Die Eulersche Gerade und der Feuerbachkreis

Jürgen Flachsmeyer, Greifswald

Meinem Freund Rudolf Fritsch zum 60. Geburtstag gewidmet

Zusammenfassung

Der Feuerbachkreis ist für die Dreiecksgeometrie eine besonders reizvolle Problematik. Die Antrittsvorlesung von R. Fritsch [2] bringt hierzu eine anregend verfasste Darstellung, die uns zu einer mehr systematischen Analyse von Dreieckstypen und ihren kennzeichnenden Eigenschaften der Eulergeraden und des Feuerbachkreises veranlasste. Dabei erscheinen uns die Sachverhalte um den *goldenen Schnitt* besonders interessant zu sein.

1 Eine klassische Thematik

Informationen zur Historie der Problematik findet man bei P. BAPTIST [1]. Zur neueren Entwicklung vergleiche man auch den Beitrag von H. MARTINI [4].
Die Ende des 19. Jahrhunderts an den Gymnasien geübte Elementarmathematik hatte ein beachtliches Niveau. Sie war insbesondere viel stärker der Geometrie verpflichtet als unsere Zeit. Die EULERsche Gerade und der FEUERBACHkreis gehörten zum Repertoir. Man vergleiche beispielsweise GUSTAV HOLZMÜLLER: *Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Gymnasial- Ausgabe. Zweiter Teil. Leipzig 1896.* In den Übungen an den Dreieckskreisen heisst es dort: *Der Kreis durch die Höhenfusspunkte eines Dreiecks halbiert die Dreiecksseiten und die oberen Abschnitte der Höhen. Er wird der Kreis der neun Punkte oder nach seinem Entdecker der* FEUERBACH*sche Kreis genannt.*
Damit werden folgende Aufgaben verbunden: *Es soll gezeigt werden, dass der Schwerpunkt S eines Dreiecks die Strecke vom Mittelpunkt M des Umkreises bis zum Höhenschnittpunkt H im Verhältnis 1:2 teilt.*
Es soll gezeigt werden, das der Mittelpunkt F ders FEUERBACH*schen Kreises die Verbindungslinie MH halbiert.*
Demnach liegen H, F, S und M auf einer Geraden, der sogenannten EULER*schen Geraden. Es ist ferner $HF : SF = 3 : 1$ und $HM : SM = 3 : 1$, also $HF : SF = HM : SM$, das heisst es handelt sich um harmonische Punkte. Die Radien der beiden Kreise (des Umkreises und des* FEUERBACH*kreises verhalten sich wie 2 : 1. Das Dreieck $A_1B_1C_1$ ist ähnlich ABC und dabei in halbem Massstab gezeichnet. Auch ist $MS : SF = MH : SH = 2 : 1$, Also sind S und M die Ähnlichkeitspunkte beider Kreise.*

2 Moderner Zugang mit dem Computer

Will man heutzutage die Sachverhalte am Computer durch Einsatz der analytischen Geometrie nachvollziehen, so ist ja die Wahl des Koordinatensystems für bequemes

Rechnen von grossem Einfluss. Für die Situation des FEUERBACHkreises und der EULERgeraden kann der Bezug auf den FEUERBACHpunkt als Ursprung besonders angeraten sein. Ein Dreieck und sein Mittendreieck sind ähnlich mit einem Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{2}$. Anstatt von dem Originaldreieck auszugehen und dieses gegebenenfalls zu normieren, gehen wir von dem Mittendreieck aus und normieren dies in der Weise, dass die Eckpunkte $\mathbf{v}1, \mathbf{v}2, \mathbf{v}3$ auf dem Einheitskreis liegen. Dann ist

$$\mathbf{v}1 = (\cos\varphi, \sin\varphi),\ \mathbf{v}2 = (\cos\psi, \sin\psi) \text{ und } \mathbf{v}3 = (\cos\omega, \sin\omega).$$

