PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen
J.Berthold

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße
Lahnberge

31.Mai 2007

6. Übung zur Vorlesung "Parallele Algorithmen", Sommer 07

Abgabe: 6.Juni 2007 vor der Vorlesung

Dieses Blatt ist bereits am Mittwoch, den 6.6. abzugeben.

Aufgaben

6.1 **Rekursiver Aufbau von Sortiernetzwerken** 4 Punkte

In der Vorlesung wurde das Sortiernetzwerk in Bottom-Up-Sicht aus elementaren Komparatorbausteinen aufgebaut. Formulieren Sie in dieser Aufgabe die Top-Down-Sicht: das Odd-Even-Merge-Sortierverfahren in zwei rekursiven Funktionen.

Definieren Sie rekursive Funktionen `oemerge` zur Realisierung eines (n, n)-Mergers für zwei sortierte Listen der Länge n, sowie `oemsort` zur Sortierung von Zahlenlisten der Länge 2^k $(k \geq 0)$. Sie können Haskell-Syntax oder Schreibweisen der Mathematik verwenden. Definieren Sie ggf. auch die verwendeten Hilfsfunktionen.

6.2 **Bitonisches Sortieren** 8 Punkte

Eine Variante des in der Vorlesung besprochenen *Odd-Even-Merge Sort* ist das *bitonische Sortieren*. Eine Folge von ganzen Zahlen $(a_i)_{i\in\{0...n-1\}}$ heißt *bitonisch*, falls sie durch eine zyklische Verschiebung in eine aufsteigenden Teilfolge gefolgt von einer absteigenden Teilfolge transformiert werden kann, d.h.:

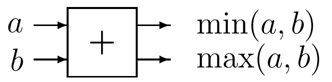
1. $\exists i_0 \in \{0 \dots n-1\}$: $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{i_0} \geq a_{i_0+1} \geq \dots \geq a_{n-1}$

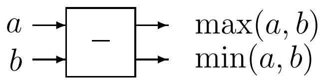
oder 2. $\exists k \in \{0 \dots n-1\}$: die Folge $(a_{(i+k) \mod n})_{i\in\{0...n-1\}}$ (zyklische Verschiebung um k) erfüllt Bedingung 1

Eine zweielementige Folge ist stets bitonisch.

(a) Beweisen Sie den folgenden **Satz**:
Seien $n = 2^l$ mit $l > 0$ und $(a_i)_{i\in\{0...n-1\}}$ bitonische Folge.
Dann sind die Folgen $b_i = \min(a_i, a_{\frac{n}{2}+i})$ und $c_i = \max(a_i, a_{\frac{n}{2}+i})$ *ebenfalls bitonisch* (wobei $(i \in \{0 \dots \frac{n}{2}-1\})$). Weiter gilt: $b_j \leq c_k \forall j, k \in \{0 \dots \frac{n}{2}-1\}$
Sie können zur Vereinfachung von einer Liste ohne Verschiebung um k Stellen ausgehen.

(b) Skizzieren Sie ein Sortiernetzwerk, das mit aufsteigend und absteigend sortierenden *Komparatorbausteinen* aus einer beliebigen Folge zunächst rekursiv eine bitonische Folge herstellt und diese danach (nach Aussage des Satzes) sortiert.





(c) Wie viele Schritte und elementare Bausteine benötigt das bitonische Sortierverfahren? Vergleichen Sie das Verfahren mit dem Sortiernetzwerk der Vorlesung.