55. Lokales Ordnen an geometrischen Konstruktionen

In: H. Postel, A. Kirsch, W. Blum (Hrsg.), Mathematik lehren und lernen, Festschrift für Heinz Griesel, Hannover 1991, 217-228.

1. Einleitung

In einer Arbeit aus dem Jahre 1963 entwickelt GRIESEL eine Konzeption des Geometrieunterrichts am Gymnasium in Stufen. Er beginnt mit der „Stufe der Figurenkenntnisse und Zeichenfertigkeiten", es folgt die „Stufe der intuitiven Einsicht und des plausiblen Schließens", dann die „Stufe des Beweisens", schließlich die „Stufe des lokalen Ordnens". Am Beispiel der Winkelsätze zeigt er, welche Überlegungen und Schritte typisch sind für die Stufe des lokalen Ordnens.

Die Idee eines gestuften Geometrielehrganges war an sich nicht neu. So hatte etwa der MA-Report von 1923 in England vorgeschlagen, den Geometrieunterricht mit einer experimentellen Stufe A zu beginnen, um dann über eine deduktive Stufe B zu einer systematisierenden Stufe C zu gelangen. FLADT hatte 1955 eine sinnvolle Konzeption für den Geometrieunterricht am Gymnasium wie folgt beschrieben: „So hebt, um mit Kant zu reden, der geometrische Unterricht (auf der Unterstufe) mit der Anschauung an, steigt von da (von der Mittel- und Oberstufe) zu Begriffen und endet (auf der Oberstufe) mit Ideen." (S. 10). GRIESEL beruft sich in seiner Arbeit auf FREUDENTHAL (1963), der seinerseits auf VAN HIELE verweist. Diese Vorstellungen haben sich heute weitgehend durchgesetzt. Dies gilt auch für die anderen Schultypen (VOLLRATH 1982, WEIDIG 1982).

In seinen Betrachtungen richtet GRIESEL sein Augenmerk auf das Beweisen, welches ja traditionell für den Geometrieunterricht am Gymnasium eine besondere Rolle spielt. Daß es sinnvoll ist, sich in der Propädeutik (den ersten beiden Stufen) auf intuitive Einsicht und anschauliche Argumentationen zu beschränken, war damals unbestritten. Die eigentliche Geometrie setzte dann

aber meist mit einem mehr oder weniger axiomatisch orientierten Aufbau ein. Für FREUDENTHALS Vorschlag, axiomatische Betrachtungen erst nach der Erarbeitung der geometrischen Sätze anzustellen, um damit das Beziehungsgefüge zwischen den Sätzen deutlich zu machen, fehlten zunächst überzeugende Beispiele (ausführlich dargestellte Beispiele finden sich später in FREUDENTHAL 1973). GRIESELS Arbeit gibt mit der Betrachtung der Winkelsätze ein Unterrichtsbeispiel für diese Konzeption. Als ein frühes Beispiel für lokales Ordnen kann man übrigens FLADTS Studie „Ein Kapitel Axiomatik: Die Parallelenlehre“ (1956) ansehen, die allerdings nicht unmittelbar auf den Unterricht bezogen war, sondern eher eine „Didaktische Analyse“ darstellte.

Es erscheint mir reizvoll, auch einmal das Thema der geometrischen Konstruktionen unter dem Aspekt einer Stufung für den Geometrieunterricht am Gymnasium zu betrachten. Dabei will ich ebenfalls besonderen Wert auf das lokale Ordnen legen. Indem ich meine Überlegungen an GRIESELS Arbeit anlehne, möchte ich ihm meine Hochachtung für seine didaktischen Leistungen und meinen Dank für zahlreiche Anregungen über viele Jahre freundschaftlicher Verbundenheit ausdrücken.

2. Konstruktionsaufgaben im Geometrieunterricht

Bis zum Beginn unseres Jahrhunderts war die geometrische Aufgabe in der Regel eine planimetrische Konstruktionsaufgabe. Die einsetzenden Reformbestrebungen lösten sich von dieser Beschränkung. So faßt LIETZMANN (1922 S. 129ff.) den Begriff der geometrischen Aufgabe wesentlich weiter. Aufgaben sollen zunächst dazu dienen, „die Schüler mit den eingeführten Begriffen vertraut zu machen“. Dabei geht es vor allem um das Erkennen und Erzeugen von Objekten, die unter den Begriff fallen. Aufgaben können aber auch der „Anwendung der Lehrsätze“ dienen; dabei handelt es sich meist um Konstruktionen und Berechnungen. Zum Aufsuchen von Beweisen vorgelegter Behauptungen sind „Übungssätze“ gedacht. Schließlich ist wohl der anspruchsvollste Aufgabentyp die „Auffindung von Lehrsätzen“. Bei diesen Aufgabenty-

pen spielen nach wie vor auch Konstruktionsaufgaben eine Rolle, mit denen hier jedoch überwiegend formale Ziele verfolgt werden. Allerdings betont LIETZMANN zugleich auch die inhaltliche Bedeutung der Konstruktionsaufgabe als klassischer Problemstellung der Geometrie, die nach einem bestimmten Schema (Anlysis, Konstruktion, Beweis, Determination) mit Zirkel und Lineal zu lösen ist. Andererseits läßt er für den Unterricht auch moderne Zeichengeräte zu; er fordert sogar, den Gebrauch der Zeichengeräte eines Technischen Zeichners zu üben.