Die Eckpunkte des Urdreiecks werden dann

$$\mathbf{w}1 = \mathbf{v}2 + \mathbf{v}3 - \mathbf{v}1, \quad \mathbf{w}2 = \mathbf{v}1 + \mathbf{v}3 - \mathbf{v}2, \quad \mathbf{w}3 = \mathbf{v}1 + \mathbf{v}2 - \mathbf{v}3.$$

Denn es ist $\frac{1}{2}\ (\mathbf{w}i + \mathbf{w}j) = \mathbf{v}k$ für $i \neq j$ und $k \in \{1,2,3\} \setminus \{i,j\}$. Also bilden $\mathbf{v}1, \mathbf{v}2, \mathbf{v}3$ wirklich das Mittendreieck von $\mathbf{w}1, \mathbf{w}2, \mathbf{w}3$, wobei also der Eckpunkt $\mathbf{w}i$ der Seitenmitte $\mathbf{v}i$ gegenüberliegt. Der Umkreismittelpunkt $\mathbf{m}$ vom Urdreieck wird $\mathbf{m} = \mathbf{v}1 + \mathbf{v}2 + \mathbf{v}3$, weil der Abstand $dist(\mathbf{w}i, \mathbf{m}) = ||\mathbf{w}i - \mathbf{m}|| = 2||\mathbf{v}i|| = 2$ beträgt. $\mathbf{m}$ ist der Höhenschnittpunkt des Mittendreiecks $\mathbf{v}1, \mathbf{v}2, \mathbf{v}3$. Der Höhenschnittpunkt des Urdreiecks ist $\mathbf{h} = -\mathbf{m}$, denn im Falle $\mathbf{h} \neq \mathbf{w}i$ ist die Verbindungsgerade $g(\mathbf{w}i, \mathbf{h})$ durch die Punktrichtungsgleichung $-\mathbf{m} + \lambda(\mathbf{w}i + \mathbf{m}) = -\mathbf{m} + 2\lambda(\mathbf{v}j + \mathbf{v}k) = -\mathbf{m} + \mu(\mathbf{v}j + \mathbf{v}k) \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, gegeben. Der Richtungsvektor $\mathbf{v}j + \mathbf{v}k$ dieser Geraden ist aber tatsächlich orthogonal zu dem Richtungsvektor $\mathbf{v}j - \mathbf{v}k$ der Dreieckseite $g(\mathbf{v}j, \mathbf{v}k)$. Dazu bestätigt man für das Skalarprodukt

$$\langle \mathbf{v}j + \mathbf{v}k, \mathbf{v}j - \mathbf{v}k \rangle = 0,$$

geometrisch bedeutet dies, dass die Diagonalen in dem von $\mathbf{v}j$ und $\mathbf{v}k$ aufgespannten Rhombus senkrecht aufeinander stehen.
Der Fall $\mathbf{h} = \mathbf{w}i$ bedeutet $\mathbf{v}j = -\mathbf{v}k$. Dann ist sogar $\mathbf{h} = \mathbf{w}i = -\mathbf{v}i$. Das Mittendreieck wird folglich nach dem THALESsatz rechtwinklig. $\mathbf{h}$ ist damit auch jetzt der Höhenschnittpunkt.
• Es fallen das Dreieckzentrum $\mathbf{m}$ und das Orthozentrum $\mathbf{h}$ genau dann zusammen, wenn eine der folgenden untereinander äquivalenten Bedingungen gilt:

1. $\mathbf{v}1 + \mathbf{v}2 + \mathbf{v}3 = 0$
2. $-\mathbf{v}3$ ist die Rhombusdiagonale des von $\mathbf{v}1, \mathbf{v}2$ aufgespannten Rhombus.
3. Das Dreieck $\mathbf{v}1\mathbf{v}2\mathbf{v}3$ ist gleichseitig.

