63. Sätze angemessen bewerten lernen

Mathematik in der Schule 31 (1993), 395-404.

1. Zum Lernen von Sätzen im Mathematikunterricht

Wird ein Satz im Mathematikunterricht behandelt, dann erwartet man von den Schülern, daß sie die Aussage des Satzes erfassen, Einsicht in die Gründe für seine Gültigkeit gewinnen und Möglichkeiten für seine Anwendungen kennenlernen. Sie sollen diesen Satz und den geführten Beweis wiedergeben und den Satz selbst sinnvoll anwenden können. Die Schüler sollen also *Wissen* und *Können* über diesen Satz erwerben, das in Aufgaben überprüft werden kann. So wichtig diese Qualifikationen für das *Verstehen* des Satzes sind, erschöpft es sich doch nicht in ihnen. Ein wirkliches Verstehen schließt Kenntnisse über den historischen Hintergrund des Satzes, über Beziehungen zu anderen Sätzen, über die Stellung des Satzes innerhalb der Mathematik und über Anwendungsmöglichkeiten ein. Dieses *Metawissen* („Wissen über Wissen") hat in den letzten Jahren verstärkt Aufmerksamkeit in der Mathematikdidaktik gefunden. Das hängt unter anderem mit dem gewachsenen Interesse an „Bildung" zusammen (KLAFKI 1985). Denn es besteht seit langem Klarheit darüber, daß „Bildung durch Mathematikunterricht" eine Illusion bleiben muß, wenn sich der Unterricht auf die bloße Vermittlung von Wissen und Können beschränkt (FREUDENTHAL 1973, WAGENSCHEIN 1970, WITTENBERG 1990[2]). Der Mathematikunterricht muß sich selbst kritisch mit dem Sinn und der Bedeutung von Mathematik auseinandersetzen (FISCHER, MALLE 1985). Für die im Unterricht behandelten Sätze bedeutet dies, daß die Schüler ihren Sinn und ihre Bedeutung erfassen sollen.

Um dieses Ziel zu erreichen, werden die Lehrer zunächst versuchen, den Schülern ihre eigene Sicht über die Sätze zu vermitteln. Aber gerade in dem sensiblen Bereich persönlicher Wertungen und Einschätzungen ist nicht damit zu rechnen, daß die Schüler diese selbstverständlich von ihren Lehrern übernehmen. Vielmehr ist mit abweichenden Wertungen, vielleicht sogar offenem Widerstand zu rechnen. In den letzten Jahren ist das didaktische Interesse an

Diskrepanzen zwischen Vorstellungen von Lehrern und Schülern gewachsen (ANDELFINGER 1984). Eine kritische Überprüfung angestrebter Lernziele zeigte nämlich, daß selbst zu grundlegenden mathematischen Begriffen und Themenbereichen grundverschiedene Vorstellungen zwischen Lehrern und Schülern bestehen.

Im folgenden will ich einige Überlegungen zur Bewertung von Sätzen darstellen, einige Anregungen zur Vermittlung von Bewertungen geben und auf mögliche Diskrepanzen hinweisen.

2. Bewertungen zum Satz von Pythagoras

Zu Beginn meiner Geometrievorlesung für Lehramtskandidaten frage ich gewöhnlich meine Studenten, an welche geometrischen Sätze aus dem Mathematikunterricht sie sich erinnern und welche dieser Sätze sie für besonders wichtig halten. Seit Jahren ist der Satz des Pythagoras eindeutiger Favorit. Neben ihm verblassen offensichtlich alle anderen Sätze. Gewöhnlich diskutieren wir dann die Frage, woran das wohl liegen mag. Zunächst kommen meist recht allgemeine Antworten:

„Der Satz ist –	*interessant, wichtig, schön, überraschend, nicht selbstverständlich.“*
„Der Satz hat –	*eine interessante, eindrucksvolle, einfache, schöne, bedeutsame Formel.“*
„Zum Satz gehört eine –	*schöne, interessante, eindrucksvolle Figur.*

Wir versuchen dann, etwas genauer zu beschreiben. Dabei finden wir heraus:

„Der Satz des Pythagoras

- *drückt eine Beziehung zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aus;*

- *hilft, eine Seite eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hilfe der beiden anderen auszudrücken;*
- *ist ein Sonderfall des Kosinussatzes;*
- *ist eine Folgerung aus dem Kathetensatz;*
- *ermöglicht es, zwei Quadrate in ein Quadrat mit der Summe der beiden Flächeninhalte zu verwandeln.“*

Es kommen natürlich auch historische Hinweise wie:

„*Der Satz*

- *ist nach Pythagoras, dem griechischen Philosophen und Mathematiker benannt;*
- *war bereits den Ägyptern bekannt;*
- *ist in vielen Kulturen entdeckt worden.“*

Das große Interesse an dem Satz drückt sich auch in seinen zahlreichen Beweisen aus.

