=0: D[6](x3):=0: D[7](x3):=0: D[8](x3):=0: D[1](x4):=0: D[2](x4):=0:
D[3](x4):=0: D[4](x4):=1: D[5](x4):=0: D[6](x4):=0: D[7](x4):=0: D[8](x4):=0:
D[1](x5):=0: D[2](x5):=0: D[3](x5):=0: D[4](x5):=0: D[5](x5):=1: D[6](x5):=0:
D[7](x5):=0: D[8](x5):=0: D[1](x6):=0: D[2](x6):=0: D[3](x6):=0: D[4](x6):=0:
D[5](x6):=0: D[6](x6):=1: D[7](x6):=0: D[8](x6):=0: D[1](x7):=0: D[2](x7):=0:
D[3](x7):=0: D[4](x7):=0: D[5](x7):=0: D[6](x7):=0: D[7](x7):=1: D[8](x7):=0:
D[1](x8):=0: D[2](x8):=0: D[3](x8):=0: D[4](x8):=0: D[5](x8):=0: D[6](x8):=0:
D[7](x8):=0: D[8](x8):=1:
```

Die Bestimmung des zu m_1 assoziierten Operators ist leicht, da er sich sofort aus der Inversen der Hessischen von m_1 ablesen läßt. Wir berechnen diese:

```
> hess_1:=hessian(m_1, [x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8]):invh_1:=inverse(hess_1);
```

$$invh\_1 := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Damit können wir den Ausdruck D_1 sofort hinschreiben. Bei diesem ist zu beachten, das die vorkommende Funktion `j` die Rolle eines „Platzhalters“ spielt, in den wir später nach Belieben andere Funktionen einsetzen werden. Als Variablenname ist `j` folglich verboten.

```
> D_1 := 2/3*D[1,1](j) + 2/3*D[5,5](j) - 2/3*D[1,5](j) + 2*D[2,4](j) + 2*D[3,7](j)
+ 2*D[6,8](j);
```

$$D\_1 := \frac{2}{3}\, D_{1,1}(j) + \frac{2}{3}\, D_{5,5}(j) - \frac{2}{3}\, D_{1,5}(j) + 2\, D_{2,4}(j) + 2\, D_{3,7}(j) + 2\, D_{6,8}(j)$$

Nun wird zum ersten Mal ein Kommutator berechnet, der gleich die Verwendung von `j` illustriert. Zur Probe berechnen wir $[D_1, m_1]$:

```
> kommuD1m1 := simplify(eval(subs(j = m_1*j, D_1)) - expand(m_1*D_1));
```

$$kommuD1m1 := 2\, x3\, D_3(j) + 8\, j + 2\, x1\, D_1(j) + 2\, x5\, D_5(j) + 2\, x7\, D_7(j) + 2\, D_8(j)\, x8 \\ + 2\, x6\, D_6(j) + 2\, x4\, D_4(j) + 2\, x2\, D_2(j)$$

Wie nicht anders zu erwarten taucht hierdrin das Eulervektorfeld $E := \sum x_i \partial_i$ auf. Deswegen geben wir ihm einen eigenen Namen:

```
> EVF := x1*D[1](j) + x2*D[2](j) + x3*D[3](j) + x4*D[4](j) + x5*D[5](j) + x6*D[6](j)
+ x7*D[7](j) + x8*D[8](j);
```

$$EVF := \\ x1\, D_1(j) + x2\, D_2(j) + x3\, D_3(j) + x4\, D_4(j) + x5\, D_5(j) + x6\, D_6(j) + x7\, D_7(j) + D_8(j)\, x8$$

Der Vollständigkeit halber überprüfen wir noch die beiden fehlenden Kommutatoren $[D_1, E]$ und $[m1, E]$, die insgesamt m_1, D_1 und E zu einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ isomorphen Unteralgebra machen:

```
> kommuD1EVF:=simplify(eval(subs(j=EVF,D_1))- eval(subs(j=D_1,EVF)));
```

$$kommuD1EVF := -\frac{4}{3}\, D_{1,5}(j) + \frac{4}{3}\, D_{1,1}(j) + 4\, D_{2,4}(j) + 4\, D_{3,7}(j) + 4\, D_{6,8}(j) + \frac{4}{3}\, D_{5,5}(j)$$

