DIE MATHEMATIK DER PLANETENBEWEGUNG

FACHBEREICHSARBEIT
AUS
MATHEMATIK

Am BG und BRG Klosterneuburg
Bei Mag. Walter Wegscheider

Historischer Hintergrund. Zentralkräfte. Das Zweikörperproblem. Die Kepler'schen Gesetze. Bahndaten des Sonnensystems. Das restringierte Dreikörperproblem. Die Bestimmung der Gravitationskonstante. Raumfahrt mit gravitationellen Schleudereffekten. Mathematische Grundlagen.

Franziska Michor

Klosterneuburg, am 14. Februar 2000

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Vorwort

Seit dem Beginn der wissenschaftlichen Forschung ist die Menschheit an den Himmelskörpern und deren Bewegungen interessiert. Dieses Interesse machte weder vor den Galliern, die ständig fürchten mussten, der Himmel könnte ihnen auf den Kopf fallen, noch vor Kepler Halt; letzterem verdanken wir die revolutionäre Entdeckung der Gesetze, mit denen sich die Bahnen der Planeten berechnen lassen.

Die Faszination der Astronomie und der Mathematik, die Newton hinter den Kepler'schen Gesetzen entdeckte, erfasste schließlich auch mich. Besonders anregend war ein Vortrag über die Stabilität des Sonnensystems von *Jacques Laskar* im Jahr 1998. Und so keimte die Idee auf, eine Fachbereichsarbeit zu diesem Thema zu verfassen. Mein Vorhaben fand in einem so mathematischen Haushalt vollste Unterstützung - an dieser Stelle einen großen Dank an meinen Vater den 'Layouter', aber auch an meine Schwester, die beim Korrekturlesen auf einige Ungereimtheiten stieß. Weiters wandte auch Mag. Wegscheider eine Menge Zeit dafür auf, Ordnung in mein chaotisches Werk zu bringen - Danke auch hierfür.

Nun bleibt mir nur noch zu hoffen, dass diese Arbeit den Galliern ihre Angst vor dem Weltuntergang hätte nehmen können.

Inhaltsverzeichnis

1. Historischer Überblick
über die Verwendung der Mathematik in der Astronomie 4
1.1. Überlegungen im Altertum 4
1.2. Das Geozentrische Weltbild 4
1.3. Das Heliozentrische Weltbild 5
2. Zentralkräfte 7
2.1. Kraft- oder Vektorfelder 7
2.2. Das Newton'sche Kraftgesetz 8
2.3. Der Drehimpuls 8
2.4. Der Flächensatz 10
3. Der Massenpunkt im Gravitationspotential 12
3.1. Das Gravitationspotential 12
3.2. Der Energieerhaltungssatz 14
3.3. Das Erste Kepler'sche Gesetz 14
3.4. Satz. Kegelschnitte in Polarkoordinaten 18
3.5. Interpretation 18
3.6. Beweis des Satzes 3.4 20
3.7. Das Dritte Kepler'sche Gesetz 23
4. Bahndaten 25
4.1. Berechnung von Entfernungen und Massen 25
4.3. Bahndaten des Sonnensystems 27
5. Das restringierte Dreikörperproblem 28
5.1. Das Problem von Lagrange 28
5.2. Das Dreieck der Massen 29
5.3. Die gravitationelle Falle 31
5.4. Die Stabilität der Bewegung 33
6. Raumfahrt mit gravitationellen Schleudereffekten 34
6.1. Die Planetenschleuder 34
6.2. Exakte Herleitung 35
A. Appendix:
Mathematische Grundlagen 39
A.1. Das Innere Produkt 39
A.2. Die Determinante 40
A.3. Das Vektor- oder Kreuzprodukt 41
A.4. Das Flächenintegral in Polarkoordinaten 42
A.5. Der Gradient, Höhenschichtlinien und Equipotentialflächen 44
A.6. Der Cosinussatz 46
Bibliographie 47
Index 48

1. Historischer Überblick über die Verwendung der Mathematik in der Astronomie

1.1. Überlegungen im Altertum Das Fehlen eines Bezugspunktes führte zu Beginn der Forschungen zu der Annahme, die Erde müsse den Mittelpunkt des Universums bilden. Alle anderen Himmelskörper wurden in ihren Positionen zur Erde in Bezug gesetzt. Die ersten uns heute noch bekannten Astronomen waren die *Babylonier*, die schon ca. 3000 v.Chr. den naturgegebenen Ablauf der Tages- und Jahreszeiten als Anreiz nahmen, die Forschung voranzutreiben. Sie teilten die Bahn des scheinbaren Sonnenlaufs um die Erde in 12 gleichgroße Abschnitte zu je 30°; die Festlegung dieser Abschnitte erfolgte durch Sternbilder (Tierkreiszeichen), die auch heute noch zur Orientierung am Himmel und in der Astrologie verwendet werden. Eine differenziertere Betrachtung erfolgte durch die Griechen ab ca. 500 v.Chr. Die Schule der *Pythagoräer* entwickelte das erste geschlossene Gesamtbild des Universums, das auf den Gesetzen der Zahlen und der Tonleiter basierte; sie stellten sich die Himmelskörper als Kugeln vor, die sich auf Kreisbahnen um die Erde bewegen und dabei 'Sphärenmusik' erzeugen. Das geozentrische Weltbild wurde festgelegt und die Kreisbahn als vollkommenste Bahn für Himmelskörper als gegeben angenommen. Um 400 v.Chr. lehrte der griechische Philosoph *Platon*, dass nur die Mathematik die wahre Wirklichkeit beschreiben kann; er vertrat aber noch die Ansicht des geozentrischen Weltbildes. Erst *Aristarch von Samos* schloss um 300 v.Chr. aus der Tag-Nacht-Folge und aus der Tatsache, dass es sich bei dem Abend- und dem Morgenstern um ein und denselben Himmelskörper (Venus) handelt, dass dieses Weltbild nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmen kann. Er ließ alle Himmelskörper um die Sonne kreisen und gilt damit als Begründer der Idee des heliozentrischen Systems. Weiters stellte er als Erster richtige Überlegungen über Größe und Entfernung der Himmelskörper an. Etwa zur gleichen Zeit bestimmte *Eratosthenes* durch Messung und Rechnung ziemlich genau die Länge des Erdumfanges und damit auch die Größe der Erde. Um 100 n.Chr. vollendete *Klaudios Ptolemaios* in seinem Werk 'Almagest' die Beschreibung der Himmelskörperbewegungen auf Kreisbahnen mit der Erde als Zentrum. Er verzichtete auf alle Aussagen über die Natur der Himmelskörper und beschrieb rein mathematisch alle Bewegungsvorgänge durch ein System übereinandergelagerter Kreisbewegungen (Exzenter- und Epizykelbahnen). Interessant ist, dass Ptolemaios, um alle Unregelmäßigkeiten der Planetenbewegungen genau beschreiben zu können, das Zentrum der Kreisbahn aus der Erde herausverlegen musste; doch da es sich um eine rein mathematische Konstruktion handelte, nahm keiner Anstoß daran.

1.2. Das Geozentrische Weltbild Die Aufzeichnungen der Griechen blieben im Abendland für lange Zeit verschollen. Erst um 1200 wurden griechische Schriften aus arabischen Quellen ins Lateinische übersetzt und somit für die Gelehrten Mitteleuropas zugänglich. Damit wurde das geozentrische Weltbild für lange Zeit zementiert. Erst im sechzehnten Jahrhundert begann mit der Scholastik ein Aufbruch

der erstarrten Vorstellungen des aristotelischen Gedankengutes.

1.3. Das Heliozentrische Weltbild Das heliozentrische Weltbild wurde erst zu Beginn der Neuzeit von *Kopernikus* wiederentdeckt und in Form des Buches 'De Revolutionibus Orbium Coelestium' veröffentlicht. Er setzte die Sonne in das Zentrum der Bewegungen der Himmelskörper, hielt aber noch an Kreisbahnen fest. Das Konzept wurde von der Kirche unterdrückt. Das Zeitalter des Empirismus begann; Untersuchungen und Aufzeichnungen rückten in den Vordergrund und lösten starre Dogmen ab. Der Däne *Tycho de Brahe* kam auf die revolutionäre Idee, dass man Bewegungsvorgänge durch möglichst genaue Messungen begründen solle. Diese Messungen führte er in den letzten zwanzig Jahren des 16. Jahrhundert durch und erstellte genaue Tabellen, die nach seinem Tod im Jahre 1601 sein Assistent *Johannes Kepler* übernahm. Mit Hilfe der besonders genauen und zahlreichen Daten über die Marsbahn formulierte Kepler in den Jahren zwischen 1609 und 1619 seine Gesetze über die Planetenbewegung und veröffentlichte sie in 'Astronomia Nova'. Heute sind sie als Kepler'sche Gesetze bekannt:

(1) Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
(2) Der von der Sonne zu einem Planeten weisende Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
(3) Das Verhältnis zwischen dem Quadrat der Umlaufszeit und dem Kubus der großen Achse der Bahnellipse ist für alle Planeten des Sonnensystems konstant.

Kepler bestätigte damit erstmalig die Richtigkeit des heliozentrischen Weltbildes und wies nach, dass nur die Annahme elliptischer Kreisbahnen Übereinstimmung bringt. Dennoch konnte er die Frage nach der Kraft, die für die Bewegung verantwortlich ist, nicht beantworten.

Inzwischen untersuchte *Galileo Galilei* in Pisa und Florenz die Gesetze der Bewegung und entdeckte die Bewegung der Jupitermonde um den Jupiter, die Phasen der Venus, die Sonnenflecken und die unregelmäßige, erdhafte Mondoberfläche. Da er gleich Kopernikus mit dem Anspruch der Wahrheit das heliozentrische Weltbild vertrat, musste es damals zum Konflikt mit der Kirche kommen.

Erst am Ende des siebzehnten Jahrhunderts begann sich mit den Veröffentlichungen des englischen Physikers *Isaac Newton* die exakte Naturwissenschaft durchzusetzen. Er publizierte 1687 sein wirkungsmächtiges Werk 'Philosophiae Naturalis Principia Mathematica'. Im ersten Buch dieses Werkes erläutert er die Lehre von den Zentralkräften und den Flächensatz, der das zweite Kepler'sche Gesetz als Spezialfall enthält. Als nächstes zeigt Newton, dass die Kraft, die einen Körper längs eines Kegelschnittes bewegt, umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes diese Körpers von einem festen Punkt sein muss - das ist das Gravitationsgesetz; weiters beweist er, dass aus dem Gravitationsgesetz das erste Kepler'sche Gesetz folgt und leitet daraus schließlich noch das dritte Kepler'sche Gesetz her. Somit bewies erst Newton die von Kepler rein empirisch aufgestellten Gesetze. Er betrachtete aber nur das Zweikörper-Kraftproblem. Die Abweichungen der realen Bahnen wurden erst hundert Jahre später von *Lagrange* und *Laplace* damit erklärt, dass auch die

Planeten untereinander Gravitationskräfte ausüben; es sind nicht nur zwei Körper, die zueinander in Bezug gesetzt werden müssen, sondern mehrere.

Mit dieser Hintergrundinformation wenden wir uns nun dem mathematischen Teil der Arbeit zu.

2. Zentralkräfte

Zuallererst wollen wir Bewegungen untersuchen, die durch eine Zentralkraft verursacht werden. Erstaunlicherweise gilt nämlich das Zweite Kepler'sche Gesetz sogar für solche Bewegungen, die allgemeineren Gesetzen als dem Gravitationsgesetz folgen.

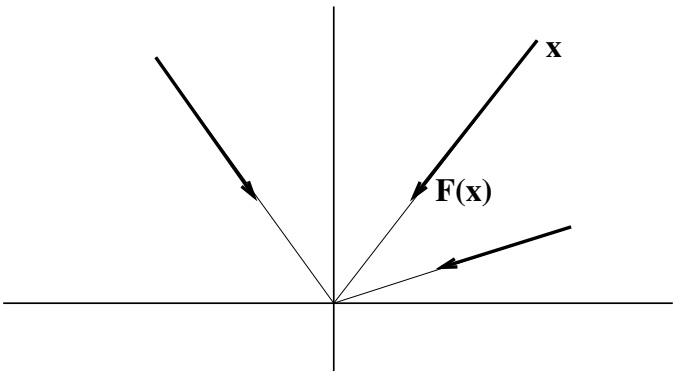
2.1. Kraft- oder Vektorfelder

Wir betrachten einen Massenpunkt, der sich unter dem Einfluss (dem Kraftfeld) einer Zentralkraft befindet. Wir wollen untersuchen, wie ihre Kraftwirkung die Bahn unseres Massenpunktes beeinflusst.

Ein Kraft- oder Vektorfeld ordnet jedem Ortsvektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ eines Punktes des Raumes $\mathbb{R}^3$ einen Vektor

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ F_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, x_3) \\ F_2(x_1, x_2, x_3) \\ F_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

zu. Das Vektorfeld $\mathbf{F}$ heißt *Zentralkraftfeld* oder *Zentripetalkraftfeld*, wenn jeder Vektor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ von seinem Fußpunkt $\mathbf{x}$ auf einen festen Punkt (den wir als 0 annehmen können) zeigt. In diesem Fall sind der Ortsvektor $\mathbf{x}$ und der Vektor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ parallel; zwei Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ heißen parallel, wenn $\mathbf{v} = r\,\mathbf{w}$ für eine reelle Zahl r ist.



Also gilt

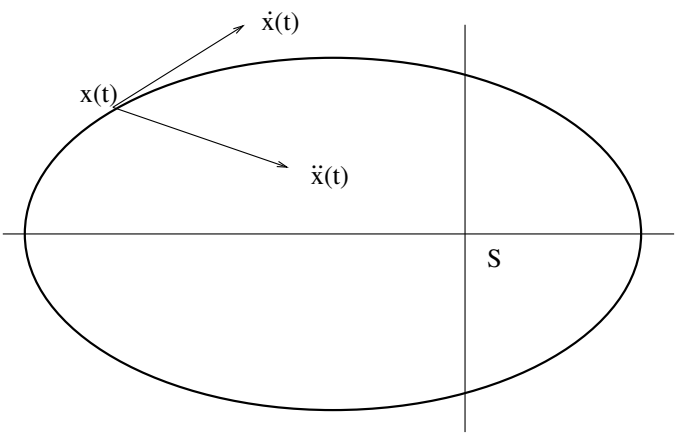
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\mathbf{x}, \quad \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, x_3) \\ F_2(x_1, x_2, x_3) \\ F_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = f(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

für eine Funktion f, die im Wesentlichen negativ ist (weil der Kraftvektor von $\mathbf{x}$ nach 0 zeigen soll) und die Länge des Vektors reguliert, die sich mit $\mathbf{x}$ ändert.