Also gibt es für ein Dreieck, das nicht gleichseitig ist, eine eindeutig bestimmte Gerade $g(\mathbf{m}, \mathbf{h})$. Auf dieser EULERschen Gerade liegen das Dreieckzentrum $\mathbf{m}$, der Schwerpunkt $\mathbf{s}$ des Urdreiecks (= Schwerpunkt des Mittendreiecks,

$$\frac{1}{3}(\mathbf{w}1 + \mathbf{w}2 + \mathbf{w}3) = \frac{1}{3}(\mathbf{v}1 + \mathbf{v}2 + \mathbf{v}3) = \frac{1}{3}\mathbf{m}),$$

sowie das FEUERBACHzentrum (Nullpunkt) und der Höhenschnittpunkt $\mathbf{h}$. Aus den Ortsvektoren entnimmt man für die EULERstrecke $\mathbf{mh}$ das Teilverhältnis der vier Punkte $\mathbf{m}, \mathbf{s}, \mathbf{f}, \mathbf{h}$ als 2:1:3. Die Punkte $-\mathbf{v}i$ sind jeweils die Mittelpunkte der Strecken $\mathbf{hw}i$, weil ja $-\mathbf{v}i = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + \mathbf{w}i)$. Sie liegen auf der durch $\mathbf{w}i$ gehenden Höhe. Die Fusspunkte $\mathbf{f}i$ dieser Höhen befinden sich nach dem THALESsatz auf dem FEUERBACHkreis. Denn das Dreieck $\mathbf{v}i(-\mathbf{v}i)\mathbf{f}i$ ist rechtwinklig mit dem Kreisdurchmesser

$\mathbf{v}i(-\mathbf{v}i)$ als Hypotenuse.
Damit finden wir die Neun–Punkte–Eigenschaft des FEUERBACHkreises bestätigt.
Wie berechnen sich die Höhenfusspunkte $\mathbf{f}i$? Sie sind im Falle $\mathbf{h} \neq -\mathbf{v}i$, d.h. $\mathbf{v}j+\mathbf{v}k \neq 0$, die von $-\mathbf{v}i$ verschiedenen Schnittpunkte der Gerade $-\mathbf{v}i + t(\mathbf{v}j + \mathbf{v}k)$ mit dem FEUERBACHkreis. Es wird

$$\mathbf{f}i = -\mathbf{v}i + ti(\mathbf{v}j + \mathbf{v}k),$$

$$\text{wobei } ti = 2\frac{\langle \mathbf{v}i, \mathbf{v}j + \mathbf{v}k\rangle}{\|\mathbf{v}j + \mathbf{v}k\|^2} = \frac{\langle \mathbf{v}i, \mathbf{v}j + \mathbf{v}k\rangle}{1 + \langle \mathbf{v}j, \mathbf{k}\rangle}.$$

Für $\mathbf{h} = \mathbf{v}i$, d.h. $\mathbf{v}j + \mathbf{v}k = 0$, hat die Höhe die Punktrichtungsgleichung $\mathbf{v}i + t(-\sin j, \cos j)$. Der Höhenfusspunkt wird dann $\mathbf{f}i = -\mathbf{v}i + ti(-\sin j, \cos j)$ mit $ti = 2\sin(i-j)$. Das Dreieck mit den Ecken $-\mathbf{v}1, -\mathbf{v}2, -\mathbf{v}3$ ist das am FEUERBACHpunkt gespiegelte Mittendreieck. $\mathbf{h}$ gibt damit auch den Höhenschnittpunkt des Spiegeldreiecks an. Die Trägergeraden der Höhen des Urdreiecks und die des Spiegeldreiecks stimmen nämlich überein. Das Spiegeldreieck und das Urdreieck gehen durch eine zentrische Streckung am Höhenschnittpunkt $\mathbf{h}$ ineinander über. Der Streckfaktor beträgt 2.