```
> kommum1EVF:=simplify(eval(expand(m_1*EVF))- eval(subs(j=m_1*j,EVF)));
```

$$kommum1EVF := -2\, x7\, x3\, j - 2\, x6\, x8\, j - 2\, x2\, x4\, j - 2\, x5\, j\, x1 - 2\, j\, x1^2 - 2\, j\, x5^2$$

Was noch fehlt, ist ein Weg, um von einem vorgelegten Operator entscheiden zu können, ob er $\mathrm{Ad}\,\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$-invariant ist. Die Relation $(g\cdot D)(f) = g\cdot(D(f))$ läßt sich auch am Computer kaum auswerten. Sinnvoller ist deswegen folgendes: ein Operator ist genau dann invariant, wenn er mit allen fundamentalen Vektorfeldern kommutiert. Die Berechnung derselbigen ist natürlich eine Standardaufgabe; wir skizzieren deswegen nur die Berechnung von X_1, dem Vektorfeld zu $x_1 = 1$ (alle anderen Variablen seien Null gesetzt).

```
> H1:=matrix(3,3,[1,0,0,0,0,0,0,0,-1]):H1:=exponential(X1,t):E1inv:=inverse(E1):

> F1:=multiply(E1,X,E1inv);
```

$$F1 := \begin{bmatrix} x1 & e^t\,x2 & \dfrac{e^t\,x3}{e^{(-t)}} \\ \dfrac{x4}{e^t} & x5 & \dfrac{x6}{e^{(-t)}} \\ \dfrac{e^{(-t)}\,x7}{e^t} & e^{(-t)}\,x8 & -x1 - x5 \end{bmatrix}$$

```
> subs(t=0,map(diff,F1,t));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & e^0\,x2 & 2\,x3 \\ -\dfrac{x4}{e^0} & 0 & \dfrac{x6}{e^0} \\ -2\,x7 & -e^0\,x8 & 0 \end{bmatrix}$$

Nun kann man X_1 ablesen:

```
> X1 := x2*D[2](j)+2*x3*D[3](j)-x4*D[4](j)+x6*D[6](j)-2*x7*D[7](j)-x8*D[8](j);
```

$$X1 := x2\,D_2(j) + 2\,x3\,D_3(j) - x4\,D_4(j) + x6\,D_6(j) - 2\,x7\,D_7(j) - D_8(j)\,x8$$

Zur Kontrolle zeigen wir, daß $[D_1, X_1] = 0$ gilt:

```
> simplify(eval(subs(j=X1,D_1))- eval(subs(j=D_1,X1)));
```

$$0$$

Bei der Berechnung der übrigen fundamentalen Vektorfelder verfährt man analog. Wir geben deswegen nur das Ergebnis an:

```
> X2:=x4*D[1](j)+(x5-x1)*D[2](j)+x6*D[3](j)-x4* D[5](j)-x7*D[8](j);
```

$$X2 := x4\,D_1(j) + (x5 - x1)\,D_2(j) + x6\,D_3(j) - x4\,D_5(j) - x7\,D_8(j)$$

```
> X3:=x7*D[1](j)+x8*D[2](j)-(2*x1+x5)*D[3](j)-x 4*D[6](j);
```

$$X3 := x7\,D_1(j) + x8\,D_2(j) - (2\,x1 + x5)\,D_3(j) - x4\,D_6(j)$$

```
> X4:=-x2*D[1](j)+(x1-x5)*D[4](j)+x2*D[5](j)+x3 *D[6](j)-x8*D[7](j);
```

$$X4 := -x2\,D_1(j) + (x1 - x5)\,D_4(j) + x2\,D_5(j) + x3\,D_6(j) - x8\,D_7(j)$$

```
> X5:=-x2*D[2](j)+x3*D[3](j)+x4*D[4](j)+2*x6*D[ 6](j)-x7*D[7](j)-2*x8*D[8](j);
```

$$X5 := -x2\,D_2(j) + x3\,D_3(j) + x4\,D_4(j) + 2\,x6\,D_6(j) - x7\,D_7(j) - 2\,D_8(j)\,x8$$

```
> X6:=-x2*D[3](j)+x7*D[4](j)+x8*D[5](j)-(x1+2*x5)*D[6](j);
```

$$X6 := -x2\,D_3(j) + x7\,D_4(j) + x8\,D_5(j) - (x1 + 2\,x5)\,D_6(j)$$

```
> X7:=-x3*D[1](j)-x6*D[4](j)+(2*x1+x5)*D[7](j)+ x2*D[8](j);
```

$$X7 := -x3\,D_1(j) - x6\,D_4(j) + (2\,x1 + x5)\,D_7(j) + x2\,D_8(j)$$

```
> X8:=-x3*D[2](j)-x6*D[5](j)+x4*D[7](j)+(x1+2*x 5)*D[8](j);
```