2.2. Das Newton'sche Kraftgesetz

Ein Punkt der Masse m, der sich nur unter dem Einfluss des Zentralkraftfeldes $\mathbf{F}$ fortbewegt, beschreibt eine Bahn, die man in der Form $\mathbf{x}(t)$ als Funktion der Zeit t darstellt.

$$\begin{aligned}
&\text{Ortsvektor} && \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \\
&\text{Geschwindigkeitsvektor} && \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_3(t) \end{pmatrix} \\
&\text{Beschleunigungsvektor} && \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2}x_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}x_2(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}x_3(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$



Dabei folgt die Bewegung $\mathbf{x}(t)$ dem *Newton'schen Kraftgesetz: Kraft ist Masse mal Beschleunigung,*

$$\begin{gathered}
\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = f(\mathbf{x}(t))\,\mathbf{x}(t) = m\,\ddot{\mathbf{x}}(t) \\
\begin{pmatrix} F_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\ F_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\ F_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{pmatrix}.
\end{gathered}$$

2.3. Der Drehimpuls

Hier wollen wir nun zeigen, dass die Bewegung unseres Massenpunktes in einer Ebene stattfindet. Dazu benötigen wir den Drehimpuls: zeigt er immer in dieselbe Richtung, so verläuft die Bewegung in der Ebene rechtwinkelig zu dieser Richtung. Aber der Drehimpuls wird darüberhinaus sogar konstant sein. Das ist einer der grundlegenden Erhaltungssätze der Physik, den wir in dieser Situation beweisen.

Da für eine Zentripetalkraft $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\mathbf{x}$ gilt (2.1), nimmt das Newton'sche Kraftgesetz folgende Form an:

$$f(\mathbf{x}(t))\,\mathbf{x}(t) = m\,\ddot{\mathbf{x}}(t)$$

Wir multiplizieren nun diese Gleichung mit dem Kreuzprodukt mit $\mathbf{x}(t)$, damit die linke Seite null wird. Das Kreuzprodukt wird in Appendix A.3 erklärt und wir verwenden hier alle Rechenregeln dafür ohne weiteren Kommentar.

$$0 = f(\mathbf{x}(t))\,\mathbf{x}(t) \times \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) \times (f(\mathbf{x}(t))\,\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t) \times (m\,\ddot{\mathbf{x}}(t)) = m\,\mathbf{x}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)$$

Weil $m \neq 0$ ist, folgt: $\mathbf{x}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t) = 0$; also sind insbesondere $\mathbf{x}(t)$ und $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ parallel, nach A.3. Diese Tatsache wollen wir im Folgenden ausnützen.

Aufgrund der Produktregel der Differenzialrechnung $((f\,g)' = f'\,g + f\,g')$, die auch für das Kreuzprodukt gilt, erhalten wir für die Ableitung von $\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)$:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)) = \dot{\mathbf{x}}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t) = 0$$

Somit ist $\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{c}$, ein konstanter Vektor, und steht senkrecht auf die Ebene, in der die Bewegung stattfindet. Der Vektor $m\,\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)$ heißt Drehimpuls, und damit folgt als erstes die fundamentale Aussage, dass *bei Zentralkräften der Drehimpuls konstant ist.*

Der Massenpunkt bewegt sich genau dann auf einer Geraden, wenn $\mathbf{c} = 0$ ist, da die Vektoren $\mathbf{x}(t)$ und $\dot{\mathbf{x}}(t)$ in dem Fall zueinander parallel sind. Ist aber $\mathbf{c} \neq 0$, befindet sich der Massenpunkt in einer Ebene senkrecht zu $\mathbf{c}$, was aus

$$\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{x}(t) \cdot (\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)) = \det(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = 0$$

hervorgeht. Es handelt sich also um eine *ebene Bewegung.*

Durch geeignete Wahl der Koordinaten können wir annehmen, dass diese Ebene die x_1-x_2-Ebene mit dem ursprünglichen Nullpunkt 0 ist, dass also $\mathbf{c} = (0, 0, c_3 = c)$ ist. Hierbei stimmt c gerade mit der Länge von $\mathbf{c}$ überein.

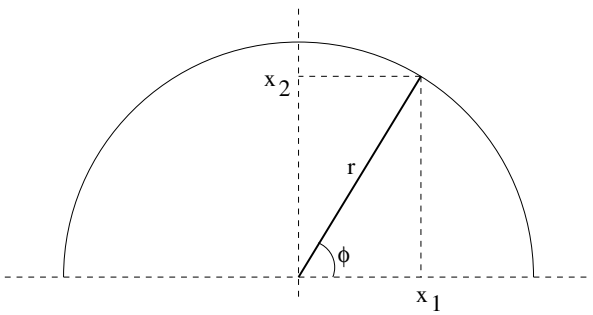
$$\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Also:

$$x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t) = c$$

2.4. Der Flächensatz

Nun kann man aber die Bahn des Massenpunktes (außerhalb des Nullpunktes) mittels Polarkoordinaten r, φ beschreiben: $x_1(t) = r(t)\cos\varphi(t)$, $x_2(t) = r(t)\sin\varphi(t)$.



Im Folgenden werden wir (t) zwecks Vereinfachung weglassen.

$$\begin{aligned} c = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 &= r\cos\varphi(\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi) - r\sin\varphi(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi) \\ &= r\dot{r}\cos\varphi\sin\varphi + r^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi - r\dot{r}\cos\varphi\sin\varphi + r^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi \\ &= r^2\dot{\varphi}(\cos^2\varphi + sin^2\varphi) \\ &= r^2\dot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\text{Also:} \quad c = r^2\dot{\varphi} \tag{1}$$

Wir betrachten die Fläche $A(t_1, t_2)$, die vom Ortsvektor $\binom{\varphi(t)}{r(t)}$ des Massenpunktes für $t \in [t_1, t_2]$ überstrichen wird. $A(t_1, t_2)$ ist ein 'Tortenstück', dessen äußerer Rand die Bahn des Massenpunktes ist. Aus Appendix A.4 erhalten wir die Fläche

$$\text{Fläche}(A(t_1, t_2)) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2}\rho(\varphi)^2\, d\varphi.$$

Wir versuchen, die Fläche auch als Integral über die Zeit zu berechnen und führen daher folgende Substitutionen durch:

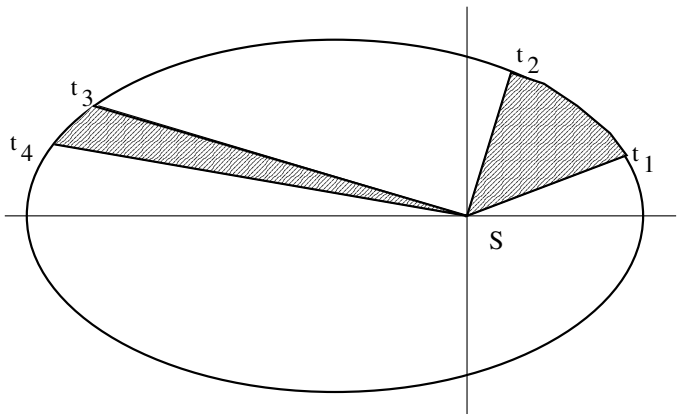
$$\varphi = \varphi(t), \quad d\varphi = \dot{\varphi}\, dt, \quad \rho(\varphi) = \rho(\varphi(t)) = r(t), \quad \varphi_1 = \varphi(t_1), \quad \varphi_2 = \varphi(t_2)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{Fläche}(A(t_1, t_2)) &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2}\rho(\varphi)^2\, d\varphi && \text{nach A.4} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} r(t)^2\dot{\varphi}(t) dt && \text{Substitution} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} c\, dt = \frac{c}{2}\, t\,\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} && \text{nach (1)} \\ &= \frac{c}{2}(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

In konstanten Zeitdifferenzen $(t_2 - t_1)$ werden daher gleiche Flächenstücke vom Ortsvektor überstrichen. Somit haben wir das *Zweite Kepler'sche Gesetz* in einer allgemeineren Situation bewiesen:

Flächensatz. *Bewegt sich ein Massenpunkt nur unter der Wirkung einer Zentralkraft, so überstreicht sein Ortsvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*



3. Der Massenpunkt im Gravitationspotential

Nun wenden wir uns der Kernfrage dieser Fachbereichsarbeit zu: wir werden zuerst das Gravitationskraftfeld als Gradientenfeld des Gravitationspotentials erkennen. Dann werden wir aus dem Newton'schen Gesetz den Energieerhaltungssatz beweisen, und daraus beweisen wir schließlich das Erste Kepler'sche Gesetz; es sagt aus, dass sich die Planeten auf Ellipsenbahnen bewegen. Es wird noch schwierig sein, die Gleichungen, die in sich in Polarkoordinaten ergeben werden, als die der Kegelschnitte zu erkennen.

3.1. Das Gravitationspotential.

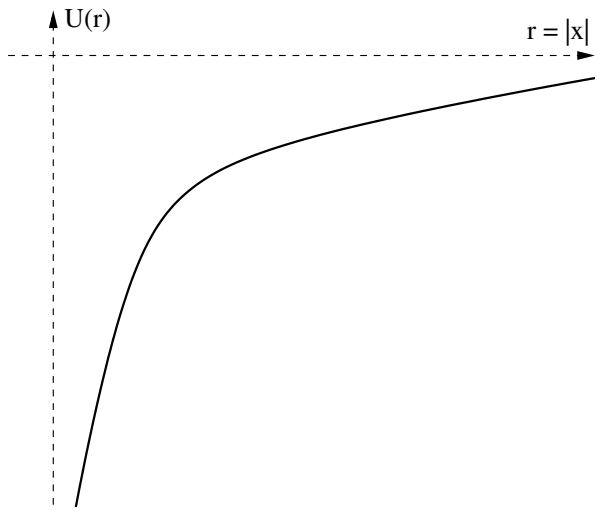
Ein Punkt der Masse M an der festen Stelle $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ übt auf einen Punkt der Masse m (einen sogenannten Aufpunkt), der sich an der Stelle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ befindet, nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz folgende Anziehungskraft aus:

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}, \qquad \text{genauer:} \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = -G\frac{Mm}{({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Dies sagt gerade aus, dass die Anziehungskraft eines Körpers mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt, weil $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ ein Vektor der Länge 1 ist, der von $\mathbf{0}$ in Richtung $\mathbf{x}$ weist (die negative Richtung der Kraftwirkung). G ist die Gravitationskonstante. Wir betrachten nun die Funktion

$$U(\mathbf{x}) = -G\frac{Mm}{|\mathbf{x}|} = -G\frac{Mm}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}}.$$

Da U eine Funktion von $r = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$ ist, kann man ihren Graphen wie folgt veranschaulichen:



Die Funktion U ist eine Potentialfunktion für das Gravitationsvektorfeld $\mathbf{F}$, weil der negative Gradient von U gerade $\mathbf{F}$ ist.

Beweis.

Der Gradient $\operatorname{grad} U(\mathbf{x})$ von U im Punkt $\mathbf{x}$ ist gerade als Vektor der drei partiellen Ableitungen von U definiert:

$$\operatorname{grad} U(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial U}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial U}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Der Gradient zeigt genau in die Richtung des steilsten Anstieges der Funktion U im Punkt $\mathbf{x}$ und seine Länge ist gerade der Wert des Anstieges in dieser Richtung. Für nähere Erklärung des Gradienten siehe Appendix A.5.

Als Beweis differenzieren wir die Funktion

$$U(x_1, x_2, x_3) = -G\frac{Mm}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}} = -GMm({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)^{-\frac{1}{2}}$$

hintereinander nach x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) &= -GMm(-\tfrac{1}{2})({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)^{-\frac{3}{2}} 2x_1 \\ \frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) &= \tfrac{1}{2}GMm({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)^{-\frac{3}{2}} 2x_2 \\ \frac{\partial U}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) &= GMm({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)^{-\frac{3}{2}} x_3 \end{aligned}$$

Also gilt tatsächlich:

$$\begin{aligned} -\operatorname{grad} U(\mathbf{x}) &= -\begin{pmatrix} GMm({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)^{-\frac{3}{2}} x_1 \\ GMm({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)^{-\frac{3}{2}} x_2 \\ GMm({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)^{-\frac{3}{2}} x_3 \end{pmatrix} \\ &= -GMm({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \square \end{aligned}$$

3.2. Der Energieerhaltungssatz.

Der Massenpunkt bewegt sich nur unter dem Einfluss des Kraftfeldes $\mathbf{F}$ auf einer Bahn $\mathbf{x}(t)$, die dem Newton'schen Kraftgesetz $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = m\ddot{\mathbf{x}}(t)$ genügt: Kraft ist Masse mal Beschleunigung (siehe 2.2). Außerdem ist $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U$ (siehe 3.1).

Energieerhaltungssatz. *Dann gilt:*

$$U(\mathbf{x}(t)) + \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t) = c$$

Man interpretiert nun $U(\mathbf{x})$ als potentielle Energie im Punkt $\mathbf{x}$. Weiters ist $\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t) = mv^2/2$ die kinetische Energie. Obiges Resultat ist der Grund für diese in der Physik gewählten Bezeichnungen.