> „*Es gibt mehr als 200 Beweise für diesen Satz. Ein Beweis stammt von dem amerikanischen Präsidenten* GARFIELD.“

Weitere Argumente ergeben sich z.B. aus der klassischen Studie von LIETZMANN (1965).

Betrachtet man diese Aussagen, so fallen einem vier Typen ins Auge:

affektive Wertungen:	„schön“, „interessant“, „überraschend“;
kognitive Wertungen:	„Spezialfall“, „Folgerung“, „drückt eine Beziehung aus“;
instrumentale Wertungen:	„nützlich“, „brauchbar“, „anwendbar“, „hilfreich“;

kulturelle Wertungen: „war Pythagoras, den alten Ägyptern, vielen Kulturen bekannt“.

In diesen Wertungen drücken sich persönliche Erfahrungen, erworbene Kenntnisse, vielleicht auch übernommene Einschätzungen aus. Der Einfluß von Bewertungen der Lehrer läßt sich natürlich bei meinen Studenten nicht mehr abschätzen. Doch erscheint es mir wichtig, im folgenden erst einmal zu klären, welche Möglichkeiten die Lehrer überhaupt haben, um ihre Wertungen auszudrücken.

3. Bewertung von Sätzen im Mathematikunterricht

Einmal können die Lehrer natürlich Sätze *explizit* bewerten. Allein die Tatsache, daß eine Aussage als Satz hervorgehoben wird, stellt eine Wertung dar. Traditionell drücken sich solche Wertungen in der Mathematik in den Bezeichnungen

Hilfssatz (Lemma) – Folgerung (Corrollar) – Satz (Theorem) – Hauptsatz – Fundamentalsatz

aus. Diese Bezeichnungen gehen häufig bereits auf den Entdecker zurück, so hat z.B. GAUSS selbst einen Satz „Theorema egregium“ genannt; SPERNER nannte den von ihm gefundenen Satz „Lemma“. So spricht man heute vom „Spernerschen Lemma“. (Ein Lemma kann berühmter sein als ein Satz!). Es geschieht immer wieder, daß sich die Bewertung eines Satzes im Laufe der Geschichte ändert, so wird in modernen Algebra-Lehrbüchern vom „sogenannten Fundamentalsatz der Algebra“ gesprochen, um deutlich zu machen, daß er seine Bedeutung als zentraler Satz der Algebra eingebüßt hat.

Aber natürlich stellen auch Kommentare explizite Wertungen dar:

„Dies ist ein wichtiger Satz.“

Das ist jedoch fast eine Phrase. Genauer ist schon das Urteil:

„Dieser Satz ist sehr nützlich für Berechnungen im Dreieck."

Diese Beurteilung richtet ist auf den *Nutzen* des Satzes. Dagegen wird auf die im Satz enthaltene *Erkenntnis* durch eine Formulierung der Art hingewiesen:

„Der Satz drückt die Beziehung zwischen den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aus."

Man kann die Wertungen natürlich noch deutlicher wertend und zugleich begründend formulieren, z.B.

„Der Satz ist wichtig für Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck, denn mit seiner Hilfe kann man jeweils eine Seite durch die beiden anderen ausdrücken".

Die Erfahrungen zeigen: Eine explizite Wertung eines Satzes ist umso überzeugender, je spezifischer sie ist und je deutlicher sie begründet ist.

Bewertungen können aber auch *implizit* vom Lehrer vorgenommen werden. Durch den Bezug auf PYTHAGORAS wird der Satz hervorgehoben. Die Angabe eines Namens suggeriert, daß der Satz von dem betreffenden Mathematiker entdeckt wurde. Wie man weiß, stimmt das häufig nicht. Auch PYTHAGORAS war nicht der Entdecker des berühmten Satzes. Außerdem können gerade im Hinblick auf Namen die Bezeichnungen von Land zu Land verschieden sein. Immerhin bietet die Angabe eines Namens dem Lehrer die Möglichkeit, die Schüler überhaupt mit Namen bedeutender Mathematiker bekannt zu machen. Ein „Gebildeter" sollte nämlich nicht nur die Namen bedeutender Schriftsteller, sondern auch die Namen bedeutender Mathematiker kennen!