$$X8 := -x3\,D_2(j) - x6\,D_5(j) + x4\,D_7(j) + (x1 + 2\,x5)\,D_8(j)$$

Hier wird nun ein großer Sprung gemacht. Angenommen, wir wüßten nicht, wie man aus dem invarianten Skalarprodukt den kanonischen Isomorphismus zwischen $\mathcal{D}_c(V)$ und $\mathbf{C}[V]$ gewinnt, bzw. wir sind in einer Situation, in der man kein invariantes Skalarprodukt hat. Um D_2 zu bestimmen, wäre dann wie folgt vorzugehen: man mache für D_2 einen Ansatz als Linearkombination von Ableitungen dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (man vergesse nicht, für diese vorher geeignete Ableitungsregeln zu definieren), berechne alle Kommutatoren $[D_2, X_i]$ und löse das so entstehende Gleichungssystem für die Koeffizienten. In diesem konkreten Fall hat der allgemeinste Ansatz $-\binom{-8}{3} = 120$ Terme, was selbst mit Computer zuviel ist; deswegen ist man gezwungen, die auftretenden Summanden zu raten. War der Ansatz nicht konsistent, so erhält man als einzige Lösung die triviale Lösung. Ein guter Anfang ist es, für D_2 auf jeden Fall alle Ableitungen anzusetzen, die in m_2 auftauchen; es stellt sich aber heraus, daß diese alleine nicht ausreichen. Das Endergebnis einigen trickreichen Ratens und Probierens lautet:

```
> D_2 := - 3*D[1,1,5](j) - 3*D[1,5,5](j) - 18*D[1,6,8](j) - 18*D[3,5,7](j) +
27*D[2,6,7](j) + 9*D[2,4,5](j) + 27*D[3,4,8](j) + 9*D[1,2,4](j) + 2*D[5,5,5](j)
+ 2*D[1,1,1](j) + 9*D[1,3,7](j) + 9*D[5,6,8](j);
```

$$\begin{aligned} D\_2 := &-3\,D_{1,1,5}(j) - 3\,D_{1,5,5}(j) - 18\,D_{1,6,8}(j) - 18\,D_{3,5,7}(j) + 27\,D_{2,6,7}(j) + 9\,D_{2,4,5}(j) \\ &+ 27\,D_{3,4,8}(j) + 9\,D_{1,2,4}(j) + 2\,D_{5,5,5}(j) + 2\,D_{1,1,1}(j) + 9\,D_{1,3,7}(j) + 9\,D_{5,6,8}(j) \end{aligned}$$

Die letzten 4 Summanden entsprechen nicht Monomen von m_2. Die Überprüfung der $\mathrm{Ad}\,\mathrm{SL}(3,\mathbf{C})$-Invarianz ist nun Routine, z.B. erhält man

```
> simplify(eval(subs(j=X1,D_2))- eval(subs(j=D_2,X1)));
```

$$0$$

```
> simplify(eval(subs(j=X2,D_2))- eval(subs(j=D_2,X2)));
```

$$0$$

```
> simplify(eval(subs(j=X3,D_2))- eval(subs(j=D_2,X3)));
```

$$0$$

Wir widmen uns nun der Wirkung von D_2 auf den Potenzen von m_2. Natürlich ist $D_2(m_2^k)$ ein invariantes homogenes Polynom vom Grad $3(k-1)$, für $k=1$ also eine Konstante und für $k=2$ notwendigerweise ein Vielfaches von m_2:

```
> f_1:=factor(eval(subs(j=m_2,D_2)));
```

$$f\_1 := -120$$

```
> f_2:=factor(eval(subs(j=m_2^2,D_2)));
```

$$\begin{aligned} f\_2 := &-510\,x1\,x6\,x8 - 510\,x3\,x5\,x7 + 510\,x2\,x6\,x7 + 510\,x2\,x4\,x5 + 510\,x3\,x4\,x8 \\ &+ 510\,x1\,x2\,x4 - 510\,x1\,x5^2 - 510\,x1^2\,x5 \end{aligned}$$