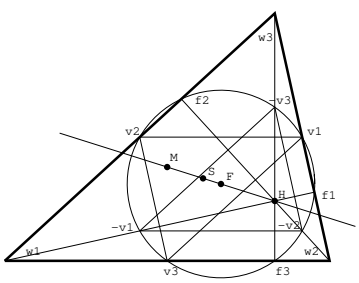

Fig.1 Feuerbachkreis und Eulergerade

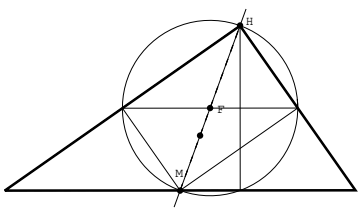

Fig.2 Der Feuerbachkreis und die Eulergerade für ein rechtwinkliges Dreieck

Die Winkelgrössen φ, ψ und ω bestimmen die Form des Dreiecks. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir zusätzlich noch eine optisch bevorzugte Lage für das Dreieck wählen, indem wir nämlich die Basislinie $\mathbf{w}1\mathbf{w}2$ als horizontal ansetzen und den anderen Dreieckspunkt $\mathbf{w}3$ oberhalb der Basislinie speziell ansiedeln.
Es sei ab jetzt $\psi = 180 - \varphi$ für $-90 < \varphi < 90$ und $180 - \varphi \leq \omega \leq 270$ (Winkelangaben stets in Grad).
Für die Winkel α, β, γ des Urdreiecks erhält man mittels Betrachtung von Umfangswinkeln unter Beachtung von $\beta = 180 - \alpha - \gamma$

$$\begin{aligned}
\gamma &= 90 - \varphi \\
\alpha &= \frac{\omega - \psi}{2} = \frac{\omega}{2} + \frac{\varphi}{2} - 90 \\
\beta &= 180 - \frac{\omega}{2} + \frac{\varphi}{2}.
\end{aligned}$$

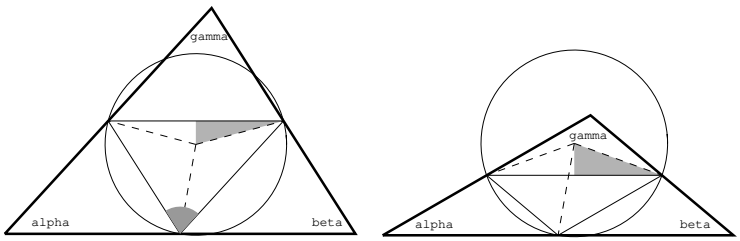

Fig.3a,b Zur Bestimmung der Winkel α, β, γ.

Die *Visualisierung auf dem Computer* liefert mit variierenden Startgrössen φ und ω einen Einblick in mögliche Lagen der EULERgerade und des FEUERBACHkreises. Per Augenschein strukturiert man das Bildmaterial und gelangt damit zu Hypothesen und hat für diese nach bestätigenden Argumenten zu suchen.

3 Dreieckstypen, ihre Eulergerade und ihr Feuerbachkreis

Dreieckseigenschaften können in dazu äquivalente Eigenschaften der EULERgerade sowie in äquivalente Eigenschaften des FEUERBACHkreises übersetzt werden.
Wir listen dazu einige Beispiele in Gegenüberstellung auf.

	Dreieck	Eulergerade	Feuerbachkreis
1	Gleichseitig	Existiert nicht. Alle 4 Pkte M, H, F, S fallen zusammen.	Tangiert jede Dreieckseite. Er ist der Inkreis.