Beweis. Der Ausdruck ist konstant, wenn seine erste Ableitung 0 ist:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(U(\mathbf{x}(t)) + \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)) = \\
=&\frac{\partial U}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_1(t) + \frac{\partial U}{\partial x_2}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_2(t) + \frac{\partial U}{\partial x_3}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_3(t) + \\
&+ \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2 + \dot{x}_3(t)^2\right) = \qquad \text{siehe A.2} \\
=&\frac{\partial U}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_1(t) + \frac{\partial U}{\partial x_2}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_2(t) + \frac{\partial U}{\partial x_3}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_3(t) + \\
&+ \frac{m}{2}\left(2\ddot{x}_1(t)\dot{x}_1(t) + 2\ddot{x}_2(t)\dot{x}_2(t) + 2\ddot{x}_3(t)\dot{x}_3(t)\right) = \\
=&\operatorname{grad} U(\mathbf{x}(t))\cdot\dot{\mathbf{x}}(t) + m\ddot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t) = \\
=&\operatorname{grad} U(\mathbf{x}(t))\cdot\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\cdot\dot{\mathbf{x}}(t) = \\
=&\operatorname{grad} U(\mathbf{x}(t))\cdot\dot{\mathbf{x}}(t) - \operatorname{grad} U(\mathbf{x}(t))\cdot\dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \quad \square
\end{aligned}$$

3.3. Das Erste Kepler'sche Gesetz.

Nun wollen wir versuchen, mit den bisher ermittelten Gesetzen das Erste Kepler'sche Gesetz zu beweisen.

Die Sonne mit Masse M an der festen Stelle $\mathbf{0}$ im $\mathbb{R}^3$ übt auf einen Planeten mit Masse m eine Kraft aus mit Hilfe des Gravitationsfeldes, das der negative Gradient des Gravitationspotentials ist:

$$U(\mathbf{x}) = -G\frac{Mm}{|\mathbf{x}|} = -G\frac{Mm}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}}.$$

Weil es sich um ein zentrales Kraftfeld handelt, ist nach 2.3 der Drehimpuls konstant, und wir können das Koordinatensystem so legen, dass der Drehimpuls in Richtung $(0,0,1)$ zeigt (das entspricht der x_3-Achse). Der Planet bewegt sich dann in der Ebene, die normal auf den Drehimpuls steht: die x_1-x_2-Ebene. Also wird

die Planetenbahn durch $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), 0)$ beschrieben. Wir führen auch Polarkoordinaten ein (siehe A.4):

$$x_1 = r\cos\varphi, \qquad x_2 = r\sin\varphi, \qquad x_3 = 0.$$

Wie wir in 3.2 bewiesen haben, ist entlang der Bahn die Energie konstant (Energieerhaltungssatz):

$$U(\mathbf{x}(t)) + \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t) = -G\frac{Mm}{|\mathbf{x}(t)|} + \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 = \text{ konstant} = -G\frac{Mm}{|\mathbf{x}(0)|} + \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}(0)|^2$$

Wie wir aus der Konstruktion der Polarkoordinaten wissen, ist $r(t) = |\mathbf{x}(t)|$; und wir setzen die Geschwindigkeit $v(t) = |\dot{\mathbf{x}}(t)| = \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2}$.

Lemma. *Dann gilt $v(t)^2 = \dot{r}(t)^2 + r(t)^2\dot{\varphi}(t)^2$ in Polarkoordinaten.*

Beweis. Im Folgenden lassen wir die Variable t weg.

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi \qquad & \dot{x}_1 &= \dot{r}\cos\varphi - r\sin(\varphi)\dot{\varphi} \\ x_2 &= r\sin\varphi \qquad & \dot{x}_2 &= \dot{r}\sin\varphi + r\cos(\varphi)\dot{\varphi} \end{aligned}$$

Und so gilt:

$$\begin{aligned} v^2 = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 &= (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 \\ &= \dot{r}^2\cos^2\varphi - 2r\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + \\ &+ \dot{r}^2\sin^2\varphi + 2r\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi \\ &= \dot{r}^2\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} + r^2\dot{\varphi}^2\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{1} \\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \quad \square \end{aligned}$$

Dann nimmt der Energieerhaltungssatz

$$-G\frac{Mm}{|\mathbf{x}(t)|} + \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 = -G\frac{Mm}{|\mathbf{x}(0)|} + \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}(0)|^2$$

folgende Form an ($v(t) = |\dot{\mathbf{x}}(t)|$, $r(t) = |\mathbf{x}(t)|$):

$$v(t)^2 - 2GM\frac{1}{r(t)} = \gamma, \tag{1}$$

$$\text{wobei} \quad \gamma = v(0)^2 - 2GM\frac{1}{r(0)} = \text{ konstant}\,.$$

Wir suchen die Gleichung der Bahn in der Form $r = r(\varphi)$. Also ist

$$\dot{r}(t) = \frac{d}{dt}r(\varphi(t)) = \frac{dr}{d\varphi}(\varphi(t))\frac{d\varphi}{dt}(t) = \frac{dr}{d\varphi}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)$$

Im Folgenden lassen wir bei $r(\varphi)$ das (φ) weg. Wir erinnern uns, dass in 2.4 gezeigt wurde, dass $r^2\dot\varphi = c$ ist, wobei c der konstante Betrag des Drehimpulses ist; also $\dot\varphi = c/r^2$. Damit folgt aus dem Lemma:

$$v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\dot\varphi\right)^2 + r^2\dot\varphi^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \dot\varphi^2 + r^2\dot\varphi^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \frac{c^2}{r^4} + \frac{c^2}{r^2}$$

Dies setzen wir in (1) ein:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \frac{c^2}{r^4} + \frac{c^2}{r^2} - 2GM\frac{1}{r} = \gamma$$

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\gamma}{c^2} + \frac{2GM}{c^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \tag{2}$$

r kann nie 0 werden, weil wir nur Bahnen von Planeten untersuchen, die nicht in die Sonne stürzen sollen. Daher können wir substituieren:

$$u := \frac{1}{r}, \qquad u(\varphi) := \frac{1}{r(\varphi)}, \qquad \text{also:} \qquad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$$

Damit wird die Gleichung (2) zu:

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{\gamma}{c^2} + \frac{2GM}{c^2}u - u^2 \qquad \text{wo wir erweitern:}\\ &= \frac{G^2M^2}{c^4} + \frac{\gamma}{c^2} - \left(u - \frac{GM}{c^2}\right)^2\\ &= \frac{G^2M^2}{c^4}\left(1 + \frac{\gamma c^2}{G^2M^2}\right) - \left(u - \frac{GM}{c^2}\right)^2 \qquad (3)\end{aligned}$$

Nun setzen wir

$$p := \frac{c^2}{GM} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon := \sqrt{1 + \frac{\gamma c^2}{G^2M^2}} \tag{4}$$

p und ε werden so gewählt, dass sie später mit den Parametern der Kegelschnitte übereinstimmen (siehe 3.5). Somit erhalten wir für (3):

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2 \tag{5}$$

Wir analysieren nun Gleichung (5): ist $\varepsilon = 0$, so folgt:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -\left(u - \frac{1}{p}\right)^2$$

Die linke Seite ist ≥ 0, die rechte Seite ≤ 0; das heißt, beide Seiten müssen 0 sein, und somit ist $u = 1/p$. Also gilt weiters: $r = 1/u = p$ (konstant). Der Planet bewegt sich auf einem Kreis.

Es bleibt nur noch der Fall über, dass $\varepsilon > 0$ ist. Wir ziehen aus der Gleichung (5) die Quadratwurzel:

$$\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2} \tag{6}$$

$$d\varphi = \frac{du}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2}}$$

$$\varphi + C = \int d\varphi = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2}}$$

Um dieses Integral aufzulösen, verwenden wir die Substitution $w = u - \frac{1}{p}$, also $du = dw$, da p konstant ist:

$$\varphi + C = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2}} = \int \frac{dw}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - w^2}}$$

$$= \frac{p}{\varepsilon} \int \frac{dw}{\sqrt{1 - \left(\frac{pw}{\varepsilon}\right)^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

wobei wir zum Schluss die Substitution $z = \frac{pw}{\varepsilon}$, also $dz = \frac{p}{\varepsilon} dw$ verwendet haben. Dieses letzte Integral ist ein Grundintegral, und damit erhalten wir

$$\varphi + C = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$= \arcsin(z) = \arcsin\left(\frac{pw}{\varepsilon}\right) = \arcsin\left(\frac{p(u - \frac{1}{p})}{\varepsilon}\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{pu - 1}{\varepsilon}\right).$$

Weil arcsin die Umkehrfunktion von sin ist, erhalten wir:

$$\sin(\varphi + C) = \frac{pu - 1}{\varepsilon}$$

$$u = \frac{1 + \varepsilon \sin(\varphi + C)}{p}$$

$$r = \frac{1}{u} = \frac{p}{1 + \varepsilon \sin(\varphi + C)}$$

Dies stellt den Radius r als Funktion des Winkels φ dar.Wir legen den frei wählbaren Integrationsparameter C so fest, dass der Abstand des Planeten von der Sonne seinen minimalen Wert (=Perihel) $\frac{p}{1+\varepsilon}$ für $\varphi = 0$ erreicht, also so, dass $\sin(C) = 1$ oder $C = \frac{\pi}{2}$ ist. Nun ist aber $\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos\varphi$; damit erhalten wir die *Gleichung der Planetenbahn*:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \tag{7}$$

3.4. Satz. Kegelschnitte in Polarkoordinaten.

Die Gleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \qquad \text{mit } p > 0, \quad \varepsilon \geq 0$$

beschreibt einen Kegelschnitt in Polarkoordinaten, wobei der Brennpunkt im Ursprung ist. Dabei handelt es sich um:

(1) *Einen Kreis, falls* $\varepsilon = 0$.
(2) *Eine Ellipse, falls* $0 \leq \varepsilon < 1$.
(3) *Eine Parabel, falls* $\varepsilon = 1$.
(4) *Einen Hyperbelast, falls* $\varepsilon > 1$.

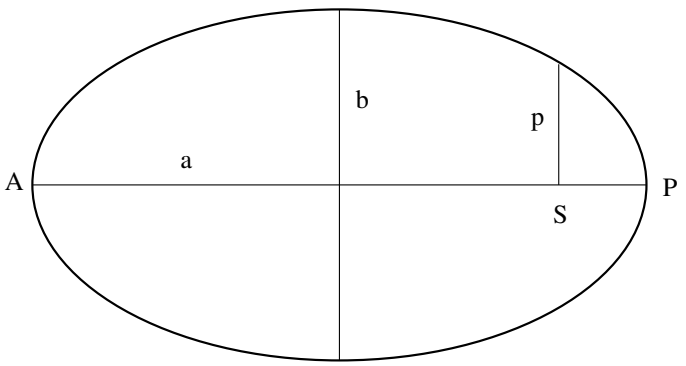
Der Beweis folgt in 3.6.

3.5. Interpretation.

Wie wir im Satz 3.4 angenommen haben, wird durch die Gleichung 3.3(7) ein Kegelschnitt K beschrieben, wenn man den einen Brennpunkt von K als Nullpunkt des Koordinatensystems wählt. K ist eine Ellipse, Parabel oder ein Hyperbelast, je nachdem ob ε kleiner, gleich oder größer als 1 ist. Da sich aber die Planeten auf geschlossenen Bahnen bewegen, muss es sich bei dem Kegelschnitt um eine Ellipse handeln, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht; das ist gerade das Erste Kepler'sche Gesetz.

Nun diskutieren wir das wechselseitige Verhältnis von a, b und ε, p; Beweise folgen in 3.6.

Sei S (die Sonne) ein Brennpunkt der Bahnellipse und a bzw. b die Länge ihrer großen bzw. kleinen Halbachse.



Die Punkte A und P sind *Aphel* (der Punkt größter Sonnenferne) und *Perihel* (der Punkt größter Sonnennähe) des Planeten; p ist der sogenannte *Halbparameter* der Ellipse. Seine physikalische Bedeutung wird durch 3.3(4) erklärt, und mit den Halbachsen a und b steht er durch folgende Gleichung in Beziehung, wie wir in 3.6 sehen werden:

$$p = \frac{b^2}{a}$$

Die Größe ε in 3.3(7) ist geometrisch die *numerische Exzentrizität* der Ellipse und wird beschrieben durch:

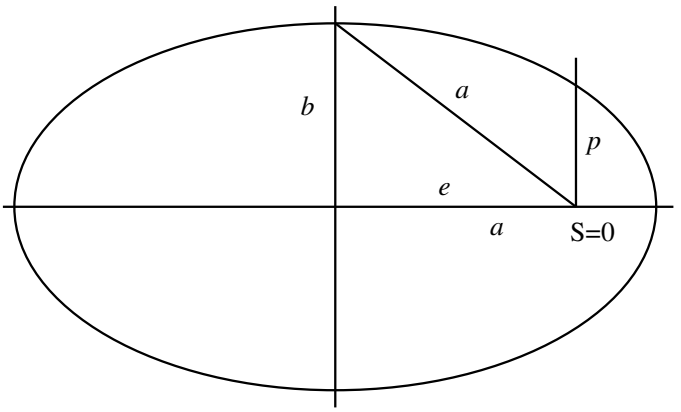
$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{e}{a},$$

wobei $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ die *lineare Exzentrizität* der Ellipse genannt wird. Aus $\varepsilon < 1$ und 3.3(4) folgt, dass $\gamma < 0$ ist. Die Gesamtenergie des Planeten (die Summe seiner kinetischen und potentiellen Energie), $\gamma \frac{m}{2}$, ist daher notwendigerweise negativ.

3.6. Beweis des Satzes 3.4.

Der Fall, dass $\varepsilon = 0$ ist und der Himmelskörper somit einer Kreisbahn folgt, wurde in 3.3 zur Genüge analysiert. Ausserdem ist dies ein Spezialfall der **Ellipse**, die wir nun diskutieren wollen.

Zuerst verschieben wir die Ellipse mit der Gleichung ${x_1}^2/a^2 + {x_2}^2/b^2 = 1$ (wobei $a \geq b > 0$) so weit, bis der rechte Brennpunkt, das heißt die Sonne, im Ursprung des Koordinatensystems steht. Es muss deshalb der rechte Brennpunkt sein, weil wir am Ende von 3.3 angenommen haben, dass der Abstand des Planeten von der Sonne seinen minimalen Wert bei $\varphi = 0$ erreicht.