Für $k=3$ merkt man jedoch, daß D_2 kein reiner Absteiger auf den Vielfachen von m_2 ist, denn $D_2(m_2^3) = -1332m_2^2 + 12m_1^3$:

```
> f_3:=factor(eval(subs(j=m_2^3,D_2))):
```

```
> simplify(-1332*(m_2)^2+12*(m_1)^3)-f_3;
```

$$0$$

Zu m_2 und D_2 gehört ein „verallgemeinerter“ Euleroperator, nämlich deren Kommutator. Wir berechnen diesen explizit, auch wenn der Ausdruck wenig ansprechend ist:

```
> kommuD_2m_2:=simplify(eval(subs(j=m_2*j,D_2)) - expand(m_2*D_2));
```

$$
\begin{aligned}
\mathit{kommuD\_2m\_2} := & -45\, x1\, D_1(j) - 45\, x5\, D_5(j) - 45\, x7\, D_7(j) - 45\, x3\, D_3(j) + 6\, D_{1,1}(j)\, x5^2 \\
& - 18\, D_{3,7}(j)\, x1^2 - 3\, D_{5,5}(j)\, x5^2 + 9\, D_{3,7}(j)\, x5^2 + 9\, D_{2,4}(j)\, x1^2 - 3\, D_{1,1}(j)\, x1^2 \\
& + 9\, D_{6,8}(j)\, x1^2 - 18\, D_{6,8}(j)\, x5^2 + 9\, D_{2,4}(j)\, x5^2 - 45\, x2\, D_2(j) - 45\, x6\, D_6(j) + 6\, D_{5,5}(j)\, x1^2 \\
& - 6\, D_{1,5}(j)\, x5^2 - 6\, D_{1,5}(j)\, x1^2 - 45\, x4\, D_4(j) - 9\, D_{1,4}(j)\, x4\, x5 - 9\, D_{1,4}(j)\, x1\, x4 - 120\, j \\
& - 27\, D_{3,8}(j)\, x2\, x5 - 27\, D_{3,8}(j)\, x3\, x8 - 27\, D_{3,8}(j)\, x1\, x2 + 27\, D_{3,4}(j)\, x1\, x6 \\
& - 27\, D_{3,4}(j)\, x3\, x4 - 9\, D_{1,2}(j)\, x3\, x8 - 9\, D_{1,2}(j)\, x1\, x2 - 24\, D_{1,5}(j)\, x1\, x5 - 6\, D_{1,5}(j)\, x3\, x7 \\
& + 12\, D_{1,5}(j)\, x2\, x4 - 18\, D_{3,7}(j)\, x1\, x5 + 9\, D_{3,7}(j)\, x6\, x8 + 9\, D_{3,7}(j)\, x2\, x4 + 6\, D_{5,5}(j)\, x1\, x5 \\
& - 3\, D_{5,5}(j)\, x6\, x8 - 3\, D_{5,5}(j)\, x2\, x4 + 27\, D_{2,7}(j)\, x1\, x8 - 27\, D_{2,7}(j)\, x2\, x7 + 9\, D_{1,3}(j)\, x5\, x3 \\
& - 9\, D_{1,3}(j)\, x2\, x6 + 9\, D_{1,7}(j)\, x5\, x7 - 9\, D_{1,7}(j)\, x4\, x8 - 9\, D_{1,4}(j)\, x6\, x7 + 9\, D_{6,8}(j)\, x3\, x7 \\
& + 9\, D_{6,8}(j)\, x2\, x4 - 6\, D_{1,5}(j)\, x6\, x8 - 18\, D_{1,8}(j)\, x1\, x8 + 18\, D_{1,8}(j)\, x2\, x7 + 27\, D_{2,6}(j)\, x5\, x3 \\
& - 27\, D_{2,6}(j)\, x2\, x6 + 9\, D_{5,8}(j)\, x1\, x8 - 9\, D_{5,8}(j)\, x2\, x7 + 6\, D_{5,5}(j)\, x3\, x7 - 9\, D_{1,2}(j)\, x2\, x5 \\
& - 18\, D_{5,7}(j)\, x5\, x7 + 18\, D_{5,7}(j)\, x4\, x8 + 36\, D_{2,4}(j)\, x1\, x5 + 9\, D_{2,4}(j)\, x6\, x8 \\
& - 18\, D_{2,4}(j)\, x2\, x4 - 3\, D_{1,1}(j)\, x3\, x7 - 18\, D_{6,8}(j)\, x6\, x8 + 9\, D_{2,4}(j)\, x3\, x7 - 9\, D_{4,5}(j)\, x6\, x7 \\
& - 9\, D_{4,5}(j)\, x4\, x5 - 9\, D_{4,5}(j)\, x1\, x4 + 27\, D_{4,8}(j)\, x5\, x7 - 27\, D_{4,8}(j)\, x4\, x8 - 18\, D_{3,7}(j)\, x3\, x7 \\
& - 27\, D_{6,7}(j)\, x6\, x7 - 27\, D_{6,7}(j)\, x4\, x5 - 27\, D_{6,7}(j)\, x1\, x4 - 18\, D_{1,6}(j)\, x1\, x6 \\
& + 18\, D_{1,6}(j)\, x3\, x4 - 9\, D_{2,5}(j)\, x2\, x5 - 9\, D_{2,5}(j)\, x3\, x8 - 18\, D_{6,8}(j)\, x1\, x5 - 9\, D_{2,5}(j)\, x1\, x2 \\
& + 9\, D_{5,6}(j)\, x1\, x6 - 9\, D_{5,6}(j)\, x3\, x4 + 6\, D_{1,1}(j)\, x1\, x5 + 6\, D_{1,1}(j)\, x6\, x8 - 3\, D_{1,1}(j)\, x2\, x4 \\
& - 18\, D_{3,5}(j)\, x5\, x3 + 18\, D_{3,5}(j)\, x2\, x6 - 45\, D_8(j)\, x8
\end{aligned}
$$