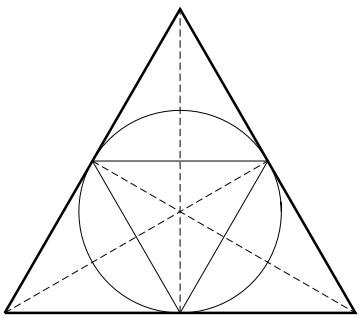

Fig.4 Gleichseitiges Dreieck mit Feuerbachkreis

2	Spitzwinklig	Endpunkte der Eulerstrecke MH liegen innerhalb des Dreiecks	Eckpunkte des Dreiecks liegen ausserhalb des Kreises

Spitzwinkligkeit ist gleichbedeutend mit $0 < \alpha < 90$, $0 < \beta < 90$. Mit der generellen Beschränkung $-90 < \varphi < 90$ und $180 - \varphi \leq \omega \leq 270$ drückt sich die

Spitzwinkligkeit dabei durch $0 < \varphi < 90$ und $180 + \varphi < \omega \leq 270$ aus. Das übersetzt sich in Lageeigenschaften von $\mathbf{m}$ und $\mathbf{h}$. Wegen $\mathbf{m} = (\cos\omega, 2\sin\varphi + \sin\omega)$ und $\mathbf{h} = (\cos\omega, -2\sin\varphi - \sin\varphi)$ lautet die Übersetzung

$$2\sin\varphi + \sin\omega > \sin\omega \text{ und } -2\sin\varphi - \sin\omega > \sin\omega.$$

Das bedeutet: $\mathbf{m}$ und $\mathbf{h}$ liegen in der oberen Halbebene der Basislinie des Dreiecks, dort wo der Eckpunkt $\mathbf{w}3$ liegt. Aus Symmetriegründen ist damit die Spitzwinkligkeit in die genannte Eigenschaft der EULERstrecke übertragen.Betreffs der Lage der Eckpunkte hinsichtlich des FEUERBACHkreises muss man $||\mathbf{w}i||^2$ mit 1 vergleichen. Für $\mathbf{w}3$ führt das auf einen Vergleich von

$\sin\varphi - \sin\omega$ mit 0, für $\mathbf{w}2$ auf einen Vergleich von
$\cos\varphi + \cos\omega$ mit 0 und für $\mathbf{w}1$ auf einen Vergleich von
$\cos\varphi - \cos\omega$ mit 0.

3	Rechtwinklig	Eulerstrecke reicht von einer Seitenmitte zur Gegenecke	Geht durch einen Eckpunkt des Dreiecks

Rechtwinkligkeit tritt nur ein bei $\varphi = 0$ oder $\varphi > 0$ mit $\omega = 180 + \varphi$. Der FEUERBACHkreis ist dann der Thaleskreis des Mittendreiecks. Den Fall $\varphi = 0$ zeigt die Figur 2. Den anderen Fall sieht man in der nachfolgenden Figur 5

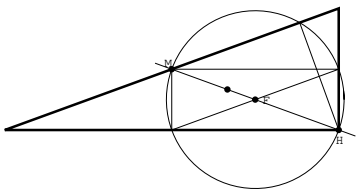

Fig. 5 Rechtwinkliges Dreieck mit horizontaler Kathete

4	Stumpfwinklig	Endpunkte der Eulerstrecke MH liegen ausserhalb des Dreiecks	Ein Eckpunkt des Dreiecks liegt im Inneren des Kreises

Stumpfwinkligkeit ist das Gegenteil der beiden zuvor behandelten Fälle.

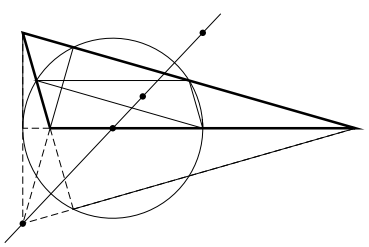

Fig.6 Stumpfwinkliges Dreieck

5	Gleichschenklig, aber nicht gleichseitig	Eine Dreieckshöhe liegt auf der Eulergerade des Dreiecks	Der Kreis tangiert genau eine Dreieckseite

Die Gleichschenkligkeit wird durch $\gamma = 270$ erfasst, wenn man **w**3 als den Dreiecks-punkt ansieht, in den beide Schenkel münden.
Die y-Achse wird dann Trägergerade einer Dreieckshöhe. Der FEUERBACHkreis tangiert dann die Basislinie.