Der rechte Brennpunkt der Ellipse hat die Koordinaten $(e, 0)$ mit $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Somit ergibt sich die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{(x_1 + e)^2}{a^2} + \frac{{x_2}^2}{b^2} = 1$$

Nun substituieren wir in der neuen Gleichung $x_1 = r\cos\varphi$ und $x_2 = r\sin\varphi$:

$$\frac{(r\cos\varphi + e)^2}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1$$

Nach Ausmultiplizieren und der Substitution $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ erhalten wir:

$$b^2r^2\cos^2\varphi + 2b^2r\sqrt{a^2 - b^2}\cos\varphi + a^2b^2 - b^4 + \underbrace{a^2r^2(1 - \cos^2\varphi)}_{a^2r^2 - a^2r^2\cos^2\varphi} = a^2b^2$$

$$(b^2 - a^2)r^2\cos^2\varphi + 2b^2r\sqrt{a^2 - b^2}\cos\varphi + a^2r^2 - b^4 = 0$$

Nun wenden wir die große Auflösungsformel für die quadratische Gleichung der Form $Ax^2 + Bx + C = 0$ an:

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{-2b^2r\sqrt{a^2-b^2} \pm \sqrt{4b^4r^2(a^2-b^2)+4(a^2-b^2)r^2(a^2r^2-b^4)}}{-2(a^2-b^2)r^2}\\ &= \frac{-2b^2r\sqrt{a^2-b^2} \pm 2\sqrt{a^2-b^2}r\sqrt{b^4+a^2r^2-b^4}}{-2(a^2-b^2)r^2}\\ &= \frac{-2b^2re \pm 2r^2ea}{-2r^2e^2}\end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

$$\cos\varphi = \frac{b^2}{re} \pm \frac{a}{e}, \qquad \text{und weiters:} \qquad \frac{b^2}{re} = \cos\varphi \pm \frac{a}{e}$$

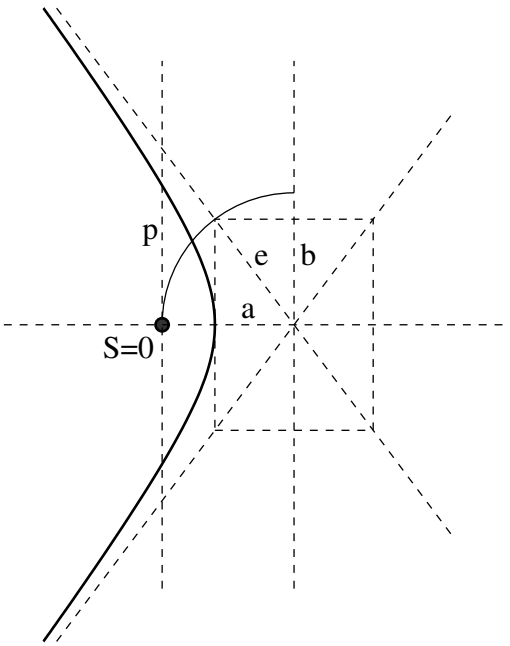
$$r = \frac{b^2}{e(\cos\varphi \pm \frac{a}{e})} = \frac{b^2}{e\frac{a}{e}(\pm 1 + \frac{e}{a}\cos\varphi)} = \frac{\frac{b^2}{a}}{\pm 1 + \frac{e}{a}\cos\varphi}$$

Nun setzen wir $p = b^2/a$ und $0 \leq \varepsilon = \sqrt{1-b^2/a^2} = e/a \leq 1$ und erhalten (da $r \geq 0$ ist, können wir ± 1 durch $+1$ ersetzen):

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

Wir haben nun bewiesen, dass es sich bei der Planetenbahn um eine Ellipse handelt, wenn $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ist.

Als zweiten Fall betrachten wir nun die **Hyperbel**, die durch ${x_1}^2/a^2 - {x_2}^2/b^2 = 1$ gegeben ist. Sie wird wie die Ellipse vorher verschoben, bis der linke Brennpunkt, das heißt die Sonne, im Ursprung des Koordinatensystems steht. Wir wählen deshalb den linken Brennpunkt, weil wir am Ende von 3.3 angenommen haben, dass der Abstand des Planeten von der Sonne seinen minimalen Wert bei $\varphi = 0$ erreicht.



Der linke Brennpunkt der Hyperbel hat die Koordinaten $(-e, 0)$ mit $e = \sqrt{a^2 + b^2}$. So gilt:

$$\frac{(x_1 - e)^2}{a^2} - \frac{{x_2}^2}{b^2} = 1$$

Wir substituieren $x_1 = r\cos\varphi$ und $x_2 = r\sin\varphi$:

$$\frac{(r\cos\varphi - e)^2}{a^2} - \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1$$

Nach Ausmultiplizieren und der Substitution $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ erhalten wir:

$$b^2r^2\cos^2\varphi - 2b^2r\sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi + a^2b^2 + b^4 - a^2r^2(1-\cos^2\varphi) = a^2b^2$$
$$(b^2 + a^2)r^2\cos^2\varphi - 2b^2r\sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi + b^4 - a^2r^2 = 0$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung in $\cos\varphi$ ist:

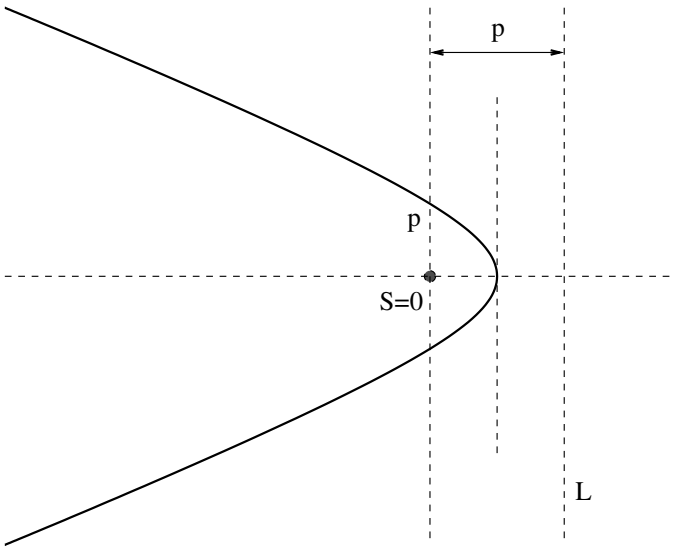
$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{2b^2r\sqrt{a^2+b^2} \pm \sqrt{4b^4r^2(a^2+b^2) - 4(a^2+b^2)r^2(b^4 - a^2r^2)}}{2(a^2+b^2)r^2}\\ &= \frac{2b^2r\sqrt{a^2+b^2} \pm 2\sqrt{a^2+b^2}r\sqrt{b^4 + a^2r^2 - b^4}}{2(a^2+b^2)r^2}\\ &= \frac{2b^2re \pm 2r^2ea}{2r^2e^2}\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dieselbe wie bei der Ellipse.
Für $p = b^2/a$ und $\varepsilon = \sqrt{1 + b^2/a^2} = e/a > 1$ gilt:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

Für $\varepsilon > 1$ ist die Planetenbahn ein Hyperbelast.

Als letztes behandeln wir die **Parabel** ${x_2}^2 = -2px_1$ in dritter Hauptlage mit Brennpunkt $(-p/2, 0)$, weil der minimale Abstand bei $\varphi = 0$ ist.



Wir nehmen wieder den Brennpunkt als Ursprung an und haben somit die Gleichung

$$x_2{}^2 = -2p(x_1 - \frac{p}{2}) = -2px_1 + p^2,$$

in die wir zum dritten Mal $x_1 = r\cos\varphi$ und $x_2 = r\sin\varphi$ substituieren:

$$r^2(1-\cos^2\varphi) = -2pr\cos\varphi + p^2$$
$$r^2\cos^2\varphi - 2pr\cos\varphi + p^2 - r^2 = 0$$
$$\cos\varphi = \frac{2pr \pm \sqrt{4p^2r^2 - 4r^2(p^2-r^2)}}{2r^2} = \frac{p \pm r}{r} = \frac{p}{r} \pm 1$$
$$r = \frac{p}{1+\cos\varphi} \qquad > 0$$

Bei der Parabel ist also $\varepsilon = 1$. □

3.7. Das Dritte Kepler'sche Gesetz.

Sind T_1 und T_2 die Umlaufszeiten zweier Planeten mit den großen Bahnhalbachsen a_1 und a_2, so gilt:

$$\frac{{T_1}^2}{{T_2}^2} = \frac{{a_1}^3}{{a_2}^3}, \qquad \textit{oder} \qquad \frac{{T_1}^2}{{a_1}^3} = \frac{{T_2}^2}{{a_2}^3}$$

Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich also wie die Kuben der großen Halbachsen.

Beweis. Es seien a die große und b die kleine Halbachse einer elliptischen Planetenbahn. Der Flächeninhalt dieser Bahnellipse ist durch $ab\pi$ gegeben:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$
$$\text{Fläche(Ellipse)} = 4\int_{x=0}^{x=a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx \qquad \text{Substitution: } x = au, dx = a\,du$$
$$= 4b\int_{u=0}^{u=1} \sqrt{1-u^2}\,a\,du$$
$$= 4ab\cdot \text{ Fläche(Viertelkreis)} = ab\pi, \text{ weil}$$
$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \sqrt{1-x^2}$$

Nach 2.4 ist diese Fläche aber auch $\frac{c}{2}T$, wobei $c = \dot{r}\varphi$ das Drehmoment der Planetenbewegung und T die Umlaufszeit ist. Also gilt:

$$\frac{c}{2}T = ab\pi$$

In 3.3, (4) hatten wir $p := \frac{c^2}{GM}$ und $\varepsilon := \sqrt{1 + \frac{\gamma c^2}{G^2M^2}}$; außerdem haben wir in 3.6 gesehen, dass $p = b^2/a$ ist. Damit:

$$ab\pi = \pi a\sqrt{a}\frac{b}{\sqrt{a}} = \pi a\sqrt{a}\sqrt{p} = \pi a\sqrt{a}\frac{c}{\sqrt{GM}}.$$

Also:

$$\frac{c}{2}T = ab\pi = \pi a\sqrt{a}\frac{c}{\sqrt{GM}}, \qquad T = \frac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{GM}}.$$

Daher ist

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{(2\pi)^2}{GM} = \text{eine planetenunabhängige Konstante.} \quad \square \tag{1}$$

4. Bahndaten

4.1. Berechnung von Entfernungen und Massen.

Am Ende der Behandlung des Zweikörperproblems wollen wir noch kurz schildern, wie man mit Hilfe des Newton'schen Gravitationsgesetzes und der Kepler'schen Bahngesetze Entfernungen und Massen im Sonnensystem berechnen kann.

Die Gravitationskonstante G lässt sich experimentell im Laboratorium bestimmen; zum ersten Mal wurde dies von *Henry Cavendish* (1731-1810) im Jahre 1797 durchgeführt. Die Beschreibung des Experimentes folgt in 4.2.

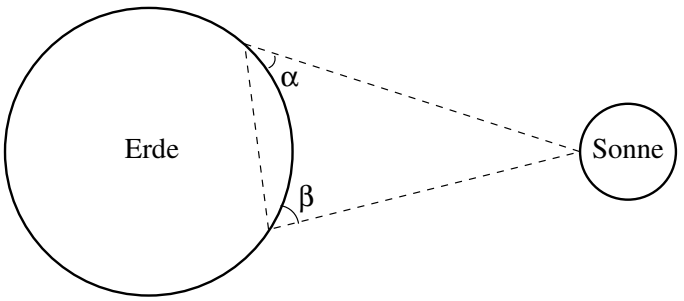
Ist nun m die Masse der Erde und μ etwa die Masse eines Körpers auf der Erdoberfläche, so gilt nach 3.1:

$$G\frac{m\mu}{R^2} = \mu g \qquad R \text{ der Erdradius, } g \text{ die Konstante der Erdbeschleunigung.}$$

Die Erdmasse m lässt sich aus $m = gR^2/G$ leicht berechnen, da

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\, Nm^2kg^{-2}, \quad g = 9,81\, ms^{-2}, \quad R = 6378\, km$$

bekannte Werte sind; als runder Wert ergibt sich für die Erdmasse $6 \cdot 10^{24}\, kg$. Unter der mittleren Entfernung des Planeten von der Sonne versteht man die Länge seiner großen Halbachse. Mit Hilfe elementartrigonometrischer Rechnungen und Winkelmessungen kann man die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne bestimmen; sie beträgt etwa $1,497 \cdot 10^{11}\, m$. Die folgende Skizze stellt nur eine der Möglichkeiten der Berechnung dar:



Da auch die Umlaufszeit der Erde bekannt ist, lässt sich nun aus 3.7(1) die Sonnenmasse M berechnen; man erhält $M \sim 1.99 \cdot 10^{30} kg$. Die Sonnenmasse ist also rund 300000mal größer als die Erdmasse.

Aus 3.7 folgt die Gleichung

$$a_2 = a_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Wir brauchen hier für a_1 und T_1 nur die Daten der Erde einzusetzen, um die mittlere Sonnenentfernung a_2 jedes anderen Planeten aus seiner Umlaufszeit T_2 berechnen zu können; T_2 lässt sich von der Erde aus messen.

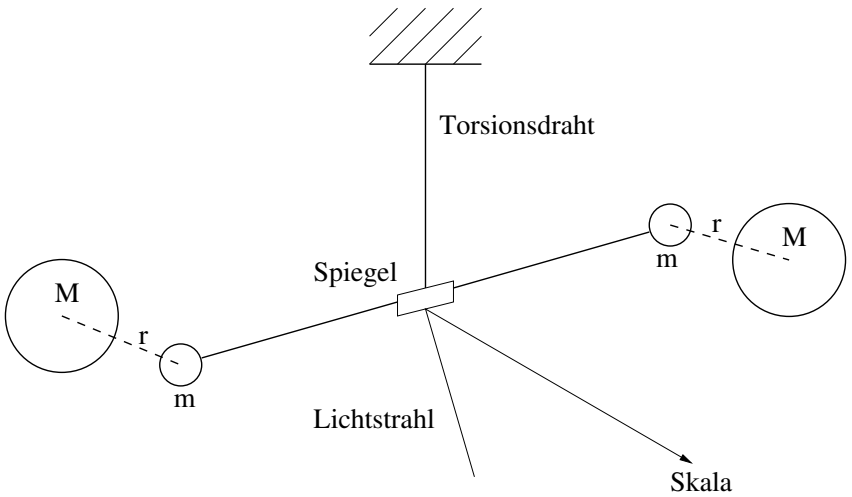
Besitzt ein Planet einen Satelliten ('Mond'), so verläuft dessen Bewegung natürlich ebenfalls nach den Kepler'schen Gesetzen. Von der Erde aus kann man die Umlaufzeit T des Satelliten und seine mittlere Entfernung a von dem Mutterplaneten messen; aus 3.7(1) (angewandt auf das System Planet–Mond) lässt sich dann sofort die Masse m des Planeten bestimmen.