Die Struktur dieses Operators wird transparenter, wenn man ihn geeignet faktorisiert:

```
> simpD_2m_2:= -120*j - 45*EVF + 3*(2*x1*x5 - x3*x7 - x2*x4 + 2*x6*x8 - x1^2
+ 2*x5^2)*(D[1,1](j) - 3*D[6,8](j)+ 3*D[2,4](j) -2*D[1,5](j)) + 3*(2*x1*x5 +
2*x3*x7 - x2*x4 - x6*x8 + 2*x1^2 - x5^2)*(D[5,5](j) - 3*D[3,7](j)+ 3*D[2,4](j)
-2*D[1,5](j)) - 9*(x1*x2 + x3*x8 + x2*x5)*(D[1,2](j) + D[2,5](j) + 3*D[3,8](j))
- 9*(x1*x4 + x4*x5 + x6*x7) * (D[1,4](j) + D[4,5](j) + 3*D[6,7](j)) + 9*(x3*x5
- x2*x6)*(D[1,3](j) + 3*D[2,6](j) - 2*D[3,5](j)) + 9*(x1*x6 - x3*x4) * (D[5,6](j)
+ 3*D[3,4](j) - 2*D[1,6](j)) + 9*(x5*x7 - x4*x8) * (D[1,7](j) + 3*D[4,8](j) -
2*D[5,7](j)) + 9*(x1*x8 - x2*x7) * (D[5,8](j) + 3*D[2,7](j) - 2*D[1,8](j));
```

$$
\begin{aligned}
\mathit{simpD\_2m\_2} := & -120\, j - 45\, x1\, D_1(j) - 45\, x2\, D_2(j) - 45\, x3\, D_3(j) - 45\, x4\, D_4(j) \\
& - 45\, x5\, D_5(j) - 45\, x6\, D_6(j) - 45\, x7\, D_7(j) - 45\, D_8(j)\, x8 \\
& + 3\,(2\, x1\, x5 - x3\, x7 - x2\, x4 + 2\, x6\, x8 - x1^2 + 2\, x5^2)\,(D_{1,1}(j) - 3\, D_{6,8}(j) + 3\, D_{2,4}(j) - 2\, D_{1,5}(j)) \\
& + 3\,(2\, x1\, x5 + 2\, x3\, x7 - x2\, x4 + 2\, x1^2 - x5^2 - x6\, x8)\,(D_{5,5}(j) - 3\, D_{3,7}(j) + 3\, D_{2,4}(j) - 2\, D_{1,5}(j)) \\
& - 9\,(x1\, x2 + x3\, x8 + x2\, x5)\,(D_{1,2}(j) + D_{2,5}(j) + 3\, D_{3,8}(j)) \\
& - 9\,(x1\, x4 + x4\, x5 + x6\, x7)\,(D_{1,4}(j) + D_{4,5}(j) + 3\, D_{6,7}(j)) \\
& + 9\,(x5\, x3 - x2\, x6)\,(D_{1,3}(j) + 3\, D_{2,6}(j) - 2\, D_{3,5}(j)) \\
& + 9\,(x1\, x6 - x3\, x4)\,(-2\, D_{1,6}(j) + D_{5,6}(j) + 3\, D_{3,4}(j)) \\
& + 9\,(x5\, x7 - x4\, x8)\,(D_{1,7}(j) + 3\, D_{4,8}(j) - 2\, D_{5,7}(j)) \\
& + 9\,(x1\, x8 - x2\, x7)\,(3\, D_{2,7}(j) + D_{5,8}(j) - 2\, D_{1,8}(j))
\end{aligned}
$$

```
> simplify(kommuD_2m_2-simpD_2m_2);
```