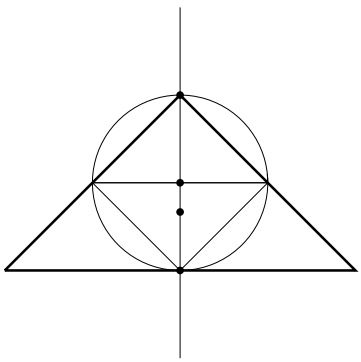

Fig.7 Rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck mit rechtem Winkel in **w**3.

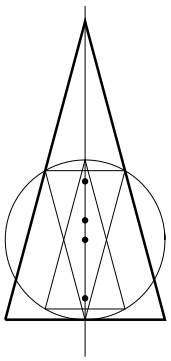

Fig.8 Spitzwinkliges, gleichschenkliges Dreieck.

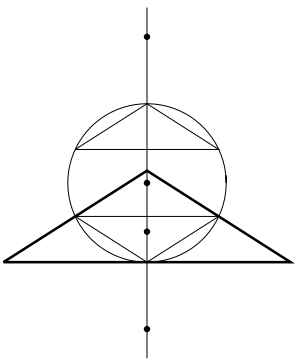

Fig.9 Stumpfwinkliges, gleichschenkliges Dreieck.

Für die gleichschenkligen Dreiecke bestimmt der Höhenschnittpunkt mit einem Basiseckpunkt und dem Topeckpunkt einen Winkel der Grösse φ. Der besagte Winkel ist

der zwischen den Vektoren $\mathbf{w3}-\mathbf{w1}$ und $\mathbf{h}-\mathbf{w1}$. Für ihn gilt nämlich

$$\begin{aligned}\frac{\langle \mathbf{w3}-\mathbf{w1}, \mathbf{h}-\mathbf{w1}\rangle}{||\mathbf{w3}-\mathbf{w1}||||\mathbf{h}-\mathbf{w1}||} &= \frac{\langle \mathbf{v1}-\mathbf{v3}, -\mathbf{v2}-\mathbf{v3}\rangle}{||\mathbf{v1}-\mathbf{v3}||||\mathbf{v2}+\mathbf{v3}||} \\ &= \frac{\langle (\cos\varphi, \sin\varphi+1), (\cos\varphi, 1-\sin\varphi)\rangle}{||\mathbf{v1}-\mathbf{v3}||||\mathbf{v2}+\mathbf{v3}||} \\ &= \cos\varphi.\end{aligned}$$

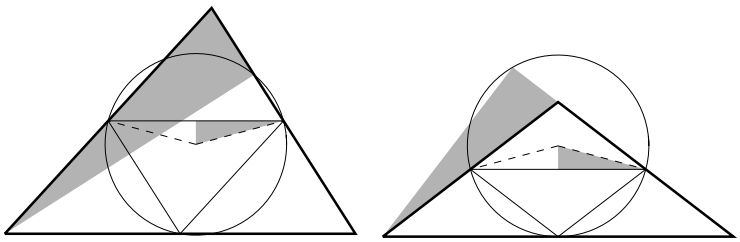

Fig.10a,b Zur Winkel-Kongruenz

Richtet man das Augenmerk auf das Teilverhältnis, welches der FEUERBACHkreis mit dem Höhenfusspunkt auf dem halben Dreieckschenkel hervorbringt, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Für $0 < \varphi < 30$ wird die obere Schenkelhälfte geteilt und für $30 < \varphi < 90$ die untere Schenkelhälfte. Für den oberen Fall ist das Verhältnis

$$\frac{||\mathbf{w3}-\mathbf{f1}||}{||\mathbf{f1}-\mathbf{v1}||}$$

gefragt.
Indem wir Zähler und Nenner abkürzen mit Z, N, haben wir

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \frac{Z}{||\mathbf{w3}-\mathbf{w1}||} = \frac{Z}{2||\mathbf{w3}-\mathbf{v1}||} \text{ und} \\ \frac{Z}{||\mathbf{w3}-\mathbf{v1}||} &= 2\sin\varphi, \text{ d.h.} \\ \frac{Z}{N} &= \frac{Z}{||\mathbf{w3}-\mathbf{v1}||-Z} = \frac{2\sin\varphi}{1-2\sin\varphi}.\end{aligned}$$