Betrachtet man die Schulbücher dieser Zeit (z.B. REIDT-WOLFF-KERST 1927), so findet man tatsächlich die von LIETZMANN angestrebte Aufgabenvielfalt, daneben aber auch die klassischen Konstruktionsaufgaben in dem üblichen Schema. Bei den Dreieckskonstruktionen werden neben Aufgaben, bei denen Seiten oder Winkel des Dreiecks gegeben sind, auch noch Aufgaben gestellt, bei denen Höhen, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende, Inkreis- oder Umkreisradius gegeben sind. HERTERICH gibt 1961 eine Übersicht über die lösbaren und unlösbaren Aufgaben zur Dreieckskonstruktion. Dies Buch machte den Lehrern deutlich, welch schwierige Aufgaben hier auftreten können, durch die man Schüler leicht überfordern kann. Trotzdem hielten sich diese Aufgaben verhältnismäßig lange im Mathematikunterricht (z.B. bringen REIDT-WOLFF 1957 und REIDT-WOLFF-ATHEN 1965 noch den traditionellen Aufgabenbestand mit dem klassischen Lösungsschema). Mit der Einführung des Geodreiecks treten die „Konstruktionen mit Zirkel und Lineal“ deutlich zurück. Sprachlich wird gelegentlich zwischen „Zeichnen“ und „Konstruieren“ unterschieden (z.B. spricht ATHEN-GRIESEL 1975 von „Konstruieren“, wenn ausschließlich mit Zirkel und Lineal gezeichnet werden soll). Inhaltlich beschränkt man sich meist auf die Grundkonstruktionen und auf die Hauptkonstruktionen für Dreiecke (aus Seiten oder Winkeln). In den südlichen Bundesländern (Baden-Württemberg und Bayern) wird dagegen stärker die Tradition der Konstruktionsaufgaben gepflegt. So besteht nach wie vor eine Nachfrage nach dem Buch von HERTERICH (1986 erschien eine Neuauflage). Im übrigen Bundesgebiet werden dagegen Aufgaben, bei denen nur mit Zirkel und Lineal kon-

struiert werden soll, eher als „exotische“ Aufgaben angesehen (z.B. ATHEN -GRIESEL 1980).

Die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal werden von den „Traditionalisten“ den Schülern meist als die genauesten Lösungen angepriesen. Daß die Genauigkeit einer Lösung wesentlich von der Aufgabenstellung abhängt, wird den so unterrichteten Schülern nicht bewußt. Stelle ich z.B. meinen Studenten die Aufgabe, welche Methode zum Halbieren einer Strecke am genauesten ist:

a) mit Zirkel und Lineal,
b) mit dem Zollstock,
c) mit der symmetrischen Skala des Geodreiecks oder
d) nach Augenmaß,

so wird mir regelmäßig a) genannt. Die Studenten sind dann verwundert, wenn ich ihnen zeige, daß man z.B. eine 1 mm lange Strecke am genauesten nach Augenmaß halbiert. Es erscheint mir deshalb durchaus sinnvoll, die Frage der Genauigkeit von Konstruktionen mit unterschiedlichen Geräten unter verschiedenen Bedingungen zu diskutieren, wie das bereits von LIETZMANN (1922, S.136) empfohlen wurde. Hinweise auf eine moderne mathematische Behandlung dieser Frage findet man bei SCHREIBER (1984).

Die Diskussion um Konstruktionen ist 1974 durch HOLLAND neu belebt worden, der folgende wichtige Funktionen von Konstruktionsaufgaben hervorhebt und damit im Grunde die Ideen von LIETZMANN wieder aufgreift:

(1) Konstruktionen können der Einführung neuer Begriffe dienen;
(2) sie sind geeignet zur Thematisierung von Sätzen;
(3) sie führen zu Beweisen von Sätzen.

Spuren seiner Ideen finden sich in den von ihm verfaßten Geometrie-Kapiteln von „Mathematik heute“ (1980).

HOLLAND betont (1974), daß die klassische Konstruktionsbeschreibung nichts anderes ist als die Angabe eines Algorithmus. Hier zeigen sich bereits Wirkun-

gen des Computers, dem in den letzten Jahren verstärkt dieses Thema zugänglich gemacht wird. So interessiert sich HOLLAND z.B. für den Einsatz des Computers zum Problemlösen bei Konstruk-tionsaufgaben (HOLLAND 1989). Daneben gibt es zahlreiche Versuche, den Computer als „Zeichenwerkzeug" zum Lösen von Konstruktionsaufgaben zu benutzen (z.B. SCHUMANN 1988).

Schließlich gelten nach wie vor didaktische Bemühungen der Erschließung neuer reizvoller Konstruktionsaufgaben für den Mathematikunterricht, für Facharbeiten oder Wettbewerbe (z.B. BAPTIST 1982, ZEITLER 1983).

Generell läßt sich jedoch (in Anspielung auf den Titel der Arbeit von FLADT 1955) sagen, daß der Geometrieunterricht am Gymnasium, was die Konstruktionsaufgaben anbelangt, heute „weit weg von EUKLID" ist. Dies soll im folgenden näher belegt werden.