Der Name eines Satzes kann sich auf seinen Inhalt beziehen; man denke etwa an „Mittelwertsatz", „Primzahlsatz" oder „Grenzwertsätze". Auch damit wird ein Satz hervorgehoben.

Schließlich zeigt der Aufwand, den der Lehrer bei der Erarbeitung eines Satzes betreibt, implizit seine Wertung. Eine ausführliche Hinführung, eine gründliche Diskussion der Aussage, vielleicht verschiedene Beweise und vielfältige An-

wendungen lösen in dem Schüler die Annahme aus:

„An dem Satz muß etwas dran sein, wenn der Lehrer so viel Wind darum macht.“

Im allgemeinen scheuen sich Mathematiker, in Büchern ihre Wertungen explizit schriftlich niederzulegen. Einmal sind sie wohl überzeugt davon, daß für den Kenner die Sache für sich selbst spricht. Zum anderen machen natürlich persönliche Wertungen angreifbar. Wir werden im folgenden einen solchen „Streit“ unter Fachleuten etwas näher betrachten. Zunächst möchte ich jedoch festhalten:

> *Implizit ausgedrückte Wertungen eines Satzes lassen dem Lernenden mehr Freiheit, sich selbst ein Urteil zu bilden. Aber dazu gehört, daß die Schüler lernen, die Verhaltensweisen des Lehrers richtig zu interpretieren.*

Vergleicht man die Wirksamkeit expliziter und impliziter Wertungen des Lehrers auf die Schüler, dann sind natürlich explizite Wertungen des Lehrers leichter erkennbar. Sie erheischen Zustimmung, können aber natürlich auch Opposition hervorrufen. Vor allem aber erfordern sie Begründungen, soll der Unterricht nicht autoritär wirken. Implizite Wertungen bieten einerseits dem Schüler mehr Freiheit, erleichtern aber andererseits auch die Manipulation der Schüler durch ihre Lehrer.

4. Das Problem der Rechtfertigung

Über eine Aussage läßt sich feststellen, ob sie wahr oder falsch ist. Für den Beweis eines Satzes gelten allgemein anerkannte Maßstäbe. Wie verhält es sich aber mit dem Urteil über den Wert eines Satzes? In der didaktischen Literatur findet sich eine Auseinandersetzung über die Bedeutung des Mittelwertsatzes, in der Emotionen der Beteiligten spürbar sind. Auf der einen Seite urteilen VAN DER WAERDEN (1980) und LAUGWITZ (1990):

Der Mittelwertsatz ist ziemlich unbedeutend, denn

- *er ist historisch unauffällig,*
- *ist intuitiv völlig klar,*
- *ist zwar nützlich beim Beweisen, wäre aber in der Theorie prinzipiell entbehrlich,*
- *er ist nur unter systematischen Gesichtspunkten von Interesse.*

Dagegen brechen SCHWEIGER (1987) und WINTER (1988) eine Lanze für den Mittelwertsatz, denn

- *er drückt praktische Intuitionen der Physik und Wirtschaft aus,*
- *er öffnet ein breites Feld interessanter Entdeckungen,*
- *er drückt die grundlegende Tatsache der Vollständigkeit des Systems der reellen Zahlen aus,*
- *er ist wichtig für Approximationen,*
- *er bildet eine Brücke zwischen lokalen und globalen Änderungen,*
- *er stellt eine paradoxe Beziehung dar, denn einerseits ist er einem Spezialfall (Satz von Rolle), andererseits einem allgemeineren Satz (Satz von Taylor) äquivalent,*
- *er ist ein Beispiel eines nicht-konstruktiven Satzes.*

Vielleicht denkt der Lehrer nun: „Die Experten sollen sich erst mal einigen!“ Aber ist nicht gerade eine solche kontroverse Diskussion über Mathematik zwischen Fachleuten interessant? Der Hintergrund ist die Frage, welchen Platz dieser Satz im Analysisunterricht des Gymnasiums einnehmen sollte. Mir erscheint es günstig, eine solche Frage nicht endgültig und losgelöst von den Rahmenbedingungen und vor allem nicht ohne die direkt Beteiligten zu beantworten. Vielmehr schätze ich eine solche offene Diskussion, weil der Lehrer

nun selbst die Argumente abwägen und persönlich entscheiden kann.

