PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen
J.Berthold

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße
Lahnberge

30.November 2006

7. Übung zu „Grundlagen der funktionalen Programmierung“,

Abgabe: 7.Dezember 2006 vor der Vorlesung **WS06/07**

Aufgaben

7.1 Beweisen Sie die **syntaktische Korrektheit der Typrekonstruktion**: $\boxed{\text{6 Punkte}}$

Für alle Ausdrücke $e \in Expr+$ sowie $V \subset TVar, A \in TAss$ gilt:

$$TR(V, A, e) = (V', \varphi, \tau) \curvearrowright \hat{\varphi} \circ A \rhd' e : \tau$$

falls $free(e) \subset Def(A), FV(A) \subset V$ ist.

Begründen Sie zunächst für Typsubstitutionen φ, dass $A \rhd' e : \tau \curvearrowright \hat{\varphi} \circ A \rhd' e : \hat{\varphi}(\tau)$.

7.2 Semantik der While-Schleife $\boxed{\text{6 Punkte}}$

Seien A eine Menge, $p : A \rightarrow Bool$ und $f : A \rightarrow A$. $[A \dashrightarrow A]$ bezeichne die Halbordnung der partiellen Funktionen über A mit

$$h_1 \leq h_2 \quad :\Leftrightarrow \quad graph(h_1) \subseteq graph(h_2)$$

Das Funktional $\Phi : [A \dashrightarrow A] \rightarrow [A \dashrightarrow A]$ sei gegeben durch:

$$\Phi(h) := a \mapsto \text{if } p(a) \text{ then } h(f(a)) \text{ else } a$$

Zeigen Sie:

(a) Φ ist monoton, d.h. für alle $h_1, h_2 : A \dashrightarrow A$ gilt: $h_1 \leq h_2 \Rightarrow \Phi(h_1) \leq \Phi(h_2)$

(b) Für die nirgends definierte Funktion $f_\emptyset : A \dashrightarrow A$ mit $Def(f_\emptyset) = \emptyset$ gilt für alle $n \geq 0$:

$$\Phi^n(f_\emptyset) \leq \Phi^{n+1}(f_\emptyset)$$

(c) Die kleinste obere Schranke g der Kette $(\Phi^n(f_\emptyset) \mid n \in \mathbb{N})$ mit

$$graph(g) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} graph(\Phi^n(f_\emptyset))$$

ist kleinster Fixpunkt von Φ, d.h.

i. g ist Fixpunkt von Φ: $\Phi(g) = g$.

ii. Für jeden Fixpunkt $\tilde{g}$ von Φ gilt: $g \leq \tilde{g}$.