3. Konstruktionsaufgaben in den Elementen des Euklid

In den Elementen des EUKLID (im folgenden verweisen wir auf die Ausgabe von THAER 1962) finden sich bekanntlich Definitionen, Postulate, Axiome und Propositionen. Zu den Propositionen gehören Probleme und Theoreme. Bei den Problemen handelt es sich um Konstruktionsaufgaben. So beginnen die Propositionen mit dem Problem

(A 1): „Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck errichten." (S.3).

Es folgen dann

das Abtragen einer Strecke von einem Punkt (A 2),
das Abtragen einer Strecke an einer anderen (A 3),
das Halbieren eines Winkels (A 4),
das Halbieren einer Strecke (A 5),
das Errichten der Senkrechten (A 6) und
das Fällen des Lotes (A 7).

Wir erwähnen aus dem 1. Buch noch

die Konstruktion einer Parallelen durch einen Punkt (A 10) und
die Konstruktion eines Dreiecks aus den drei Seiten (A 9).

Drei der fünf Postulate sichern die Durchführbarkeit von Konstruktionen: Das 1. Postulat fordert die Möglichkeit, die Verbindungsstrecke zweier Punkte zu ziehen; das 2. Postulat garantiert die Möglichkeit, eine begrenzte gerade Linie zu verlängern; im 3. Postulat wird das Zeichnen eines Kreises mit gegebenem Mittelpunkt und Radius gesichert.

Wie diese Konstruktionen praktisch durchgeführt werden, interessiert nicht. So fehlen Hinweise auf Lineal und Zirkel. Sie sind auch in den Konstruktionsbeschreibungen nicht zu finden. EUKLID interessiert sich also überhaupt nicht für die praktische Durchführbarkeit, sondern nur für die theoretische Möglichkeit. So heißt die Konstruktionsanweisung nicht „dies werde getan“, sondern „dies sei getan“ (S. 420). Ganz anders sieht das 2000 Jahre später z.B. bei CH.V.WOLFF aus. Bei ihm beginnt die Konstruktionsbeschreibung für das gleichseitige Dreieck so:

„Setzet den Zirkel in A, thut ihn auf bis in B, und beschreibet damit über der Linie einen Bogen.“ (S. 134).

Noch heute beginnen die Konstruktionsbeschreibungen meiner Studenten meist:

„Ich nehme den Zirkel, öffne die Schenkel und steche bei A ein...“

Bei EUKLID heißt es dagegen nur:

„Mit A als Mittelpunkt und AB als Abstand zeichne man den Kreis...“ (S.3)

Wird bei EUKLID ein besonderes theoretisches Interesse an den Konstruktionsaufgaben einerseits an ihrer Stellung sichtbar, so kann man das auch andererseits daran erkennen, daß viele Sätze auf Konstruktionen bezogen sind, die sie begründen sollen.

Es wird immer wieder betont, daß sich in den Elementen ein hierarchischer Aufbau der Sätze findet. Tatsächlich findet sich ein solcher Aufbau auch bei den Konstruktionen. Die erste Konstruktionsaufgabe bezieht sich auf die Postulate 1 und 3: Für die Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks wird zweimal auf die Möglichkeit zurückgegriffen, einen Kreis zu zeichnen (3. Postulat). Der Schnittpunkt der Kreise wird dann mit den beiden Endpunkten der Ausgangsstrecke durch Strecken verbunden (1. Postulat).

Bei der Aufgabe, eine Strecke zu halbieren (A 5), wird zunächst ein gleichseitiges Dreieck über dieser Strecke gezeichnet (A 1), dann wird die Winkelhalbierende eingezeichnet (A 4). Der Schnittpunkt ist der gesuchte Mittelpunkt der Strecke.

Hier wird also gar nicht mehr auf die Konstruktionen der Postulate zurückgegriffen, sondern nur noch auf bereits gelöste Aufgaben, die man als „Bausteine“ verwendet. Betrachtet man Konstruktionsbeschreibungen als Algorithmen, dann benutzt EUKLID also bereits *Module*.

Ganz anders sehen Konstruktionsbeschreibungen später bei WOLFF aus:

> „1. Machet aus A und B nach Belieben Durchschnitte in C und D.
>
> 2. Ziehet die Punkte derselben mit einer geraden Linie DC zusammen; so theilet sie die Linie AB in zwey gleiche Theile.“ (S. 149-150).

Sein praktisches Interesse an der Konstruktion läßt ihn auf die Grundkonstruktionen der Postulate zurückgreifen, obwohl auch er bereits eine Fülle weiterer Konstruktionen zur Verfügung hätte.