$$0$$

Die hierbei auftretenden Vorfaktoren sind weniger willkürlich, als es zunächst den Anschein hat. Zunächst sind sie alle harmonisch (d.h. im Kern von D_1 und D_2 enthalten), was nicht verwundert, haben doch alle Polynome vom Grad 2, die im Komplement von $\mathbf{C} \cdot m_1$ liegen, diese Eigenschaft. Bemerkenswerter ist, daß sie die Gewichtsvektoren der $\mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$-Darstellung mit höchstem Gewicht $(1, 1)$ (bzgl. der Fundamentaldarstellungen) und Dimension 8 sind. Wir parametrisieren den maximalen Torus

```
> T:=matrix(3,3,[a,0,0,0,b,0,0,0,a^(-1)*b^(-1)]); T1:=inverse(T):
```

$$T := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a\,b} \end{bmatrix}$$

und folgern daraus die Gewichte der Monome vom Grad 1:

```
> TXT1:=multiply(T,X,T1);
```

$$TXT1 := \begin{bmatrix} x1 & \frac{a\,x2}{b} & a^2\,x3\,b \\ \frac{b\,x4}{a} & x5 & b^2\,x6\,a \\ \frac{x7}{a^2\,b} & \frac{x8}{a\,b^2} & -x1 - x5 \end{bmatrix}$$

Wir parametrisieren die unipotenten unteren Dreiecksmatrizen

```
> N:=matrix(3,3,[1,0,0,c,1,0,d,e,1]);N1:=inverse(N):
```

$$N := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ d & e & 1 \end{bmatrix}$$

sowie ihre Wirkung auf X:

```
> NXN1:=map(simplify, multiply(N,X,N1)):
```

Das Polynom $x_3x_5 - x_2x_6$ ist N-invariant:

```
> x3*x5 - x2*x6;
```

$$x5\;x3 - x2\;x6$$

```
> simplify(NXN1[1,3]*NXN1[2,2]-NXN1[1,2]*NXN1[2 ,3]);
```

$$x5\;x3 - x2\;x6$$

ebenso wie der zugehörige Differentialoperator:

```
> D_3:=( D[1,3](j)+3*D[2,6](j) - 2*D[3,5](j));
```

$$D\_3 := D_{1,3}(j) + 3\,D_{2,6}(j) - 2\,D_{3,5}(j)$$

```
> simplify(eval(subs(j=X2,D_3))- eval(subs(j=D_3,X2)));
```

$$0$$

```
> simplify(eval(subs(j=X3,D_3))- eval(subs(j=D_3,X3)));
```

$$0$$

```
> simplify(eval(subs(j=X6,D_3))- eval(subs(j=D_3,X6)));
```

$$0$$

Völlig analog überzeugt man sich, daß $x_5x_7 - x_4x_8$ sowie der zugehörige Differentialoperator invariant bzgl. der Wirkung der oberen unipotenten Dreiecksmatrizen sind. Insgesamt sieht man schön, wie der Anteil zweiter Ordnung in *kommuD_2m_2* das Tensorprodukt zweier zur adjungierten Darstellung isomorphen Unterräume von $\mathbf{C}[V]$ und $\mathcal{D}_c(V)$ ist.

Literatur

[AF99] I. Agricola and Th. Friedrich, *The Gaussian measure on algebraic varieties*, Fund. Math. **159** (1999), 91–98.

[Agr99] I. Agricola, *Invariante Differentialoperatoren und die Frobenius-Zerlegung einer G-Varietät*, J. of Lie Th. (1999), to appear, SFB 288 Nr. 391, Math.dg/9906091.

[BB82] W. Borho and J.-L. Brylinski, *Differential operators on homogeneous spaces. I: Irreducibility of the associated variety for annihilators of induced modules*, Invent. Math. **69** (1982), 437–476.

[Bie93] F. Bien, *Orbits, multiplicities and differential operators*, Representation theory of groups and algebras (J. Adams et.al., ed.), Contemp. Math., vol. 145, AMS, 1993, pp. 199–227.

[BJLR97] C. Benson, J. Jenkins, R. L. Lipsman, and G. Ratcliff, *A geometric criterion for Gelfand pairs associated with the Heisenberg group*, Pac. J. Math. **178** (1997), no. 1, 1–36.

[Bor91] A. Borel, *Linear algebraic groups*, second enlarged ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer, New York et al., 1991.

[BR96] C. Benson and G. Ratcliff, *A classification of multiplicity-free actions*, J. Algebra **181** (1996), 152–186.

[Brö95] L. Bröcker, *Semialgebraische Geometrie*, Jber. d. Dt. Math.-Verein. **97** (1995), 130–156.

[BtD85] Th. Bröcker and T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 98, Springer, New York et al., 1985.