Noch einige Gedanken zu den Wertungen der Lehrer. Sie entspringen persönlichen Erfahrungen aus der Schulzeit, aus dem Studium, aus der pädagogischen Ausbildung, der Lehrerfortbildung, eigenen Literaturstudien, Diskussionen mit Kollegen und natürlich auch dem persönlichen Geschmack. Es ist für mich ein wichtiges Anliegen, in der Didaktikausbildung der angehenden Lehrer mit ihnen in Vorlesungen, Übungen und Seminaren über die gelernte Mathematik zu reflektieren, zu werten und Wertungen begründen zu lassen, um sie so zu einer persönlichen Auseinandersetzung mit der zu unterrichtenden Mathematik anzuregen. Nach meinen Erfahrungen benötigen die Studenten explizite Kommentare und Diskussionen über Erkenntnis, Nutzen, Schönheit, kulturelle Bedeutung und Herkunft von Sätzen, um sie selbst angemessen beurteilen zu lernen.

6. Über die Bewertung von Sätzen durch Schüler

Wir haben auch Schüler in verschiedenen Klassen danach befragt, welche Sätze sie jeweils für die wichtigsten hielten. Für die Schüler einer 8. Klasse eines Gymnasiums waren in der Geometrie der Satz des Thales und die Kongruenzsätze am wichtigsten. Sie hielten sie besonders wichtig für Konstruktionen und Beweise. Für die Schüler einer 10. Klasse waren in der Geometrie der Satz von Pythagoras und der Satz des Thales am wichtigsten. Zum Satz des Pythagoras wurde die große Zahl der in Verbindung mit diesem Satz behandelten Aufgaben genannt, die zahlreichen Beispiele, die einprägsame Formel. Vor allem aber wurde auf die Bedeutung dieses Satzes für Klassenarbeiten verwiesen. In einer 13. Klasse waren die Favoriten des Analysisunterrichts bei den Schülern der Satz über Minima und Maxima, L'Hospitals Regel und die Grenzwertsätze. Für den Lehrer jedoch war der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung der wichtigste Satz. Besonders diese unterschiedlichen Bewertungen machen deutlich, daß die Schüler in erster Linie einen Satz von seinem Nutzen her sehen, während für den Lehrer die darin enthaltene Erkennt-

nis entscheidend ist. Derartige Unterschiede können im Unterricht sogar dramatisch hervorbrechen. Ich erinnere mich an eine Situation, in der ich in einer 7. Klasse von einem Satz besonders schwärmte und eine Schülerin protestierte: „Das ist doch alles Mist!“ Die Bewertungen eines Lehrers können eine Provokation für die Schüler sein; doch auch der Protest ihrer Schüler kann den Lehrer provozieren.

Prinzipiell sollte man den Schülern das Recht auf persönliche Wertungen zugestehen. Trotzdem sollte es das Ziel sein, die Schüler zu *angemessenen* Bewertungen zu verhelfen. Dazu ist es erforderlich, einen Satz unter den verschiedenen Aspekten wie Erkenntniswert, Nutzen, Schönheit und kulturhistorischer Bedeutung zu diskutieren. Dies sollte argumentativ geschehen, um eine Indoktrination zu vermeiden. Und es sollte in der nötigen Offenheit geschehen, die den Respekt vor der persönlichen Wertung der Schüler erkennen läßt.

7. Balance und Akzentsetzung

Um einseitige Urteile zu vermeiden, ist es notwendig, im Unterricht eine Balance herzustellen zwischen

- *Erkenntnis und Nutzen,*
- *Theorie und Praxis,*
- *Strenge und Schönheit,*
- *Kultur und Technik.*

Der Mathematikunterricht ist immer in Gefahr durch Betonung eines Aspekts aus dem Gleichgewicht zu geraten (VOLLRATH 1987). Dazu gehört auch, daß z.B. Sätze häufig nur in bestimmten Bereichen des Mathematikunterrichts auftreten. Im allgemeinen lernen die Schüler z.B. Sätze eher in der Geometrie kennen, während in der Algebra „Regeln“ dominieren. Ich halte es deshalb für

sinnvoll, auch in der Arithmetik und Algebra Sätze hervorzuheben, wie das traditionell in den Lehrbüchern der DDR der Fall war.

Andererseits ist es auch erforderlich, unter den Sätzen Unterschiede zu machen. Wer jeden Satz als etwas ganz Besonderes herausstellt, wird unglaubwürdig. Das ist genauso, als wenn man in einem Buch alles unterstreicht. Wenn angeblich alles wichtig ist, dann ist in Wirklichkeit nichts wichtig! Es ist daher nötig, *Akzente* zu setzen, indem man bestimmte Aussagen als Sätze hervorhebt. Aber auch innerhalb der Sätze sind Betonungen nötig, schon damit die Schüler erkennen können, was „merk – würdig“ ist.