Konstruktionen sind völlig der Praxis zugeordnet, wenn z.B. in einem Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien, Realschulen und höhere Bürgerschulen über die „Art des mathematischen Vortrages“ zu lesen ist:

> „Die Grundsätze (Axiome) und Lehrsätze (Theoreme) sind Sätze, welche Behauptungen aufstellen, sich aber dadurch von einander unterscheiden, daß bei jenen die Wahrheit der Behauptung unmittelbar dem Verstande einleuchtet, bei diesen aber erst durch einen Beweis, d.i. durch Angabe von Gründen, dargethan werden muß..... Die Forderungen (Postulate) und Aufgaben (Probleme) sind Sätze, welche verlangen, daß Etwas aus Gegebenem gefunden werde, unterscheiden sich aber dadurch, daß man bei jenen auf das richtige Verfahren, das Verlangte zu leisten, sogleich von selbst kommt, während es bei diesen nicht nur gezeigt, sondern seine Richtigkeit sogar bewiesen werden muß. Der Grundsatz und Lehrsatz sind theoretische, die Forderung und Aufgabe dagegen praktische Sätze, die in der Geometrie den Gebrauch des Lineals und des Zirkels voraussetzen.“ (FIEDLER 1867 S. 3-4).

Diese Sichtweise läßt sich m.E. nicht durch die Elemente des EUKLID rechtfertigen. Sie scheint aber weitgehend typisch zu sein für die Sicht der Konstruktionen in der Schule, wo man sie als praktische Anwendungen von Sätzen betrachtet.

In der Mathematik finden Konstruktionen dagegen überwiegend theoretisches Interesse, man denke etwa an J. STEINER (1833), ENRIQUES (1907), BIEBERBACH (1952) und SCHREIBER (1984). Selbst die praktisch motivierten Überlegungen von HJELMSLEV (1915) haben theoretischen Charakter. Praktisch orientiert sind noch am ehesten Untersuchungen über Näherungskonstruktionen und Betrachtungen über die Genauigkeit von Konstruktionen (z.B. KLEIN 1928). KLEINS Wertschätzung praktischer Verfahren führte im Gefolge der Unterrichtsreform zu Beginn des Jahrhunderts zu Unterrichtsempfehlungen, mathematische Instrumente im Unterricht stärker zu beachten. So ist z.B. der 3. Band der „Methodik“ von LIETZMANN ganz den praktischen Verfahren und Anwendungsgebieten gewidmet. Auch in der strukturell orientierten Unterrichtsform der sechziger Jahre vergab man die Möglichkeit, den Schülern zu zeigen, wie man Konstuierbarkeitsfragen theoretisch durch Strukturbetrachtungen beantworten kann.

Es erscheint mir daher sinnvoll, Konstruktionsaufgaben im Gymnasium deutlicher auch als theoretische Problemstellungen zu behandeln. Eine solche Sicht von „Praxis“ läßt sich übrigens auch pädagogisch rechtfertigen (BÖHM 1985).

Es empfiehlt sich also:

1. In Verbindung mit Konstruktionsaufgaben sollten auch Skizzen zugelassen werden. (In den Abbildungen der Schulbücher finden sich in der Geometrie praktisch keine Skizzen! Immer werden Figuren genau dargestellt). Entsprechend sollten für Konstruktionen nicht nur Zirkel und Lineal zugelassen sein.

2. Immer wieder sollte die Wechselbeziehung zwischen Konstruktionen und Begriffen bzw. Sätzen angesprochen und deutlich gemacht werden. So führen Konstruktionsaufgaben zu Begriffsbildungen, und Begriffsbildungen ergeben sich aus Konstruktionsaufgaben. Entsprechend führen häufig Konstruktionsaufgaben auf Sätze, umgekehrt ergeben sich Konstruktionen aus Sätzen.

3. Bei der Erarbeitung von Konstruktionen sollten Module verwendet werden, um die neuen Ideen möglichst deutlich hervortreten zu lassen und die Schüler davor zu bewahren, sich in Einzelheiten zu verlieren.

4. Das Beziehungsgefüge zwischen Konstruktionen sollte den Schülern bewußtgemacht werden.

5. Die Schüler sollten einige zentrale Konstruktionsaufgaben als „echte“ Probleme erfahren und angemessene heuristische Strategien zum Lösen solcher Probleme kennenlernen.

6. Man sollte versuchen, den Schülern an einigen Beispielen deutlich zu machen, wie man Konstruierbarkeitsfragen entscheiden kann.

Im folgenden will ich zeigen, wie man ein solches Konzept in einem gestuften Aufbau des Geometrieunterrichts realisieren kann. Das besondere Gewicht soll dabei auf der Stufe des lokalen Ordnens liegen.

4. Behandlung von Konstruktionsaufgaben in Stufen

Es ist zweckmäßig, zunächst von „Zeichnen“ zu sprechen. Andererseits erscheint es aber doch notwendig, später von „Konstruieren“ zu reden. Damit muß jedoch keine Beschränkung auf bestimmte Zeichengeräte verbunden sein.

Nun betrachten wir folgende Stufen:

K 1: *Zeichnen von Figuren*

Die Schüler zeichnen freihändig, mit Schablonen oder mit dem Geodreieck und dem Zirkel Figuren und Muster, um damit die Vielfalt leicht erzeugbarer Formen zu erfahren.

K 2: *Zeichnen von Figuren mit bestimmten Eigenschaften*

Durch Zeichnungen auf dem Karogitter oder mit Geo-Dreieck und Zirkel erzeugen die Schüler Figuren mit bestimmten Eigenschaften.

K 3: *Zeichenpläne als Problemlösungen*

Die Schüler erfahren, daß sich bei bestimmten geometrischen Problemen eine Lösung ergibt, die schrittweise gezeichnet werden kann. Dabei stützt sich der Plan für eine solche Zeichnung auf bereits gelöste Zeichenprobleme und bewiesene Figureneigenschaften. In diesem Zusammenhang ist es sinnvoll, von Konstruktionen zu sprechen.