4.2. Die Bestimmung der Gravitationskonstante.

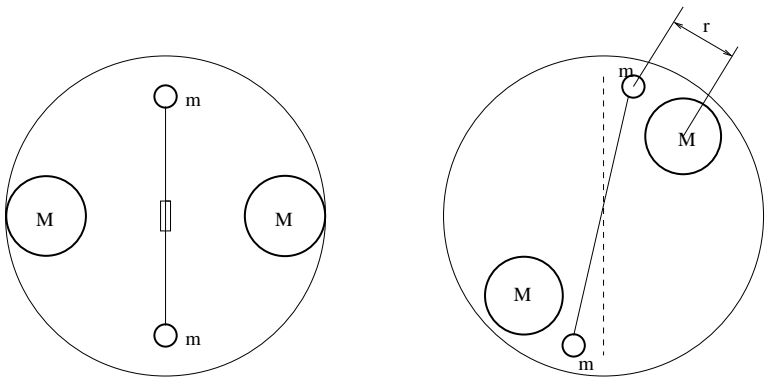
Die Gravitationskonstante G kann aus astronomischen Beobachtungen nicht ermittelt werden; für zwei Himmelskörper müssten alle Größen, die im Gravitationsgesetz

$$F = G\frac{m_1\, m_2}{r^2}$$

auftreten, bestimmt werden. Im Laboratorium hingegen kann mit gegebenen Massen m_1, m_2 und r, dem Zentralabstand kugelförmiger Körper, die außerordentlich geringe Gravitationskraft ermittelt werden. Dies gelang erstmals *Henry Cavendish* im Jahre 1797 mit einer Drehwaage: eine leichte Stange, die zwei kleine Kugeln mit Masse m verbindet, wird an einem dünnen Faden drehbar aufgehängt.



Um durch Luftbewegungen entstehende Ungenauigkeiten zu vermeiden, befindet sich die Drehwaage in einem luftdichten Glaskasten. Nachdem sie zur Ruhe gekommen ist, bringt man außerhalb des Kastens zwei große Kugeln der Masse M bis auf den Abstand r an die beiden kleinen Kugeln heran. Durch die Anziehungskraft der großen Kugeln fallen die kleinen auf sie zu.



Die linke Skizze zeigt die Versuchsanordnung in Nullstellung, die rechte zeigt die Verdrehung durch die Massenanziehung. Aus der Differenz ergibt sich die zwischen den Kugeln wirkende Gravitationskraft F; der Abstand der Massenmittelpunkte und die Massen sind leicht messbar. Somit kann G berechnet werden:

$$F = G\frac{m_1\, m_2}{r^2} \qquad \text{mit} \qquad G = 6,67 \cdot 10^{-11}\, m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

Die Gravitationskonstante G gibt die Kraft an, die zwischen zwei Punktmassen von je 1 kg im Abstand von 1 m wirkt. Sie ist außerordentlich klein. Nur Körper mit sehr großer Masse, wie etwa die Erde, bewirken eine deutlich merkbare Massenanziehung.

4.3. Bahndaten des Sonnensystems.

Zur Vervollständigung folgen hier noch die Charakteristiken der Planetenorbits (aus *The New Solar System* [1], p. 388):

Planet	Mittlerer Abstand zur Sonne ($10^6 km$)	Umlaufzeit (Jahre)	Mittl. Bahngeschwindigkeit(km/s)	Exzentrizität ε	Bahnneigung (Grad)
Merkur	57,91	0,24084	47,87	0,206	7,00
Venus	108,21	0,61518	35,02	0,007	3,39
Erde	149,60	0,99998	29,79	0,017	0,00
Mars	227,94	1,88071	24,13	0,093	1,85
Jupiter	778,30	11,85652	13,07	0,048	1,30
Saturn	1429,39	29,42352	9,67	0,056	2,49
Uranus	2875,04	83,7474	6,83	0,046	0,77
Neptun	4504,50	163,7232	5,48	0,009	1,77
Pluto	5915,80	248,021	4,75	0,249	17,14

5. Das restringierte Dreikörperproblem

Wir haben in den letzten Kapiteln dieser Arbeit gesehen, dass man die Bahnen zweier Planeten ohne weiteres mit Hilfe des Gravitationsgesetzes und mit den Kepler'schen Gesetzen beschreiben kann. Ist es aber auch möglich, die Bahnen von n interagierenden Körpern zu berechnen?

Angenommen, wir kennen die präzisen Koordinaten und Geschwindigkeiten von n Planeten zu einem bestimmten Zeitpunkt. Weiters setzen wir voraus, dass auf jeden Planeten dieses Systems nur die Anziehungskraft der anderen $n-1$ Koïper wirkt. Nun wollen wir die folgenden Positionen und daraus schließlich die Bahnen der Planeten berechnen.

Als Wissenschaftler Systeme mit mehr als zwei Körpern untersuchten, stießen sie auf große mathematische Schwierigkeiten. Nicht einmal für das Dreikörperproblem existiert eine allgemeine Lösung; auch heute, nach 250 Jahren weltweiter Forschung, kann es mit bekannten mathematischen Methoden nur approximativ gelöst werden. Deswegen verdient das n-Körper-Problem (wie es heute allgemein genannt wird) die Aufmerksamkeit der Mathematiker. Ein weiterer Grund für die Beschäftigung mit diesem Fall ist seine immense Bedeutung für das Verständnis der Himmelsmechanik und für die Raumfahrt.

Zur Zeit existieren einige Methoden der approximativen Berechnung der Bahnen mehrerer Planeten für eine begrenzte Zeitspanne und der Bahnen jedes spezifischen Planetensystems, sofern dieses System einige Anfangsbedingungen erfüllt. Die Effektivität und Zuverlässigkeit dieser Methoden wurden oft genug bewiesen - zum Beispiel bei der Berechnung der Bahnen von Shuttles und Satelliten; mit ihrer Hilfe entdeckten John Adams und Urbain Leverrier auch den Planeten Neptun.

5.1. Das Problem von Lagrange.

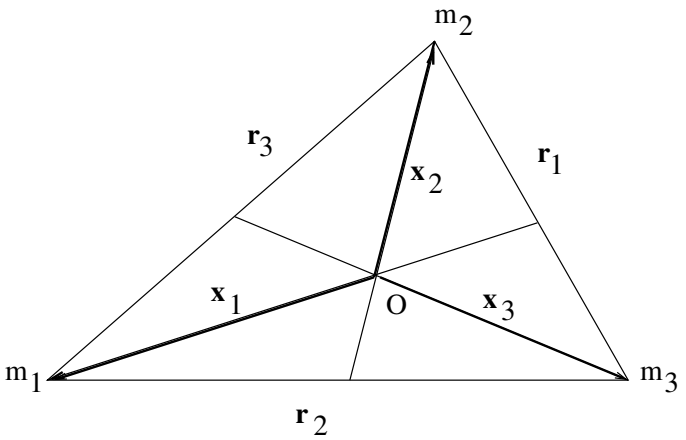
Die exakte Lösung des n-Körper-Problems ist also bislang nicht bekannt. Dennoch fand der französische Mathematiker *Joseph Louis Lagrange* vor 200 Jahren die exakten Gleichungen für ein Dreikörpersystem, das einige spezifische Anfangsbedingungen vorweist. Bis heute sind diese Gleichungen (genannt die Lagrange-Gleichungen) die einzigen bekannten Lösungen für das Problem.

Wir betrachten drei Körper, die sich nicht auf derselben Bahn befinden und sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit auf konzentrischen Kreisen bewegen; ihre Bahnen liegen in einer Ebene. Diese Körper können nun als Punkte einer imaginären festen Figur, die um eine bewegungslose Achse rotiert, angesehen werden. Diese Achse geht durch das gemeinsame Zentrum der konzentrischen Kreise, die die Orbits der Planeten bilden.

An welchen Planetenpositionen ist diese Bewegung möglich? Wie groß muss die Winkelgeschwindigkeit der imaginären festen Figur sein, damit die Stabilität des Systems erhalten bleibt? Wir werden nun die Überlegungen von Lagrange nachvollziehen.

5.2. Das Dreieck der Massen.

Drei Körper mit den Massen m_1, m_2 und m_3 rotieren auf konzentrischen Kreisen mit dem gemeinsamen Zentrum im Schwerpunkt O. Wir bezeichnen die Ortsvektoren der Körper mit $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3$ und die Abstandsvektoren der Körper voneinander mit $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_3$, wie in der folgenden Skizze:



Die Beschleunigung jedes einzelnen Körpers resultiert nun aus der Anziehungskraft der zwei anderen, ist also durch die Vektorsumme der jeweiligen gravitationellen Anziehungen $\mathbf{F}$ bestimmt. Somit erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} &= m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1, \\ \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} &= m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2, \\ \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} &= m_3 \ddot{\mathbf{x}}_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Anziehungskraft, die der Körper m_j auf den Körper m_i ausübt, ist durch die Formel

$$|\mathbf{F}_{ij}| = G\frac{m_i m_j}{{r_{ij}}^2}$$

gegeben. Da wir als Ausgangsbedingung angenommen haben, dass sich alle drei Körper mit der selben Winkelgeschwindigkeit fortbewegen, gilt nach Definition

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \mathbf{x}$$

für jeden der drei beteiligten Himmelskörper:

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 = -\omega^2 \mathbf{x}_1, \qquad \ddot{\mathbf{x}}_2 = -\omega^2 \mathbf{x}_2, \qquad \ddot{\mathbf{x}}_3 = -\omega^2 \mathbf{x}_3.$$

Nun addieren wir die Gleichungen des Systems (1):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} &= m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 + m_3 \ddot{\mathbf{x}}_3 \\ &= -\omega^2 (m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2 + m_3 \mathbf{x}_3) \end{aligned}$$

Das Dritte Newton'sche Gesetz besagt, dass die Summe aller inneren Kräfte in einem geschlossenen System null ist. Als Formel kann dies so beschrieben werden:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{F}_{ji} = 0,$$

da $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ ist. Somit erhalten wir

$$m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2 + m_3\mathbf{x}_3 = 0, \tag{2}$$

weil $\omega \neq 0$ ist. Diese Gleichung beschreibt die Position des Mittelpunktes der Umdrehung: er liegt im Punkt O, sodass die Radiusvektoren der Körper m_1, m_2 und m_3 die Gleichung (2) erfüllen. Nun führen wir noch die Vektoren $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_3$ ein (siehe Skizze). Es gilt:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{r}_3 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_3 + \mathbf{r}_2. \tag{3}$$

Als nächstes wollen wir $\mathbf{x}_1$ durch $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_3$ ausdrücken. Wir addieren also die erste Gleichung von (3) mit m_2, die zweite mit m_3 und addieren die resultierenden Gleichungen:

$$m_2\,\mathbf{x}_1 + m_3\,\mathbf{x}_1 = m_2\,\mathbf{x}_2 + m_2\,\mathbf{r}_3 + m_3\,\mathbf{x}_3 + m_3\,\mathbf{r}_2$$

Aus Gleichung (2) folgt, dass $m_2\,\mathbf{x}_2 + m_3\,\mathbf{x}_3 = -m_1\,\mathbf{x}_1$ ist, und so erhalten wir

$$(m_1 + m_2 + m_3)\,\mathbf{x}_1 = m_2\,\mathbf{r}_3 + m_3\,\mathbf{r}_2$$

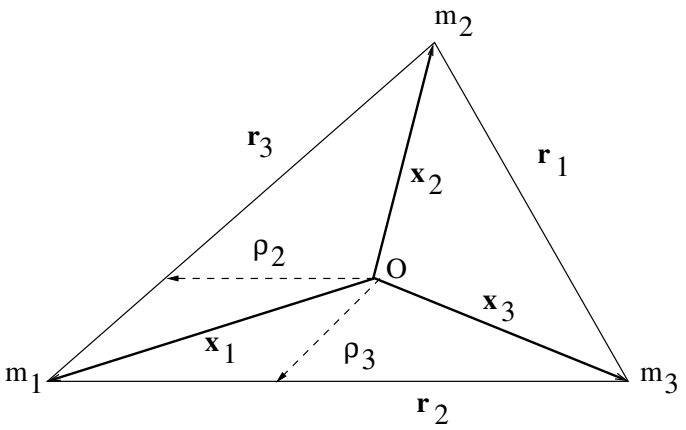
und weiters

$$\mathbf{x}_1 = \frac{m_2\,\mathbf{r}_3 + m_3\,\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

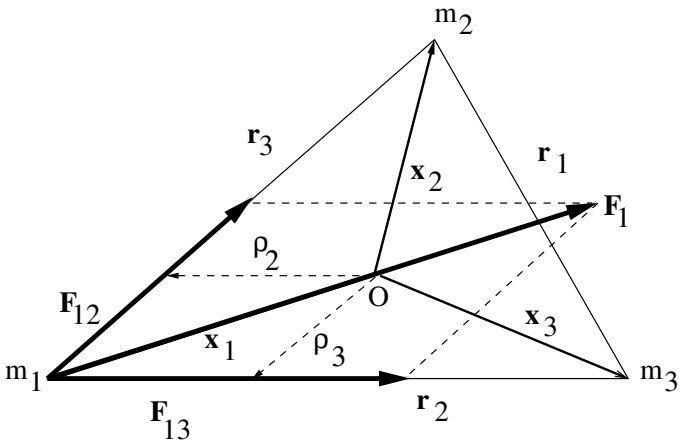
Daher ist der Vektor $\mathbf{x}_1$ die Summe der zwei Vektoren

$$\rho_2 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\mathbf{r}_2 \qquad \text{und} \qquad \rho_3 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\mathbf{r}_3$$

Diese beiden Vektoren sind zu den Seiten $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_3$ des Dreiecks der Massen parallel.