[Car84] E. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs*, Œuvres complètes, vol. I, CNRS, 1984, originally published as Mémorial Sc. math. XLII, 1930, Gauthier-Villars, pp. 1165–1226.

[CG97] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Verlag, 1997.

[Che55] C. Chevalley, *Invariants of finite groups generated by reflections*, Am. J. Math. **77** (1955), 778–782.

[Dix96] J. Dixmier, *Enveloping algebras*, 1977 ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 11, AMS, 1996.

[GW97] R. Goodman and N. Wallach, *Representations and invariants of the classical groups*, Encyclopedia of Mathematics and its Appl., vol. 68, Cambridge Univ. Press, 1997.

[Hel63] S. Helgason, *Invariants and fundamental functions*, Acta Math. **109** (1963), 241–258.

[Hel78] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, London, 1978.

[HU91] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.

[Hum90] J. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[Hum95] J. Humphreys, *Conjugacy classes in semisimple algebraic groups*, Math. Surveys and Monographs, vol. 43, AMS, 1995.

[Kac80] V. Kac, *Some remarks on nilpotent orbits*, J. Algebra **64** (1980), 190–213.

[KN96] S. Kobayashi and K Nomizu, *Foundations of differential geometry II*, Wiley Classics Library, Wiley Inc., Princeton, 1969, 1996.

[Kno90] F. Knop, *Weylgruppe und Momentabbildung*, Invent. Math. **99** (1990), 1–23, URL: http://www.math.rutgers.edu/~knop.

[Kno94] F. Knop, *A Harish-Chandra homomorphism for reductive group actions*, Ann. of Math. **140** (1994), 253–288, URL: http://www.math.rutgers.edu/~knop.

[Kos63] B. Kostant, *Lie group representations on polynomial rings*, Am. J. Math. **85** (1963), 327–404.

[KR71] B. Kostant and S. Rallis, *Orbits and representations associated with symmetric spaces*, Am. J. Math. **93** (1971), 753–809.

[Krä79] M. Krämer, *Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen*, Compositio Math. **38** (1979), 129–153.

[Kra85] H. Kraft, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Vieweg, Braunschweig, 1985.

[Lea98] A. Leahy, *Multiplicity free representations*, J. of Lie Th. **8** (1998), no. 2, 367–391.

[LV83] D. Luna and Th. Vust, *Plongements d'espaces homogènes*, Comment. Math. Helvetici **58** (1983), 186–245.

[Mau80] K. Maurin, *Analysis*, vol. 2, D.Reidel Publ. Company and PWN - Polish Scient. Publ., Dordrecht / Warsaw, 1980.

[Mil64] J. Milnor, *On the Betti numbers of real varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 275–280.

[Mil94] J. Milnor, *Euler characteristics and finitely additive Steiner measures*, Collected Papers of J. Milnor **1** (1994), 213–234.

[MR87] J. McConnell and J. Robson, *Noncommutative Noetherian rings*, Pure and Applied Mathematics, Wiley Inc., New York, 1987.

[Ner99] Yu.A. Neretin, *Pseudoriemannian symmetric spaces: one-type realizations and open embeddings to grassmanians*, math.DG/9905014, 1999.

[OV90] A.L. Onishchik and E.B. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*, Series in Soviet Mathematics, Springer, New York et al., 1990.

[Pan90] D. Panyushev, *Complexity and rank of homogeneous spaces*, Geom. Dedicata **34** (1990), 248–269.

[Pie82] R.S. Pierce, *Associative algebras*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 88, Springer, New York et al., 1982.

[Pop76] V.L. Popov, *Representations with a free module of covariants*, Funct. Anal. and Appl. **10** (1976), 242–244, transl. from Funkts. Anal. Prilozh., vol.10, No.3, 91-92.

[PSV94] V.L. Popov, T.A. Springer, and E.B. Vinberg, *Algebraic geometry IV – linear algebraic groups, invariant theory*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 55, Springer, New York et al., 1994.

[Ric81] R. W. Richardson, *An application of the Serre conjecture to semisimple algebraic groups*, Algebra, Proc. Conf., Carbondale 1980, Lecture Notes in Mathematics, vol. 848, Springer, 1981, pp. 141–151.

[Ric82] R. W. Richardson, *Orbits, invariants and representations associated to involutions of reductive groups*, Invent. Math. **66** (1982), 287–312.

[RS87] H. Rubenthaler and G. Schiffmann, *Triplet de Weil associé à un polynôme homogène et à un espace préhomogène*, C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I **305** (1987), 407–410.

[Rud66] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1966.

[Sch78] G. W. Schwarz, *Representations of simple Lie groups with a free module of covariants*, Invent. Math. **50** (1978), 1–12.