K 4: *Lokales Ordnen von Konstruktionen*

Hier werden Zusammenhänge zwischen Konstruktionen deutlich. Die Schüler lernen mögliche Hierarchien von grundlegenden Konstruktionsaufgaben kennen.

K 5: *Kritische Betrachtung von Konstruktionen*

Dabei geht es darum, an einigen Beispielen grundlegende Verfahren kennenzulernen, wie man z.B. Konstruierbarkeitsfragen entscheiden kann. Insbesondere sollte hier auch auf die klassischen Probleme eingegangen

werden.

Die ersten beiden Stufen sind der Grundschule und der Orientierungsstufe zuzuordnen; K 3 und K 4 lassen sich in der Sekundarstufe 1 realisieren, K 5 sinnvoll erst in der Sekundarstufe 2. Die genannten Stufen lassen sich ohne Schwierigkeiten mit den von GRIESEL genannten Stufen in Verbindung bringen. Ich will hier nicht näher darauf eingehen, weil wesentliche Aspekte dieses Planes bereits in Schulbüchern zu finden sind (vgl. HOLLAND 1988). Dagegen möchte ich im folgenden näher die 4. Stufe beleuchten. Hierbei geht es allerdings weniger um die unterrichtliche Realisierung als vielmehr um eine Skizze möglicher Überlegungen.

5. Lokales Ordnen von Konstruktionen

Zunächst betrachten wir als Konstruktionsvorrat, an dem lokal geordnet werden soll, die Konstruktionen:

GER: Zeichnen der Verbindungsgeraden zweier Punkte,
KR: Zeichnen eines Kreises mit gegebenem Mittelpunkt und Radius,

STH: Halbieren einer Strecke,

WIH: Halbieren eines Winkels,

SE: Errichten der Senkrechten zu einer Geraden durch einen Punkt der Geraden,

LO: Fällen des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade,

PA: Zeichnen der Parallelen zu einer Geraden durch einen Punkt,

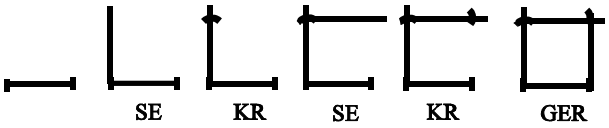
GDR: Zeichnen eines gleichseitigen Dreiecks,

QUA: Zeichnen eines Quadrats.

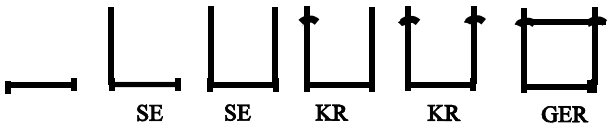
Wenn man über den ganzen Vorrat von Konstruktionen verfügt, dann kann

man sich z.B. leicht klarmachen, daß man für die Konstruktion der zuletzt genannten Aufgabe QUA zahlreiche verschiedene Wege einschlagen kann. Dafür einige Beispiele. Um den theoretischen Charakter unserer Betrachtungen zu betonen, werde ich lediglich Freihandskizzen verwenden. (Ich bin mir allerdings dessen bewußt, daß ich damit ein „Tabu“ breche!) Solche Freihandskizzen sind in Briefen und Skripten von Mathematikern allerdings die Regel!

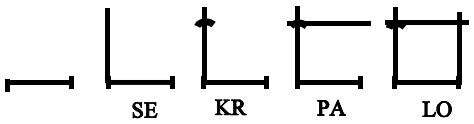
Mit GER, KR und SE erhält man:



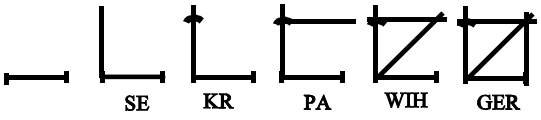
Die gleichen Konstruktionen in anderer Reihenfolge ergeben:



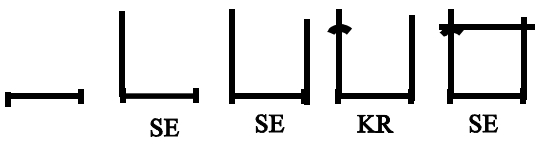
Mehr Varianten enthält:



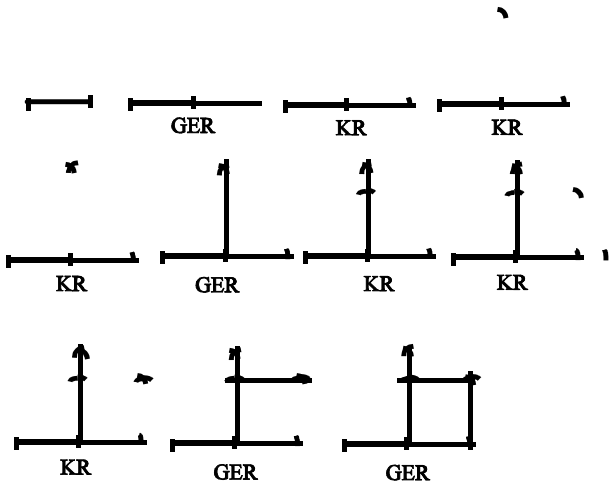
oder noch mehr:



Man kann natürlich auch möglichst häufig SE verwenden:



Eine Konstruktion nur mit GER und KR ist z.B.