Dieses Verhältnis stellt sich auch ein für

$$\frac{||\mathbf{v3}-\mathbf{h}||}{||\mathbf{h}||} = \frac{||\mathbf{v1}+\mathbf{v2}||}{||\mathbf{v1}+\mathbf{v2}+\mathbf{v3}||} = \frac{2\sin\varphi}{1-2\sin\varphi}.$$

Also kann formuliert werden:

6	Gleichschenklig mit einem Basiswinkel von $45° < \alpha < 60°$	Der Höhenschnittpunkt teilt oberen den Feuerbachradius von oben nach unten im Verhältnis $\frac{-2\cos 2\alpha}{1+2\cos 2\alpha}$	Der Kreis teilt den oberen halben Schenkel von oben nach unten im Verhältnis $\frac{-2\cos 2\alpha}{1+2\cos 2\alpha}$

Speziell bekommt man hiermit:

7	Gleichschenklig mit einem Basiswinkel von $50.5050\,78\cdots^\circ$	Der Höhenschnittpunkt teilt den oberen Feuerbachradius von oben nach unten im goldenen Verhältnis $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	Der Kreis teilt den oberen halben Schenkel von oben nach unten im goldenen Verhältnis σ

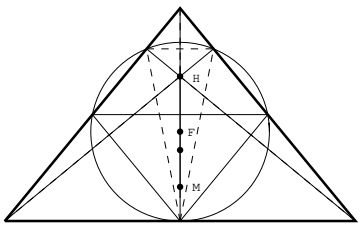

Fig.11 Radiusteilung und Teilung des oberen halben Schenkels nach dem goldenen Schnitt ($\varphi = 11.010157^\circ$) $\varphi = \arcsin\frac{\sigma^2}{2}$

8	Gleichschenklig mit einem Basiswinkel von 54°	Der Höhenschnittpunkt teilt den oberen Feuerbachradius von oben nach unten im goldenen Verhältnis $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$	Der Kreis teilt den oberen halben Schenkel von oben nach unten im goldenen Verhältnis τ

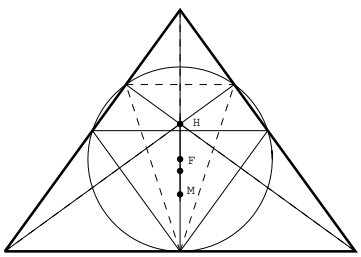

Fig.12 Radiusteilung und Teilung des oberen halben Schenkels nach dem goldenen Schnitt, andere Lage des Majors.

Bei dem im vorstehenden Punkt 8 genannten gleichschenkligen Dreieck handelt es sich um das Zentridreieck vom regelmässigen 5-Eck (Pentagon).

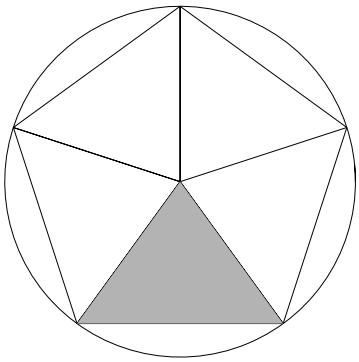

Fig.13 Zentridreieck vom regelmässigen Fünfeck.

9	Gleichschenklig mit einem Basiswinkel von $52.238756\cdots°$	Der Höhenschnittpunkt halbiert den oberen Feuerbachradius	Der Kreis teilt den oberen halben Schenkel im Verhältnis 1:1.