Schließlich sind im Unterricht auch Maßstäbe zu entwickeln. Schüler können nur dann Mathematik angemessen einschätzen, wenn sie wirklich Wesentliches von der Mathematik erfahren. RICHARD LIVINGSTONE schrieb:

> „Welch wichtigeren Dienst kann die Schule oder Universität ihren Schülern erweisen, als ihnen das Beste zu zeigen, was in der Welt getan, gedacht und geschrieben worden ist, und es ihrem Geiste unauslöschlich, als Maßstab und Prüfstein, um sie durch ihr Leben hindurch zu leiten, einzuprägen?“ (Nach WITTENBERG 1990, S.1)

8. Hilfen zu angemessener Beurteilung

Wie wir gesehen haben, ist es notwendig, Schüler zum Nachdenken über den Wert des Gelernten zu veranlassen, sich darüber zu äußern, auf andere Einschätzungen zu hören und selbst bereit zu sein, eigene Bewertungen unter dem Eindruck von Argumenten zu ändern. Das Nachdenken über die Bedeutung eines Satzes kann man anregen durch Fragen wie:

Was ist der Inhalt des Satzes?
Welche Erkenntnis wird durch den Satz ausgedrückt?
Welche Konsequenzen hat dieser Satz?
Welche Probleme können mit Hilfe dieses Satzes gelöst werden?

Mögliche Aufforderungen könnten sein:

> Versuche, den Satz möglichst eindrucksvoll in deinen eigenen Worten zu formulieren!
> Versuche, den Inhalt des Satzes durch ein Schlagwort zu treffen!
> Gib dem Satz einen treffenden Namen!

Wir hatten oben als ein Ziel angegeben, daß die Schüler die Bedeutung eines Satzes erfassen sollen. Wie kann man das Erreichen eines solchen Zieles „prüfen"? Ich sehe hier vor allem eine Chance für den mathematischen *Aufsatz,* der immer wieder empfohlen (z.B. in WAGENSCHEIN 1970, S. 170-172), aber in der Praxis wohl nur selten verlangt wird. In einem Aufsatz haben die Schüler die Möglichkeit, sich ausführlich über die Bedeutung eines Satzes zu äußern, Argumente anzugeben, Argumente und Gegenargumente gegeneinander abzuwägen. Auch ein *Referat* bietet eine solche Möglichkeit. All dies sind Ansatzpunkte, im Mathematikunterricht *mathematische Kultur*sichtbar werden zu lassen und zu entwickeln.

Sich Bewertungsfragen zu stellen, bedeutet für den Lehrer natürlich auch eine Verpflichtung zur Rechtfertigung seines Unterrichts. Lehrer können sich nicht auf das Gewicht der Mathematikzensur, die Stellung des Faches im Fächerkanon oder allgemeine Hinweise auf die Bedeutung der Mathematik in der modernen Gesellschaft zurückzuziehen. Sie müssen immer wieder versuchen, ihre Schüler von der Sache her zu überzeugen. Was die im Unterricht behandelten Sätze angeht, bedeutet das:

> *Schüler haben das Recht zu erfahren, in welcher Hinsicht die Sätze, die sie lernen sollen, wichtig sind.*

Literatur

Andelfinger, B., Arithmetische und algebraische Lernerkonzepte in der SI, BMU (1984), 71-74

Fischer, R., G. Malle, Mensch und Mathematik, Mannheim 1985

Freudenthal, H., Mathematik als pädagogische Aufgabe, I,II, Stuttgart 1973

Klafki, W., Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik, Weinheim 1985

Laugwitz, D., Zur Rechtfertigung mathematischer Unterrichtsinhalte: „Das Beispiel Mittelwertsatz der Differentialrechnung“, JMD 11 (1990), 111-128

Lietzmann, W., Der pythagoreische Lehrsatz, Leipzig 1965

Schweiger, F., Was spricht für den Mittelwertsatz der Differentialrechnung?, MSB 34 (1987), 220-230

Vollrath, H.-J., Störungen des „didaktischen Gleichgewichts“ im Mathematikunterricht, MNU 40 (1987), 373-378

Vollrath, H.-J., Mathematik bewerten lernen, In: P. Bender (Hrsg.), Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis, Berlin 1988, 202-209

van der Waerden, B.L., Die „genetische Methode“ und der Mittelwertsatz der Differentialrechnung, PM 22 (1980), 52-54

Wagenschein, M., Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken, I,II, Stuttgart 1970

Wittenberg, A.I., Bildung und Mathematik, Stuttgart 1990

Winter, H., Intuition und Deduktion - zur Heuristik der Differentialrechnung, ZDM 20 (1988), 229-235