Zuletzt betrachten wir noch die Vektoren der Kräfte, die auf den Körper m_1 wirken. $\mathbf{F}_{12}$ ist hierbei die Kraft, die von m_2 auf ihn wirkt, $\mathbf{F}_{13}$ die Anziehungskraft von m_3.



Die Vektoren $\mathbf{F}_{12}$ und $\mathbf{F}_{13}$ führen entlang der Seiten $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_3$ des Massendreiecks. Der Kraftvektor $\mathbf{F}_1$, der sich aus ihnen ergibt, ist parallel zum Vektor $\mathbf{x}_1$ und zeigt in Richtung des Punktes O; das heißt, der Beschleunigungsvektor des Körpers m_1 zeigt zum Zentrum der Umdrehung.

Nun sehen wir, dass das Kräfteparallelogramm jenem, das von den Vektoren ρ_2 und ρ_3 aufgespannt wird, ähnlich ist. Daher gilt das Verhältnis

$$|\mathbf{F}_{12}| : |\rho_3| = |\mathbf{F}_{13}| : |\rho_2|.$$

Nun verwenden wir Newtons Gravitationsgesetz $|\mathbf{F}| = G(m_1\, m_2)/|\mathbf{x}|^2$ und die für ρ_2 und ρ_3 bereits bekannten Ausdrücke und erhalten:

$$G\,\frac{m_1\, m_2}{|\mathbf{r}_3|^2} : \frac{m_2}{m_1\, m_2\, m_3}\,|\mathbf{r}_3| \quad = \quad G\,\frac{m_1\, m_3}{|\mathbf{r}_2|^2} : \frac{m_3}{m_1\, m_2\, m_3}\,|\mathbf{r}_2|$$

Diese Gleichung ergibt aufgelöst schlußendlich $|\mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_3|$.

Führt man diese Prozedur nun auch für die Massen m_2 und m_3 durch, so erhält man gleichermaßen die Gleichungen $|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_3|$ und $|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2|$.

Unser Endergebnis $|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_3|$ zeigt nun, dass es sich bei der Konfiguration der drei Körper um ein gleichseitiges Dreieck handelt. Somit ist auch das Dreikörperproblem unter bestimmten Umständen lösbar.

5.3. Die gravitationelle Falle.

Am 2. Februar 1906 entdeckte der deutsche Astronom *Maximilian Wolf* den *Asteroiden Achilles*. Zu seiner Überraschung stimmt nicht nur die Winkelgeschwindigkeit des Asteroiden mit dem des Jupiter überein (nämlich $13\,km/s$), sondern auch sein

Orbit: beide Himmelskörper folgen einer kreisähnlichen Bahn. Jupiter und Achilles teilen sich demnach einen Orbit um die Sonne.

Bewegt sich ein Planet der Masse m in einem Orbit mit Radius r um die Sonne, so wird er mit der Kraft

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

von der Sonne angezogen. Weil sich der Planet mit konstanter Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r bewegt, hat er die Winkelgeschwindigkeit $\omega = v/r$ und erfährt die Zentripetalbeschleunigung $a = r\omega^2 = v^2/r$, die der Zentrifugalkraft entgegenwirkt (siehe *Physik für Hochschulanfänger*, [11]) Also:

$$G\frac{Mm}{r^2} = F = m\,a = \frac{m\,v^2}{r}.$$

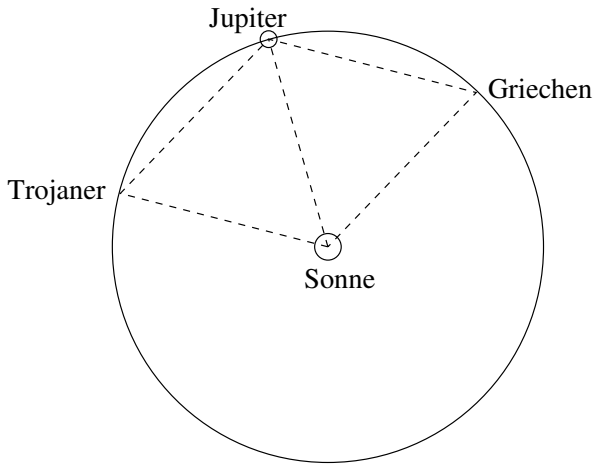
Daher hängt der Radius der Umlaufbahn

$$r = G\frac{M}{v^2}$$

nicht von der Masse des Körpers, sondern nur von seiner Geschwindigkeit ab.

Auch die Frage, ob die orbitalen Ebenen der beiden Körper zueinander geneigt wären, war bald beantwortet; Achilles bewegt sich wirklich auf der selben Bahn wie Jupiter und eilt diesem um 55.5^o voraus. Diese Konstellation erinnert an das Dreieck von Lagrange: die Sonne, Jupiter und Achilles bilden ein fast gleichseitiges Dreieck, das sich um einen der Eckpunkte, die Sonne, bewegt.

Später entdeckte man weitere Asteroiden an den Eckpunkten zweier gleichseitiger Dreiecke mit gemeinsamer Sonne - Jupiter - Basis. Man nannte die fünf Asteroiden, die die 'Nachhut' bilden, *Trojaner*, während die 'Vorhut' aus zehn *Griechen* besteht.



Die Griechen sind relativ grosse Asteroiden, und der größte, Patroklus, hat einen Durchmesser von 216 km; die Durchmesser der meisten anderen liegen unter 100 km.

Im Jahre 1959 entdeckte der polnische Astronom *Pan Kordylevsky* Staubwolken, die den dritten Eckpunkt im Dreieck Erde - Mond bilden; sie fielen in die gravitationelle Falle, die ihnen die zusammenwirkenden Anziehungskräfte von Erde und Mond gestellt hatten.

5.4. Die Stabilität der Bewegung.

Es gibt allerdings noch eine mögliche Lösung des restringierten Dreikörperproblems: drei Körper können gemeinsam als ein Eckpunkt des Dreiecks rotieren. Eine derartige Konfiguration ist jedoch sehr instabil. Weicht ein Körper auch nur geringfügig von seiner Bahn ab, wird das Gleichgewicht der Kräfte gestört, und diese Konstellation kann nicht von langer Dauer sein.

Folgende Tatsachen werden wir nicht mehr beweisen, wir führen sie nur des Interesses halber an.

Ist die Dreieckskonfiguration gravitationeller Körper stabil? Nun, nicht immer. *Gachot* formulierte als Erster im Jahre 1843 die Stabilitätsbedingungen des Dreiecks von Lagrange. Er zeigte, dass die Konfiguration nur dann stabil sein kann, wenn das Verhältnis m_1/m_2 klein genug ist; dies wird durch die Massen der zwei grossen Körper, die die Basis des Dreiecks bilden, bedingt. Weiters gilt:

$$\frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1 m_2} > 27.$$

Ist die Masse eines Partikels also viel kleiner als m_1 und m_2 und bewegt er sich in der Region eines Eckpunktes des Dreiecks $m_1 - m_2$, so wird er an dieser Stelle festgehalten: er 'geht in die Falle'. Der Partikel kann relativ zum Eckpunkt durchaus einer verworrenen Bahn folgen - die gesamte Konfiguration wird dennoch als ein Körper rotieren.

Die Masse des Jupiter ist rund 1000mal kleiner als die der Sonne; die gesamte Masse der Trojaner ist im Vergleich mit der Sonne oder mit Jupiter vernachlässigbar. Diese Konstellationen entsprechen also den Stabilitätsanforderungen, und das System verfügt über einen relativ hohen Stabilitätsspielraum.

6. Raumfahrt mit gravitationellen Schleudereffekten

Die Möglichkeit der interstellaren Raumfahrt ist ein durchaus aktuelles und brisantes Thema; wäre es uns möglich, Raumfahrzeuge oder auch nur kleine Sonden zu anderen Sternen zu entsenden, so würden wir Zugang zu fundamental neuen Erkenntnissen erhalten. Wir könnten die Oberflächen von Sternen unterschiedlichen Typs untersuchen, neue Planetensysteme entdecken und vielleicht sogar auf extraterrestrische Intelligenzen stoßen.

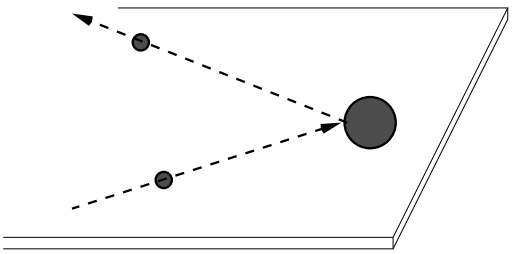
Bisher wurden einige kluge Projekte zur Lösung dieses Problems ersonnen: man diskutierte nukleare und Photonen-getriebene Raumschiffe - wie zum Beispiel die britische *Daedalus*, oder auch Modelle, die ihre Energie von solaren Segeln erhalten sollten. Nun wollen wir aber durchaus nicht alle theoretisch möglichen Lösungen diskutieren, sondern uns auf jenes Modell konzentrieren, das mit dieser Fachbereichsarbeit in direktem Zusammenhang steht, basiert es doch auf dem Wissen um die Bewegung der Himmelskörper: wir wenden uns also der Raumfahrt mit gravitationellen Schleudereffekten zu.

6.1. Die Planetenschleuder.

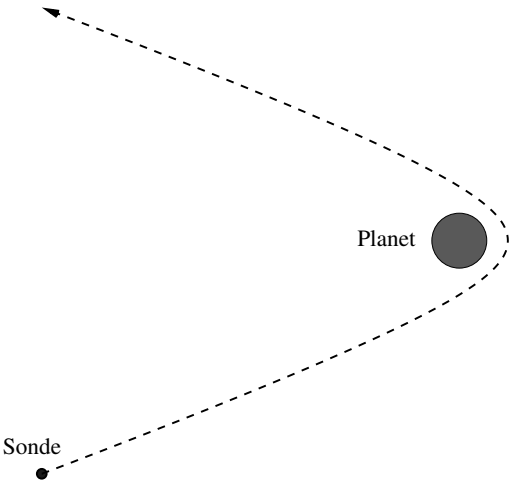
Die Bahnen interplanetärer Missionen werden heute meistens so berechnet, dass das Raumschiff (die Sonde) einen Planeten in relativ geringer Distanz passiert. Dies birgt mehrere Vorteile: zum Einen kann der Planet durch die kleine Entfernung optimal erforscht und beobachtet werden, zum Anderen dient jener dazu, das Raumschiff zu beschleunigen. Die Änderung der Bahn unseres Schiffes, die durch das Gravitationsfeld des Himmelskörpers verursacht wird, nennt man nun allgemein den *Schleudereffekt*. Dieser Effekt fand in der modernen Raumfahrt schon mehrmals Anwendung: die Mission *Voyager II* beispielsweise passierte bei ihrem Flug zum Neptun die Planeten Jupiter, Saturn und Uranus und nützte deren Gravitationskräfte zur Beschleunigung. Die Sonde *Ulysses*, die neue Erkenntnisse über die polaren Regionen der Sonne bringen sollte, wurde nach ähnlichen Überlegungen in Richtung Jupiter gestartet; außerdem stellte sich die Annäherung an die Sonne als ziemlich schwieriges Problem heraus. Hier möchte ich auf den Artikel 'A Flight to the Sun' ([2]) verweisen, der sich mit dieser Fragestellung beschäftigt. Auch die Sonde *Galileo* flog zuerst Richtung Venus, bevor sie ihr eigentliches Ziel, Jupiter, anpeilte. Da vorallem Treibstoffersparnisse und somit die finanziellen Vorteile nicht zu vernachlässigen sind, bedienen sich nun schon so gut wie alle Missionen der gravitationellen Schleudereffekte.

Wir wollen nun das mechanische Grundprinzip dieses Effektes mit einem einfachen Beispiel erklären: man stelle sich eine schwere Eisenkugel vor, die auf einem Tisch rollt. Sie stößt nun mit einer um vieles leichteren Kugel, die sich aus der entgegengesetzten Richtung nähert, zusammen. Da die größere Kugel den Gesetzen der Trägheit und der kinetischen Energie folgt, wird sich ihre Geschwindigkeit und auch Bahn kaum verändern, während die kleinere stark abgelenkt und beschleunigt werden wird.

Die folgende Skizze soll diese Tatsache verdeutlichen:



Ähnlich verhält es sich auch mit der *gravitationellen Kollision* eines schweren Planeten mit einem leichten Raumfahrzeug. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Kollision fester Körper unmittelbar und in einem begrenzten Zeitraum erfolgt, während die Folgen eines gravitationellen Zusammenstoßes auch später noch auszumachen sind.