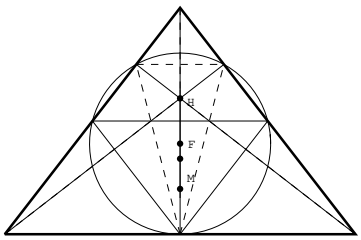

Fig.14 Halbierung des oberen Radius sowie des oberen halben Schenkels.

10	Gleichschenklig mit einem Basiswinkel von 72° (Spitzwinkliges goldenes Dreieck)	Der Höhenschnittpunkt teilt den unteren Feuerbachradius von unten nach oben im goldenen Schnitt σ	Der Kreis teilt den unteren halben Schenkel von unten nach oben im goldenen Schnitt

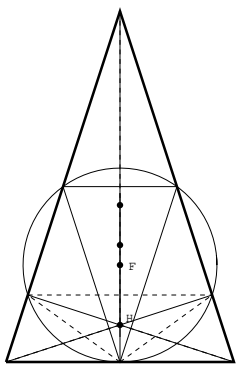

Fig.15 Spitzwinkliges gleichschenkliges goldenes Dreieck. Die drei Höhenfusspunkte und die Seitenmitten bilden ein regelmässiges Pentagon

11	Gleichschenklig mit einem Basiswinkel von 36° (Stumpfwinkliges goldenes Dreieck)	Der Höhenschnittpunkt teilt den oberen Feuerbachradius von aussen im goldenen Schnitt	Der Höhenschnittpunkt und die beiden Kreispunkte auf der Ecktransversale liefern goldenen Schnitt

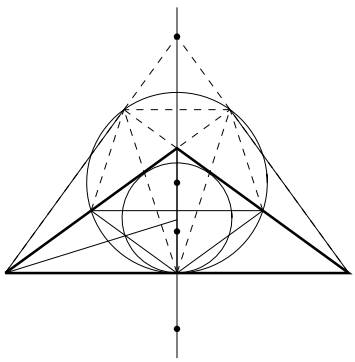

Fig.16 Stumpfwinkliges gleichschenkliges goldenes Dreieck. Die 3 Höhenfusspunkte und die Seitenmitten bilden ein regelmässiges Pentagon.

Zum Abschluss betrachten wir nun noch ein nichtgleichschenkliges Dreieck.

12	Basiswinkel $\alpha = 45°$ Basiswinkel $\beta = \arctan 3$	Eulerstrecke ist parallel zur Basis und der Höhenschnittpunkt teilt die Höhe von oben nach unten 2:1.	Der Kreis teilt die Basis im Verhältnis 1:3 und die eine Seite im Verhältnis 2:1

Die zugehörige Situation zeigt die nachfolgende Figur 16.

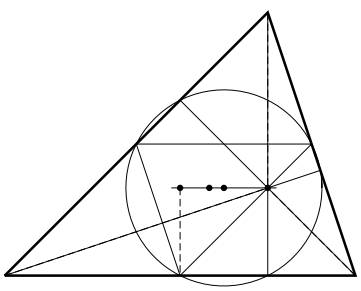

Fig.17 Eulerstrecke senkrecht zur Höhe mit Teilverhältnis 2:1 auf der Höhe.

Literatur

[1] P. Baptist: Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie, Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik Bd 19, Mannheim u.a. 1992 (Bibliographisches Institut).

[2] R. Fritsch: Zum Feuerbachschen Kreis, Antrittsvorlesung, Konstanzer Universitätsreden 72, Druckerei und Verlagsanstalt Konstanz Universitätsverlag 1975.

[3] R. Fritsch: „Höhenschnittpunkte“ für n-Simplizes. Elemente der Mathematik, **31**, 1-8, (1976).

[4] H. Martini: Neuere Ergebnisse der Elementargeometrie. In: Geometrie und ihre Anwendungen. Hrsg. O. Giering, J. Hoschek, Carl Hanser Verlag. München; Wien, 1994.