[Sch95] G. W. Schwarz, *Lifting differential operators from orbit spaces*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **28** (1995), no. 3, 253–305.

[Sha77] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer, New York et al., 1977.

[SK77] M. Sato and T. Kimura, *A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants*, Nagoya Math. J. **65** (1977), 1–155.

[ST54] G.C. Shepard and J.A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math. **6** (1954), 274–304.

[Sto64a] W. Stoll, *The growth of the area of a transcendental analytic set 1*, Math. Ann. **156** (1964), 47–78.

[Sto64b] W. Stoll, *The growth of the area of a transcendental analytic set 2*, Math. Ann. **156** (1964), 144–170.

[VK78] E.B. Vinberg and B. N. Kimel'fel'd, *Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups*, Funct. Anal. and Appl. **12** (1978), 168–174, transl. from Funkts. Anal. Prilozh., vol.12, No.3, 12-19.

[VK93] N.J. Vilenkin and A.U. Klimyk, *Representations of Lie groups and special functions, vol. 2*, Math. and its Appl. (Soviet Ser.), vol. 74, Kluwer Acad. Publ., 1993.

[Vus74] Th. Vust, *Opération de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes*, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 317–334.

[Wal72] N. Wallach, *Minimal immersions of symmetric spaces into spheres*, Symmetric spaces - short courses presented at Washington University (W. Boothby and G. Weiss, eds.), Pure and Applied Mathematics, vol. 8, M. Dekker, 1972, pp. 1–39.

[Wal88] N. Wallach, *Real reductive groups I*, Pure and Applied Mathematics, vol. 132, Acad. Press, Boston, 1988.

[Wal93] N. R. Wallach, *Invariant differential operators on a reductive Lie algebra and Weyl group representations*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), no. 4, 779–816.

[Waw84] A. Wawrzyńczyk, *Group representations and special functions*, D.Reidel Publ. Company and PWN - Polish Scient. Publ., Dordrecht / Warsaw, 1984.

[Whi57] H. Whitney, *Elementary properties of real algebraic varieties*, Ann. of Math. **66** (1957), no. 3, 545–556.

[Žel73] D.P. Želobenko, *Compact Lie groups and their representations*, 2nd (1978) ed., Transl. of Math. Monographs, vol. 40, AMS, Providence, 1973.

Ilka Agricola

Lebenslauf

8. August 1973	geboren in Den Haag
	evangelisch-lutherisch, verheiratet mit Dr. G. Niklasch
1979–1991	Lycée Jean-Renoir München Abiturfächer: Mathematik, Physik/Chemie, Biologie
Juni 1991	Baccalauréat C à option internationale 'allemand' daselbst 2^e prix au Concours Général de philosophie allemande
Nov. 1991–Dez. 1996	Studium an der TU und LMU München
	Förderung nach dem Bayerischen Begabtenförderungsgesetz
Wintersem. 1991/92	Einschreibung an der TU München im Diplomstudiengang *allgemeine Physik*
Herbst 1993	Vordiplom; Wechsel an die LMU (Diplomstudiengang *Physik*)
Dezember 1996	Abschluß des Studiums an der LMU München als *Diplom-Physikerin* (Nebenfach Mathematik)
	Thema der Diplomarbeit:
	Die Korrelationen zwischen den unitären Symmetrien des Standardmodells der Elementarteilchen
	bei PD Dr. H. Saller am Max-Planck-Institut für Physik in München-Freimann (Werner-Heisenberg-Institut)
Jan. 1997–Mai 1997	Visiting Scholar an der Rutgers University als Gast von Prof. R. Goodman
1988–1993	Werkstudentin am Max-Planck-Institut für Extraterrestrische Physik, Abt. Gamma-Astronomie (München-Garching)
Nov. 1993–Feb. 1996	Wissenschaftl. Hilfskraft an der TU bzw. LMU München
Juni 1996–Okt. 1997	'Webmasterin' am Max-Planck-Institut für Physik Abt. Theoretische Elementarteilchenphysik
seit Nov. 1997	Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Reine Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin *Lehrstuhl für Globale Analysis Prof. Dr. sc. Th. Friedrich*

Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Dissertation selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Ich erkläre, daß ich die Arbeit erstmalig und nur an der Humboldt-Universität zu Berlin eingereicht habe und mich nicht anderenorts um einen Doktorgrad beworben habe. In dem angestrebten Promotionsfach besitze ich keinen Doktorgrad.

Der Inhalt der dem Verfahren zugrunde liegenden Promotionsordnung ist mir bekannt.

Berlin, den 8. Februar 2000