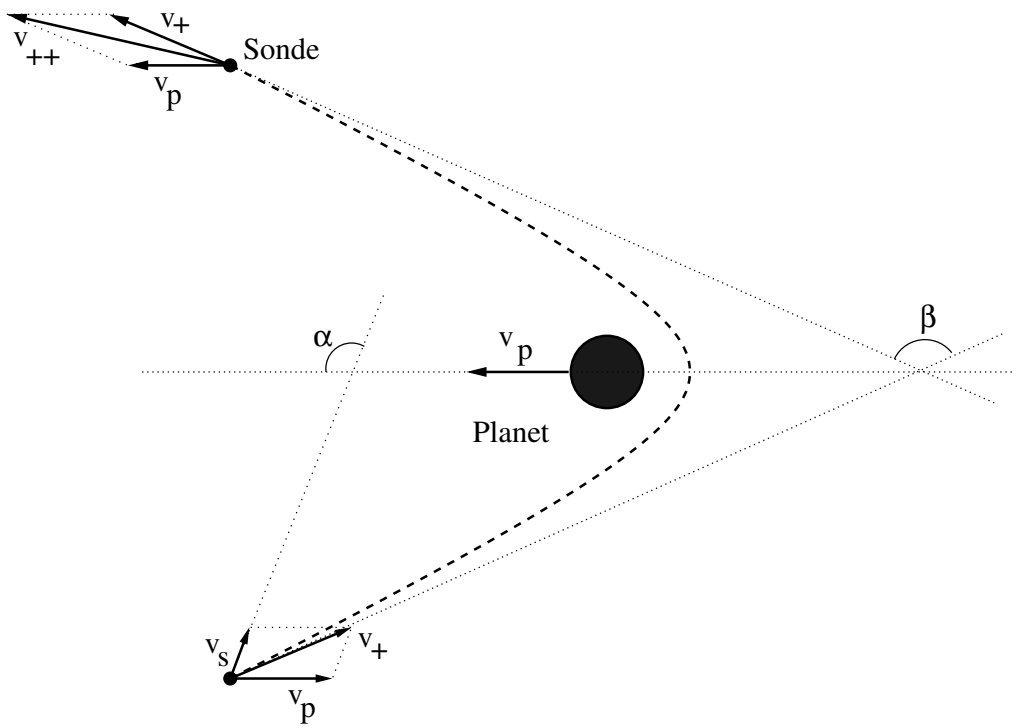
Die Gesetze der Mechanik stimmen also in beiden Fällen überein, und die Ergebnisse sind vergleichbar: bei ihrem Flug um den Planeten erhöht die Sonde ihre Geschwindigkeit, wie auch die kleinere Kugel in unserem Modell beschleunigt wurde. Nun stellt sich aber die Frage, die für die Raumfahrt von großer Bedeutung ist: um wieviel ändert sich die Geschwindigkeit?

6.2. Exakte Herleitung.

Um diese Frage zu beantworten, verwenden wir die Vektoraddition in zwei verschiedenen *Inertialsystemen*. Ein Inertialsystem ist ein Koordinatensystem, in dem das *Erste Newton'sche Axiom*, nämlich das Trägheitsgesetz, gilt: ein Körper ohne Krafteinwirkung bewegt sich gleichförmig auf einer Geraden.

Wir wollen nun mit Hilfe der folgenden Skizze das Problem lösen. In ihr stellen wir einige Betrachtungen an und führen dazu folgende zwei Inertialsysteme ein.

Betrachtet man Planeten und Raumfahrzeug aus weiter Ferne, zum Beispiel von der Sonne, so bewegt sich der Planet mit der Geschwindigkeit v_p und die Sonde mit der Geschwindigkeit v_s fort. Die Richtungen dieser Geschwindigkeiten schließen den Winkel α ein. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Sonde vom Planeten entfernt, bezeichnen wir als v_{++}. Beobachtet man die Sonde hingegen von der Oberfläche des Planeten, so nähert sie sich mit der Geschwindigkeit v_+ und entfernt sich am symmetrischen Punkt der Hyperbel- oder Parabelbahn ebenso mit Geschwindigkeit v_+. Nur die Richtung unterscheidet sich durch den Winkel β von der vorigen.



Dabei ist zu beachten, dass die Geschwindigkeiten v_s, v_p, v_+ und v_{++} nur die Längen der entsprechenden Vektoren, nicht aber die Vektoren selbst sind. Ausserdem haben wir den Mittelpunkt des Planeten als Nullpunkt des Inertialsystems angenommen. Exakt müssten die Nullkoordinaten dieses Systems im Schwerpunkt der Zweikörperkonstellation Planet - Raumschiff liegen; da die Masse des Planeten im Verhältnis zur Sonde aber immens groß ist, reicht die Genauigkeit des Planetenmittelpunktes aus.

Um die Geschwindigkeiten v_+ und v_{++} zu berechnen, verwenden wir den Cosinussatz, siehe A.6. Die Geschwindigkeit v_+ erhält man aus v_s, indem man in das planetenzentrierte Koordinatensystem umrechnet: man addiert den negativen Geschwindigkeitsvektor des Planeten. Beim Zurückrechnen in das sonnenzentrierte Koordinatensystem hingegen addiert man den positiven Geschwindigkeitsvektor, wie in der letzten Skizze angegeben.

$$\begin{aligned} {v_+}^2 &= {v_s}^2 + {v_p}^2 + 2v_s v_p \cos(\pi - \alpha) \\ &= {v_s}^2 + {v_p}^2 - 2v_s v_p \cos\alpha \\ {v_{++}}^2 &= {v_+}^2 + {v_p}^2 + 2v_+ v_p \cos(\frac{\pi - \beta}{2}) \\ &= {v_+}^2 + {v_p}^2 + 2v_+ v_p \sin(\beta/2). \end{aligned}$$

Ist der Bewegungsvektor des Raumschiffes dem des Planeten genau entgegengesetzt, befindet es sich also auf einer Parabelbahn, so gilt:

$$\alpha = \pi, \quad \beta = \pi, \quad \text{daher: } \cos\alpha = -1, \quad \sin(\beta/2) = 1$$

Damit erhalten wir für die Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} {v_+}^2 &= {v_s}^2 + {v_p}^2 + 2v_s v_p = (v_s + v_p)^2 \\ {v_{++}}^2 &= {v_+}^2 + {v_p}^2 + 2v_+ v_p = (v_+ + v_p)^2 = (v_s + 2v_p)^2 \end{aligned}$$

In diesem Fall ist der Geschwindigkeitsgewinn am größten. Der Geschwindigkeitsgewinn ist genau dann positiv, wenn $\pi/2 < \alpha, \beta \leq \pi$ ist; andernfalls wird unsere Sonde abgebremst. Und natürlich muss der Abstand der Sonde zum Planeten mehr als dessen Radius betragen, da wir einen Zusammenstoß vermeiden wollen.

Nach einigen numerischen Rechenoperationen, in die Dichte und Radius des Planeten eingehen, erhält man für die maximale Geschwindigkeit v_{max}, die die Sonde nach dem Passieren des Planeten (wobei $\alpha, \beta > \pi/2$ sind) relativ zu genau diesem haben kann:

$$v_{max} = 0,46\, v_{esc},$$

wobei v_{esc} die Fluchtgeschwindigkeit von der Oberfläche des Planeten darstellt. Wechselt man aber in das sonnenzentrierte Bezugssystem, so ist der entsprechende Wert

$$v_{max} \cong v_{orb} + 0,5\, v_{esc}.$$

Hier stellt v_{orb} die orbitale Geschwindigkeit des Planeten dar.

6.3. Das Verlassen des Sonnensystems.

Doch diese Idee der Beschleunigung eines Raumschiffes ist nicht nur für Missionen innerhalb unseres Sonnensystems von großem Nutzen; auch ein Austritt aus ebendiesem ist möglich. Welche Bedingungen im Speziellen erfüllt werden müssen, um interstellare Flüge mittles gravitationeller Schleudereffekte zu ermöglichen, werden wir im Folgenden besprechen.

Zuerst muss die Bedingung

$$v_{max} \geq \sqrt{2}\, v_{orb}$$

erfüllt werden; das heißt, die Geschwindigkeit unseres Raumschiffes muss größer als jene sein, die zum Austritt aus dem Planetenorbit notwendig ist.

Außerdem muss auch der Planet, dessen Gravitation als Beschleunigung dienen soll, über eine gewisse Masse verfügen. Nur die riesigen Planeten können das Raumschiff mit einem einzigen Planetenschleuder-Maneuver aus dem Sonnensystem hinauskatapultieren. Diese Tatsache werden wir auch in der folgenden Tabelle sehen (aus *Swinging from Star to Star* [9], p. 5). Die letzte Spalte, das Δv, bezeichnet die Geschwindigkeit, die nötig ist, um das Sonnensystem zu verlassen - die Fluchtgeschwindigkeit aus dem Sonnensystem vom Planetenorbit. Sie gibt die Geschwindigkeit des Raumschiffes nach einem möglichen Planetenschleuder-Maneuver an.

Planet	Orbitale Geschwindigkeit v_{orb} (km/s)	Fluchtgeschwindigkeit vom Planeten v_{esc} (km/s)	benötigte Geschwindigkeit Δv (km/s)
Merkur	48	4,2	–
Venus	35	10	–
Erde	30	11	–
Mars	24	5	–
Jupiter	13	60	36
Saturn	10	36	22
Uranus	6,8	21	13
Neptun	5,4	24	14
Pluto	4,7	1?	–

A. Appendix: Mathematische Grundlagen

A.1. Das Innere Produkt.

Das *Innere* oder *Skalare Produkt* von zwei Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

ist durch die Formel

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

gegeben. Es hat folgende Eigenschaften:

(1) Es ist *bilinear*: $(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \mu(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$, $\mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z}) = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + \mu(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})$
(2) Es ist *symmetrisch*: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
(3) Es ist *positiv definit*: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$; und $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ genau dann wenn $\mathbf{x} = 0$ ist.

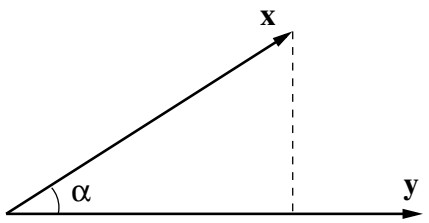
Die *Länge eines Vektors* $\mathbf{x}$ ist gerade

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Wenn $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ ist, dann stehen die Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ *orthogonal* oder *rechtwinkelig* aufeinander. Weiters gilt:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\,\cos(\alpha),$$

wobei α der eingeschlossene Winkel ist:



A.2. Die Determinante.

Die *Determinante* von drei Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

ist durch die Formel

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) &= \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \\ &= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) \end{aligned}$$

gegeben. Ihre Eigenschaften lauten wie folgend:

(1) Sie ändert sich bei Vertauschen von Spalten und Zeilen nicht.

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

(2) Bei Vertauschen von zwei Spalten (oder Zeilen) ändert die Determinante das Vorzeichen: $\det(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = -\det(\mathbf{y},\mathbf{x},\mathbf{z})$. Daher ist die Determinante null, wenn zwei Spalten (oder Zeilen) übereinstimmen: $\det(\mathbf{x},\mathbf{x},\mathbf{z}) = 0$.

Allgemeiner gilt: Wenn man die Spalten der Determinante beliebig umordnet (*permutiert*), ändert sich die Determinante mit dem Vorzeichen der Permutation. Dieses ist $+1$, wenn die Permutation aus gerade vielen Vertauschungen dargestellt werden kann, -1 im umgekehrten Fall.

(3) Die Determinante ist *linear in jeder Spalte*, zum Beispiel:

$$\det(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \det(\mathbf{a},\mathbf{y},\mathbf{z}) + \lambda \det(\mathbf{b},\mathbf{y},\mathbf{z})$$

(4) Die Determinante von drei Vektoren ist genau dann 0, wenn die Vektoren in einer Ebene liegen, das heißt, wenn sie *linear abhängig* sind. Insbesonders ist $\det((\mathbf{x},\mathbf{x},\mathbf{z}) = 0$. Sind sie aber *linear unabhängig*, dann ist die Determinante das *signierte Volumen* des Parallelepipeds, das von den drei Vektoren aufgespannt wird, dh: stimmen $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ mit den Richtungen des (nicht verrenkten) rechten Daumens, Zeige- und Mittelfingers überein, so folgen sie der 'Rechten-Hand-Regel' und das Volumen ist positiv. Aus der 'Linken-Hand-Regel' hingegen ergibt sich ein negatives Volumen.

Wir benötigen die Determinante, um das Vektorprodukt und seine Eigenschaften im Folgenden (A.4) herzuleiten. Hier wurden nur die Definitionen und die wichtigsten Eigenschaften angeführt. Für die Beweise siehe Lehrstoff der 6. Klasse.

A.3. Das Vektor- oder Kreuzprodukt.

Das *Vektor-* oder *Kreuzprodukt* der Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

ist definiert durch

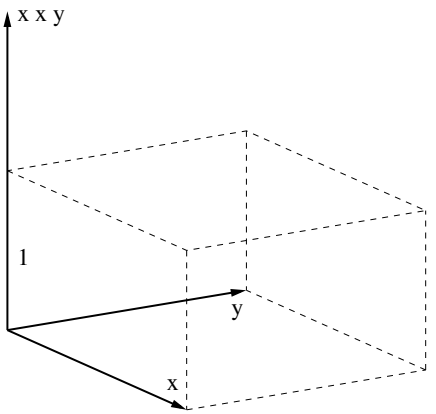
$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_1y_3 + x_3y_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt lässt sich mit Hilfe des Inneren Produktes (siehe A.1) als Determinante (siehe A.2) ausdrücken:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$ ist.

Das Kreuzprodukt $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ *steht also senkrecht auf seine beiden Faktoren* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$*.* Seine Länge ist gerade die Fläche des von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aufgespannten Parallelogramms.



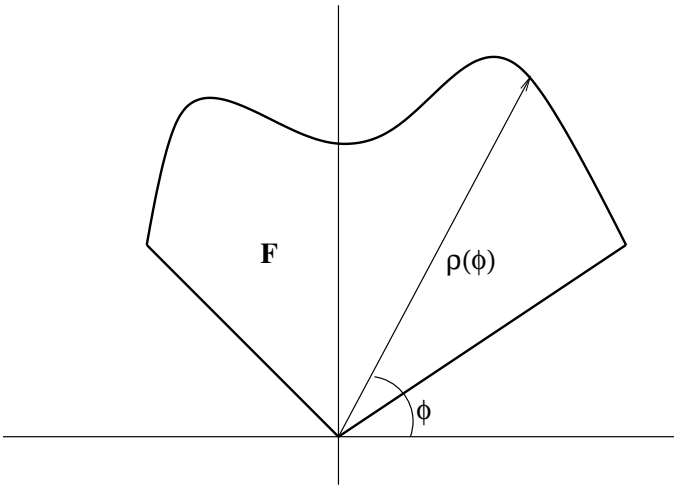
Die Rechenregeln für das Kreuzprodukt lauten:

(1) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$. Das Kreuzprodukt ist also im Gegensatz zum Inneren Produkt *nicht* kommutativ.
(2) $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = 0$
(3) $(\lambda\mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times (\lambda\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$
(4) $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) + (\mathbf{x} \times \mathbf{z})$
(5) Die *Jacobi-Identität*: $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$

Wir verwenden das Vektorprodukt dazu, den Drehimpuls einer Planetenbewegung zu beschreiben und zu beweisen, dass er konstant ist. Dies geschieht in 2.3. Entgegen landläufiger Meinung ist das Vektorprodukt eine einzigartigartige und wichtige Operation, die es in dieser einfachen Form nur im dreidimensionalen Raum gibt. Der $\mathbb{R}^3$ ist mit dem Vektorprodukt eine sogenannte *Lie-Algebra*: das Vektorprodukt ist schiefsymmetrisch (1) und erfüllt die Jacobi-Identität (5). Dies ist die infinitesimale Version der Symmetriegruppe des dreidimensionalen Raumes.