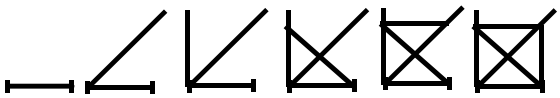
Dies wäre z.B. eine klassische Konstruktion allein mit Zirkel und Lineal.

Andererseits kann man weiter mit der Modultechnik arbeiten, inedm man neue Konstruktionen erschließt, die man dann als Module benutzt. So kann man etwa zunächst die Konstruktionsaufgabe lösen:

WI_{45}: Einen Winkel von 45° zeichnen.

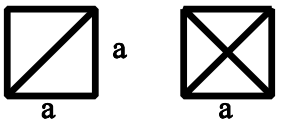
Dazu zeichnet man eine Gerade, nimmt dann einen Punkt auf ihr an, zeichnet

durch ihn die Senkrechte und halbiert den rechten Winkel. Mit WI_{45} kann man das Quadrat wie folgt zeichnen:



Hier wurde also ein Modul fünfmal nacheinander angewendet. Betrachtet man das Quadrat als besonderes Viereck, dann ergibt sich auch von daher eine neue Sicht der Konstruktionen. Kennt man z.B. eine Rechteckskonstruktion, so braucht man sie nur auf den Spezialfall anzuwenden. Entsprechendes gilt für das Quadrat als Sonderfall der Raute. Allgemein beherrscht man im „Haus der Vierecke“ mit der Konstruktion eines Vierecks zugleich die Konstruktion der Sonderfälle dieses Vierecks.

Andere Konstruktionsmöglichkeiten ergeben sich schließlich, wenn man nach „Bausteinen“ der Figur sucht. So kann man ein Quadrat auf verschiedene Weisen aus Dreiecken zusammensetzen.



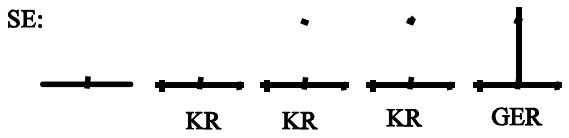
Im ersten Fall muß man nur zweimal ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Kathete a konstruieren; im zweiten Fall zeichnet man viermal eine gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse a. In beiden Fällen führt man die neue Konstruktion auf die Konstruktion eines Bausteins zurück. Hier wird die Modultechnik besonders deutlich. Die große Zahl von Möglichkeiten zur Konstruktion des Quadrats hängt natürlich mit den zahlreichen Symmetrien dieser Figur zusammen.

Bei allen drei Betrachtungen beobachtet man das Prinzip: Bei neuen Konstruktionsaufgaben kann man sich auf bekannte Konstruktionsaufgaben stüt-

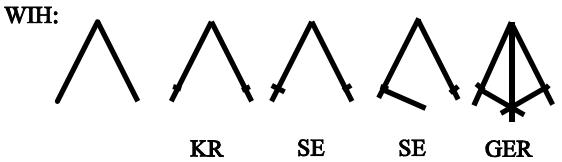
zen. Dies kann man natürlich auch konsequent auf den obigen Vorrat von Konstruktionen anwenden. Wir beschränken uns dabei auf die Grundkonstruktionen GER, KR, STH, WIH, SE, LO, PA.

Wie könnte für sie ein Aufbau mit Hilfe von Modulen aussehen?

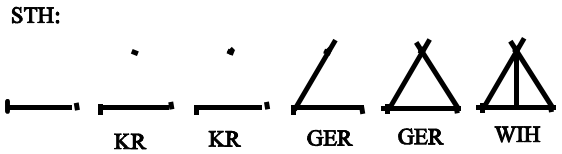
Beginnen wir mit SE. Eine mögliche Konstruktion ist:



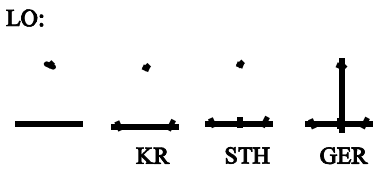
Sie stützt sich also auf KR und GER. Bei WIH kann man SE verwenden:



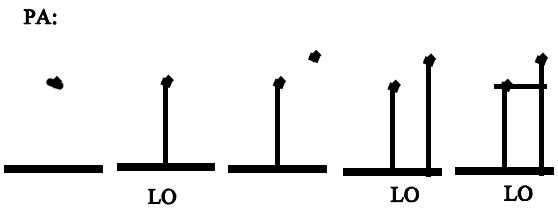
Mit WIH kann man die Aufgabe STH lösen:



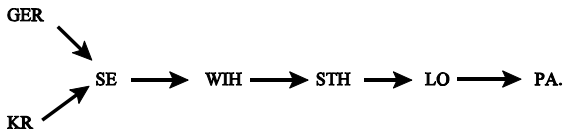
Mit STH erhält man LO wie folgt:



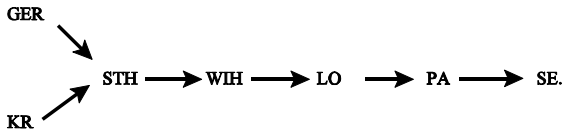
Schließlich erhält man mit LO auch PA:



