PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen
Dipl.Inf. J.Berthold

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße

24.November 2004

Übungen zu „Semantik von Programmiersprachen“, WS 2004/05

Nr. 5, Besprechung mündlicher Aufgaben: 29. November 2004 in der Übung,
Abgabe der Hausaufgaben: 1. Dezember 2004 vor der Vorlesung

Mündliche Aufgaben

5.1 (a) Geben Sie eine Teilmenge von $\Sigma \dashrightarrow \Sigma$ an, für die keine obere Schranke bzgl. der Halbordnung der Graphinklusion $\sqsubseteq$ existiert.

(b) Sei $(M, \ll)$ eine beliebige Halbordnung. Zeigen Sie:
Das bzgl. $\ll$ kleinste Element von M ist *eindeutig bestimmt*, falls es existiert.

5.2 Seien $(D, \sqsubseteq)$ und $(D', \sqsubseteq')$ zwei CCPOs und $f : D \to D'$. Somit existieren für alle Ketten $Y \subseteq D$ und $Y' \subseteq D'$ die Suprema bezüglich $\sqsubseteq$ und $\sqsubseteq'$, die hier mit $\bigsqcup Y$ und $\bigsqcup' Y'$ bezeichnet sind.

Zusätzlich gelte für alle nicht-leeren Ketten $Y \subseteq D$:

$$\bigsqcup{}'\{f(d) \mid d \in Y\} = f(\bigsqcup Y)$$

(a) Zeigen Sie: f ist monoton.

(b) Falls außerdem gilt: $f(\bigsqcup \emptyset) = \bigsqcup'(\emptyset)$, heißt f *strikt*.
Geben Sie eine Abbildung f über geeigneten Mengen an, welche die obigen Voraussetzungen erfüllt, aber nicht strikt ist.

5.3 Gegeben sei das semantische Funktional

$$\Phi(f) = \sigma \mapsto \begin{cases} f(\sigma[X \to 2 \cdot \sigma(X)]) & \text{, falls} \quad \sigma(X) \neq 0 \\ \sigma & \text{, falls} \quad \sigma(X) = 0 \end{cases}$$

(a) Geben Sie ein Kommando an, aus dem sich dieses Funktional für die denotationelle Semantik ergibt.

(b) Bestimmen Sie die Menge $M_\Phi(f) = \{\Phi^n(f) \mid n \in \mathbb{N}\}$ für beliebige f.

(c) Geben Sie den Fixpunkt $FIX\,\Phi$ an.

Schriftliche Aufgaben

5.4 Bestimmen Sie die denotationelle Semantik der Anweisung $\boxed{\text{4 Punkte}}$

$$Z := 0;\ \textbf{while}\ Y \leq X\ \textbf{do}\ (\text{Z:=Z+1;X:= X-Y}).$$

Bitte wenden!

5.5 Sei $(D, \sqsubseteq)$ eine kettenvollständige Halbordnung mit kleinstem Element $\bot_D := \bigsqcup \emptyset$. $\boxed{\text{8 Punkte}}$
Die Menge der *Listen über* D, $L(D)$, ist induktiv definiert durch:

- $[\,] \in L(D)$ (die *leere Liste*) und
- mit $d \in D \cup L(D)$ und $l \in L(D)$ ist $(d : l) \in L(D)$.

Sei $\bot$ ein neues Symbol. Wir erweitern mit der folgenden Definition $\sqsubseteq$ induktiv auf $L(D)_\bot := L(D) \cup \{\bot\}$:

- für alle $l \in L(D)_\bot$ sei $\bot \sqsubseteq l$ und $l \sqsubseteq l$, sowie
- $(d : l) \sqsubseteq (d' : l')$ genau dann, wenn $d \sqsubseteq d'$ und $l \sqsubseteq l'$.

(a) Zeigen Sie, dass $(L(D)_\bot, \sqsubseteq)$ eine kettenvollständige Halbordnung mit kleinstem Element $\bot$ ist. / 3

(b) Weisen Sie nach: Ersetzt man in der induktiven Erweiterung der Relation $\sqsubseteq$ das Symbol $\bot$ durch $[\,]$ oder $(\bot_D : [\,])$, so sind die entsprechenden Halbordnungen nicht kettenvollständig. / 2

(c) Zur Manipulation von Listen verwenden wir die Funktionen / 3
tail $: L(D)_\bot \to L(D)_\bot$ und *cons* $: L(D)_\bot \times L(D)_\bot \to L(D)_\bot$ mit

$$tail(l) = \begin{cases} l' & \text{falls } l = (d : l') \\ \bot & \text{sonst.} \end{cases} \qquad cons(d, l) = \begin{cases} (d : l) & \text{falls } d, l \in L(D) \\ \bot & \text{sonst.} \end{cases}$$

für alle $d, l \in L(D)_\bot$.
Beweisen Sie, dass *tail* und *cons* in $(L(D)_\bot, \sqsubseteq)$ stetig sind.