A.4. Das Flächenintegral in Polarkoordinaten.

Wir betrachten jetzt ein Flächenstück F, das sich mit Polarkoordinaten gut beschreiben lässt: es ähnelt einem Tortenstück mit verwackeltem Rand.



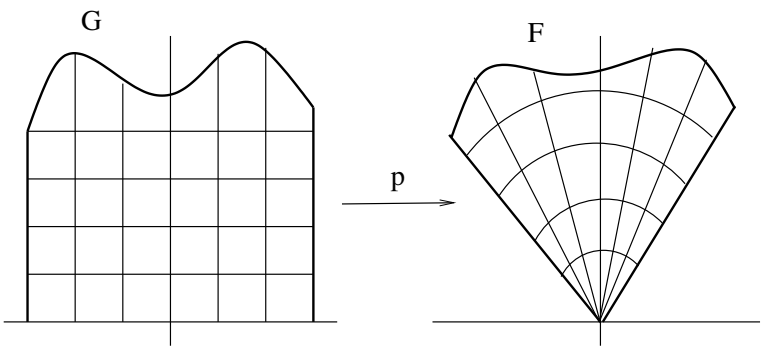
Als Teilmenge der Ebene ist F durch folgenden Ausdruck beschrieben:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} : \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \quad 0 \le r \le \rho(\varphi) \right\},$$

wobei $\rho : [\varphi_1, \varphi_2] \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ eine geeignete, nirgends negative Funktion ist. Um die Fläche von F zu berechnen, parametrisieren wir F wie folgt: es sei $\mathbf{p} : G \to F$ die Abbildung, die durch $\mathbf{p}(\varphi, r) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ gegeben ist, wobei

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix} : \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \quad 0 \le r \le \rho(\varphi) \right\}.$$

Man kann die Abbildung $\mathbf{p} : F \to G$ wie folgt veranschaulichen, wobei die rechtwinkeligen φ-r-Koordinatenlinien in der linken Skizze durch $\mathbf{p}$ auf die 'krummlinigen' Koordinatenlinien in der rechten Skizze abgebildet werden.



Nach der Transformationsformel für mehrfache Integrale ([3], Abschnitt 206) ist

$$\begin{aligned}
\text{Fläche}(F) &= \iint_{F=\mathbf{p}(G)} dx\,dy && \text{Flächendefinition}\\
&= \iint_G \left|\det\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r}\right)\right| dr\,d\varphi && \text{Transformationsformel}\\
&= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^{\rho(\varphi)} \left|\det\begin{pmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}\right| dr\,d\varphi && \text{Partiell Differenzieren}\\
&= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^{\rho(\varphi)} \left|-r(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\right| dr\,d\varphi\\
&= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^{\rho(\varphi)} r dr\,d\varphi
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir das innere Integral:

$$\int_0^{\rho(\varphi)} r dr = \left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=0}^{r=\rho(\varphi)} = \frac{1}{2}\rho(\varphi)^2 - 0$$

Und so erhalten wir

$$\text{Fläche}(F) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^{\rho(\varphi)} r dr\,d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2}\rho(\varphi)^2\,d\varphi$$

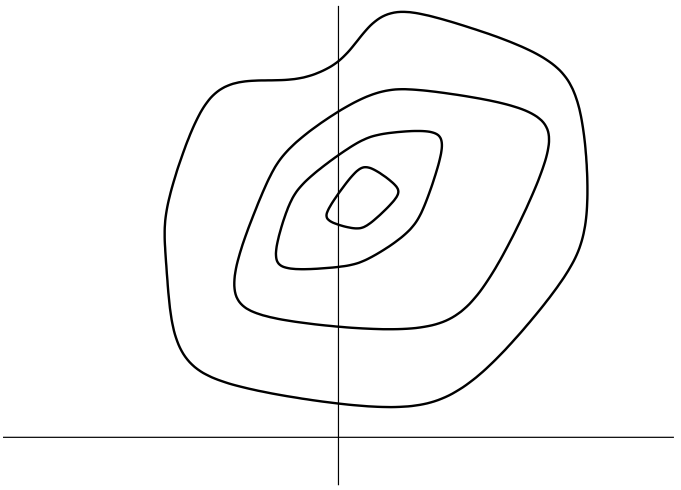
das angekündigte Flächenintegral in Polarkoordinaten.

Nebenbemerkung. Die Transformationsformel für das Flächenintegral kann man folgendermaßen erklären: durch die Parametrisierung $\mathbf{p}$ wird das Flächenmaß verzerrt. Diese Verzerrung wird infinitesimal (bei immer kleineren Flächenteilstücken) durch den Absolutbetrag der Determinante der beiden partiellen Ableitungen von $\mathbf{p}$ beschrieben – denn die Determinante von zwei Vektoren ist gerade der Flächeninhalt des Parallelogramms, das die Vektoren aufspannen. Durch Approximation und Limesübergang kann dieses Argument exakt gemacht werden.

Das Flächenintegral in Polarkoordinaten wird in 2.4 dazu verwendet, den Flächensatz für Zentripetalbewegungen zu beweisen: der Ortsvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

A.5. Der Gradient, Höhenschichtlinien und Equipotentialflächen.

Wir erklären hier den Gradienten einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; in 3.1 allerdings werden wir den Gradienten einer Funktion im $\mathbb{R}^3$benötigen. Den Graphen der Funktion f kann man sich als die Höhen eines Geländes über dem Meeresspiegel vorstellen. Wie in der Kartographie betrachtet man die Höhenlinien, das sind die Konstanzlinien $\{(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) = c\}$ oder auch Equipotentiallinien der Funktion f.

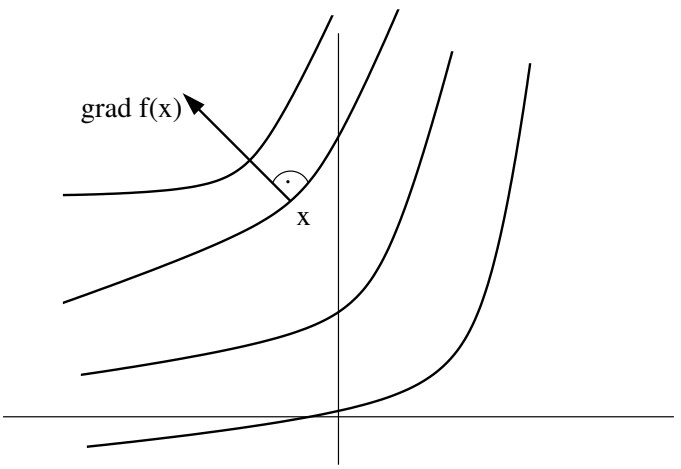


Unter dem Gradienten von f versteht man das Vektorfeld der beiden partiellen Ableitungen von f.

$$\operatorname{grad} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \operatorname{grad} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Lemma. *Der Gradient von f in einem Punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ steht rechtwinkelig auf die Equipotentiallinie von f durch den Punkt $\mathbf{x}$.*

Das heißt, der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstieges des Geländes.



Beweis. Es sei nämlich $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ eine Parametrisierung (zum Beispiel nach der Eigenzeit eines Spaziergängers, der die Höhenschichtlinie entlangwandert) der Equipotentiallinie von f, sodass $(x_1(0), x_2(0)) = \mathbf{x}$ und $f(x_1(t), x_2(t)) = f(\mathbf{x}) =$ konstant ist. Wir differenzieren die letzte Gleichung nach t:

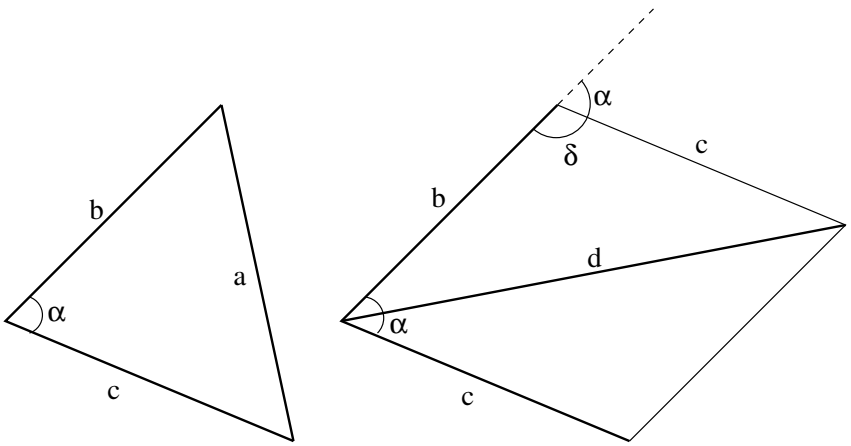
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(f(x_1(t), x_2(t))) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t))\,\dot{x}_1(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1(t), x_2(t))\,\dot{x}_2(t) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t)) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1(t), x_2(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daher steht der Gradient rechtwinkelig auf den Tangentialvektor der parametrisierten Equipotentiallinie. □

Wir betrachten in 3.1 eine Funktion $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Diese können wir uns nicht mehr als Höhenfunktion über einer Ebene vorstellen; wir bezeichnen sie als *Potentialfunktion* des Gravitationsfeldes. Sie gibt in jedem Punkt die potentielle Energie eines Planeten an. Wieder steht der Gradient rechtwinkelig auf die Equipotentialflächen von U.

A.6. Der Cosinussatz.

In Kapitel 6.1 benötigen wir eine Version des Cosinussatzes. In der folgenden Skizze bezeichnen wir nur Längen und nicht Vektoren.



Im linken Dreieck gilt der aus der Schule bekannte Cosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Im rechten Parallelogramm hingegen ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned}
\delta &= \pi - \alpha \\
d^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\delta \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\pi - \alpha) \\
&= b^2 + c^2 + 2bc\cos(-\alpha) \\
&= b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] J. Beatty, C. Collins Petersen, A. Chaikin, *The New Solar System, Fourth Edition*, Cambridge University Press, 1999.

[2] Alexey Byalko, *A Flight to the Sun*, Quantum **7,2** (November/December 1996), 16–20.

[3] Heuser, Harro, *Lehrbuch der Analysis, Teil II*, Teubner-Verlag, Stuttgart, 1983.

[4] Kunze, Hansjörg, *Geschichte der Physik I*, Verlag Hölder–Pichler–Tempsky, Wien, 1990.

[5] Michor, Peter W., *Mündliche Auskünfte.*

[6] V. Mozhayev, *In the Planetary Net*, Seeing the potential in gravitational fields, Quantum **8, 3** (January/February 1998), 4–8.

[7] Schreiner, Josef, *Lehrbuch der Physik, 1. Teil*, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1973.

[8] Spivak, Michael David, *The Joy of TeX*, American Mathematical Society, 1990.

[9] Vladimir Surdin, *Swinging from Star to Star*, How to accelerate a spacecraft far into the cosmos, Quantum **7, 4** (March/April 1997), 4–8.

[10] I. Vorobyov, *Problematic Planets: When Trojans and Greeks collide. The challenge of multi-body systems*, Quantum **10, 1** (September/October 1999), 16–19.

[11] Wegener, Horst, *Physik für Hochschulanfänger*, Teubner-Verlag, Stuttgart, 1991.

[12] Wolfram, Stephen, *Mathematica*, Addison–Wesley Publishing Co., California, 1991.

[13] *Verwendete Software: DOS, LINUX, $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX, XFIG, BRIEF, EMACS.*

Index

Achilles, 31
Aphel, 18
Aristarch von Samos, 4
Babylonier, 4
bilinear, 39
Brahe, Tycho de, 5
BRIEF, 47
Cavendish, Henry, 25
Daedalus, 34
Determinante, 40
DOS, 47
Drehimpuls, 9
Dreikörperproblem, 28
ebene Bewegung, 9
EMACS, 47
Eratosthenes, 4
Erstes Newton'sches Axiom, 35
Exzentrizität, lineare, 19
Exzentrizität, numerische, 19
Gachot, 33
Galilei, Galileo, 5
Galileo (Sonde), 34
Gleichung der Planetenbahn, 17
gravitationelle Kollision, 35
Griechen, 32
Halbparameter, 18
Inertialsystem, 35
Inneres Produkt, 39
Jacobi-Identität, 41
Kepler, Johannes, 5
Kopernikus, 5
Kordylevsky, Pan, 32
Kreuzprodukt, 41
Lagrange, Joseph Louis, 5, 28
Laplace, Pierre de, 5
Lie-Algebra, 41
linear abhängig, 40
linear in jeder Spalte, 40
linear unabhängig, 40
LINUX, 47
Länge eines Vektors, 39
Newton'sches Kraftgesetz, 8
Newton, Isaac, 5
orthogonal, 39
Perihel, 18
permutieren, 40
Platon, 4
positiv definit, 39
Potentialfunktion, 45
Ptolemaios, Klaudios, 4
Pythagoräer, 4
rechtwinkelig, 39
Schleudereffekt, 34
signiertes Volumen, 40
Skalares Produkt, 39
symmetrisch, 39
Trojaner, 32
Ulysses, 34
Vektorprodukt, 41
Voyager II, 34
Wolf, Maximilian, 31
XFIG, 47
Zentralkraftfeld, 7
Zentralkräfte, 9
Zentripetalkraftfeld, 7
Zweites Kepler'sches Gesetz, 10

FRANZISKA MICHOR, HEUWEG 13, 3420 KRITZENDORF
E-mail address: Franziska.Michor@esi.ac.at