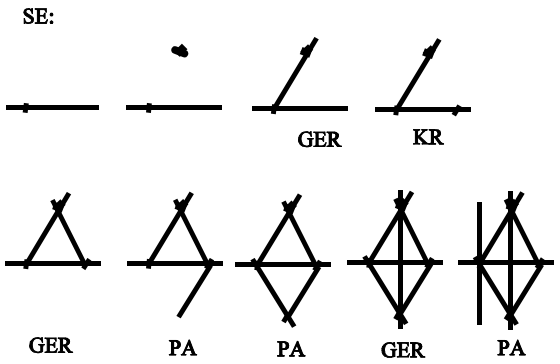
Also ergibt sich folgened Hierarachie von Konstruktionen:



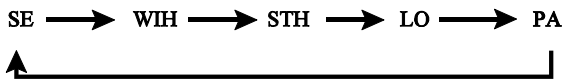
Ohne große Schwierigkeiten kann man andere Hierarchien finden, z.B.:



Bei der ersten Hierarchie kann man übrigens von PA auch wieder zu SE kommen:



Damit bilden unter Verwendung von GER und KR die übrigen Konstruktionen einen Zyklus

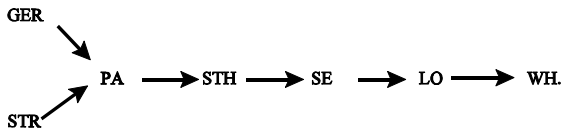


d.h. jede Permutation der SE, WIH, STH, LO, PA liefert eine mögliche Kette sich aufeinander beziehender Konstruktionen.

Wie sieht es nun mit den beiden Konstruktionen GER und KR aus? Natürlich kann man jede der anderen Konstruktionen allein auf die beiden zurückführen. Das ist ja aber gerade der Weg, den wir hier nicht gehen wollten.

Die Frage, ob man bei den beiden Konstruktionen GER und KR die eine auf die andere zurückführen kann, hat einiges Interesse gefunden (s. BIEBERBACH 1952). Betrachtet man unsere Lösungen, so sieht man, daß man KR verwendet, um eine Strecke abzutragen und um zu zwei Punkten einen Punkt zu finden, der von ihnen gleich weit entfernt ist. Ersetzt man KR durch die Forderung, eine Strecke abtragen zu können (STR), dann kann man mit Hilfe etwas kom-

plizierterer Überlegungen die Hierarchie begründen (s. FLADT 1957, S. 122-123).



Bisher haben wir bewußt die Frage der Zeichengeräte ausgeklammert. Wenn man GER durch ein Lineal, KR durch einen Zirkel und STR durch einen „Streckenabtrager“ realisiert denkt, dann erhält man die Aussage, daß unser Vorrat von Konstruktionen mit Lineal und Streckenabtrager allein ausführbar ist.

Wir haben die Konstruktionsschritte jeweils nur skizziert. Diese Konstruktionen setzen natürlich die zugehörige Geometrie voraus. Bereits bei HILBERT (1977[12]) ist vorgezeichnet, wie man die Verbindung von den Konstruktionen zu den Axiomen der Geometrie herstellen kann, um Konstruierbarkeitsfragen zu entscheiden. Solche Überlegungen sind allerdings allenfalls in der Sekundarstufe 2 sinnvoll.

6. Didaktische Überlegungen

Wir wollen nun das lokale Ordnen der Konstruktionen für den Unterricht in Analogie zum lokalen Ordnen von Sätzen betrachten. Beim lokalen Ordnen von Sätzen wird ein bestimmter Satzvorrat analysiert, z.B. Sätze über Parallele (FLADT 1955), Winkelsätze (GRIESEL 1963), besondere Linien im Dreieck (FREUDENTHAL 1973), Sätze über die Raute (WITTMANN 1974).

Entsprechend betrachtet man beim lokalen Ordnen von Konstruktionen einen

bestimmten Konstruktionsvorrat. Das können wie oben die Grundkonstruktionen sein, aber auch verschiedene Konstruktionen einzelner Figuren, wie z.B. das Quadrat. Allgemeiner kann man die Konstruktionen der Viereckstypen oder die der ebenen Vielecke betrachten. Insbesondere lassen die regelmäßigen Vielecke zahlreiche verschiedene Lösungen erwarten.

Zunächst wird man das „Beziehungsgefüge“ erarbeiten (GRIESEL), indem man unterschiedliche Hierarchien herausfindet. Wie wir gesehen haben, ist das bei den Konstruktionen eine sehr ergiebige, für die Schüler leicht zugängliche Fragestellung.

Das „Aufstellen einer Ausgangsbasis“ (GRIESEL) führt ebenso wie bei den Sätzen auch bei den Konstruktionen auf Axiome, in denen die Lösbarkeit bestimmter Konstruktionsaufgaben gefordert wird. Obwohl natürlich wegen der engen Beziehung zwischen Konstruktionen und Sätzen auch der axiomatische Aufbau der Geometrie im Zusammenhang mit dem Aufbau der Konstruktionen gesehen werden muß, erscheint es mir doch sinnvoller, hier die geometrische Axiomatik intuitiv vorauszusetzen und nur auf die Konstruktionen zu achten. Bei der Begründung der Konstruktionen greift man ohnehin auf Sätze zurück. Also ist es zweckmäßiger, erst nach dem Ordnen von Konstruktionen auch auf das lokale Ordnen der angesprochenen Sätze einzugehen. Hinweise auf die Bedeutung der Beziehung zwischen Konstruktion und Satz für das lokale Ordnen von Sätzen finden sich bei WITTMANN (1974), wenn er Konstruktionen des Rechtecks diskutiert.

Bei der Diskussion der Ausgangsbasis bietet sich eine Kopplung mit der Frage der Instrumente an. Denn die Entscheidung für GER und KR als Ausgangsbasis läßt sich zugleich deuten als Entscheidung für Konstruktionen mit Lineal und Zirkel.

Nach der Wahl einer Ausgangsbasis ist ein modularer Aufbau der Konstruktion zu leisten, bei dem Konstruktionen unter Verwendung möglichst „leistungsfähiger“ Module durchgeführt werden sollen. Dazu bieten sich zahlreiche, einfach zu findende Wege an, so daß die Schüler hier wirklich eigenständige

individuelle Leistungen erbringen können, die man anschließend unter verschiedenen Aspekten diskutieren wird. Bei den Begründungen der Konstruktionen wird man sich auf die entsprechenden Sätze beziehen, wobei es nicht erforderlich ist, Begründungen hinzuschreiben (Ich habe das oben ja auch nicht getan!). Damit werden geometrische Sätze in Erinnerung gerufen (Wiederholung!) und einfache Beweise geübt. Indem man den algorithmischen Aspekt hervorhebt, schafft man zugleich Ansatzpunkte für das Arbeiten mit dem Computer.

7. Literatur

Athen-Griesel, Mathematik heute 8, Hannover 1975[2]

Athen-Griesel, Mathematik heute 8, Hannover 1981

Baptist, P., Nagel-Punkte und Eulersche Geraden, DdM 10 (1982) S.114-122

Bieberbach, L., Theorie der geometrischen Konstruktionen, Basel 1952

Böhm, W., Theorie und Praxis, Würzburg 1985

Enriques, F. (Hrsg.), Fragen der Elementargeometrie, II.Teil, Leipzig 1907

Euklid, Die Elemente, Buch I-XIII, Hrsg. C. Thaer, Darmstadt 1962

Fiedler, J., A.H. Brettner's Lehrbuch der Geometrie, Ratibor 1867

Fladt, K., Ein Kapitel Axiomatik: Die Parallelenlehre, Frankfurt 1964[2]

Fladt, K., Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Elementargeometrie 1, Stuttgart 1957

Fladt, K., Los von Euklid oder hin zu Euklid?, MU 1, Heft 1 (1955), S.5-10

Freudenthal H., Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 2, Stuttgart 1973

Freudenthal, H., Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?, MU 9, Heft 4, (1963), S.5-29

Griesel, H., Lokales Ordnen und Aufstellen einer Ausgangsbasis, ein Weg zur Behandlung der Geometrie der Unter-und Mittelstufe, MU 9, Heft 4 (1963), S.55-65

Herterich, K., Die Konstruktion von Dreiecken, Stuttgart 1986

Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Stuttgart 1977[12]

Hjelmslev, J., Geometrische Experimente, Leipzig 1915

Holland, G., Die Bedeutung von Konstruktionsaufgaben für den Geometrieunterricht, MU 20, Heft 1 (1974), S.71-86

Holland, G., GEOCON, eine lernfähige Lernumgebung für geometrische Konstruktionen, BMU 1989, 203-206

Holland, G., Geometrie in der Sekundarstufe, Mannheim 1988

Klein F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Bd. 3, Berlin 1928

Lietzmann, W., Methodik des mathematischen Unterrichts, II. Teil, Leipzig 1922

MA-Report, The Teaching of Geometry in Schools, London 1923

Reidt-Wolff, Die Elemente der Mathematik, Aufgabensammlung Bd. 2, Hannover 1957

Reidt-Wolff-Athen, Elemente der Mathematik, Mittelstufe 2, Paderborn 1965

Schreiber, P., Grundlagen der konstruktiven Geometrie, Berlin 1984

Schumann, H., Der Computer als Werkzeug zum Konstruieren im Geometrieunterricht, ZDM 20 (1988), 248-262

Steiner, J., Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833

Vollrath, H.-J., Geometrielernen in der Hauptschule, in H.-J. Vollrath, (Hrsg.), Geometrie, Stuttgart 1982, S.7-18

Weidig, I., Stufungen im Geometrieunterricht der Hauptschule, in: H.-J. Vollrath (Hrsg.), Geometrie, Stuttgart 1982, S.19-30

Wittmann, E.,Ch., Themenkreismethode und lokales Ordnen, MU 20, Heft 1 (1974), S.5-18

Wolff: Des Freyherrn von Wolf Neuer Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften, J.T. Mayer, K.Ch. Langsdorf (Hrsg.), Marburg 1797

Zeitler, H., Kreisgeometrie in Schule und Wissenschaft oder: klassische und moderne Kreisgeometrie, DdM 11 (1983) S.169-201