PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen
J.Berthold

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße

30.Mai 2006

6. Übung zu "Semantik von Programmiersprachen", SS 2006

Abgabe schriftlicher Aufgaben: **Di, 7.Juni 2006 (vor der Vorlesung)**
Besprechung mündlicher Aufg.: **Do, 1.Juni 2006**

Mündliche Aufgaben

6.1 Funktionale und Fixpunkte

(a) Bestimmen Sie das Funktional $\Phi_c : (\Sigma - \to \Sigma) \to (\Sigma - \to \Sigma)$ zu folgender Anweisung:

$$c \equiv \textbf{ while } \neg(X = 0) \textbf{ do } X := X - 1$$

(b) Welche der folgenden Funktionen sind *Fixpunkte des Funktionals*?

$g_1(\sigma) = \sigma$

$g_2(\sigma) = \sigma[X \to 0]$

$g_3(\sigma) = \text{ undef. } \forall \sigma \in \Sigma$

$$g_4(\sigma) = \begin{cases} \sigma[X \to 0] & , \sigma(X) \geq 0 \\ \text{undef.} & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$g_5(\sigma) = \begin{cases} \sigma[X \to 0] & , \sigma(X) \geq 0 \\ \sigma & , \text{ sonst} \end{cases}$$

6.2 Graphinklusion

(a) Zeigen Sie: Die Graphinklusion $\sqsubseteq$ ist eine kettenvollständige Halbordnung auf der Menge der partiellen Zustandstransformationen $\{f : \Sigma - \to \Sigma\}$.

(b) Geben Sie eine Teilmenge von $\{f : \Sigma - \to \Sigma\}$ an, welche bzgl. der Graphinklusion $\sqsubseteq$ als Halbordnung kein Supremum besitzt.
Widerspricht dieses Beispiel dem Beweis in a)?

6.3 Kettenvollständige Halbordnungen

(a) Sei $M \neq \emptyset$ beliebige Menge. Welche der folgenden Relationen sind kettenvollständige Halbordnungen?

i. Relation $\perp$ auf M, wobei $x \in M$ bel. fest

$$a \perp b :\Leftrightarrow a = x \vee a = b$$

ii. Relation $\supseteq$ auf P(M)

iii. Relation = auf M

iv. Relation $\setminus$ auf P(M):

$$A \setminus B :\Leftrightarrow B \neq M$$

(b) Definieren Sie eine kettenvollständige Halbordnung auf $\{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0\}$.

Bitte wenden!

Schriftliche Aufgaben

6.4 **Halbordnung der Graphinklusion** 6 Punkte

Sei $X \in Var$ und die partiellen Funktionen $g_1, g_2, g_3 : \Sigma \dashrightarrow \Sigma$ wie folgt definiert:

$$g_1(\sigma) = \begin{cases} \sigma & , \text{ falls } \sigma(X) \text{ Vielfaches von 4} \\ \text{undefiniert} & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$g_2(\sigma) = \begin{cases} \sigma[X \mapsto 32] & , \text{ falls } \sigma(X) = 11 \\ \text{undefiniert} & , \text{ falls } \sigma(X) = -11 \\ \sigma & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$g_3(\sigma) = \begin{cases} \sigma & , \text{ falls } \sigma(X) \text{ Vielfaches von 6} \\ \text{undefiniert} & , \text{ sonst} \end{cases}$$

(a) Ordnen Sie diese partiellen Funktionen gemäß der durch Graphinklusion gegebenen Halbordnung $(\Sigma \dashrightarrow \Sigma, \sqsubseteq)$.

(b) Bestimmen Sie eine partielle Funktion $g_4 \notin \{f_\emptyset, g_1, g_2, g_3\}$, so dass $g_4 \sqsubseteq g_1, g_2, g_3$.

(c) Bestimmen Sie eine obere Schranke g_5 der Menge $\{g_i \mid i = 1, 2, 3, 4\}$.

6.5 **Funktional einer Schleife** 6 Punkte

Betrachten Sie das folgende Fragment der Fakultätsberechnung:

$$\textbf{while } \neg(X = 1) \textbf{ do } (Y := Y * X; X := X - 1)$$

(a) Bestimmen Sie das durch diese Anweisung festgelegte Funktional

$$\Phi : (\Sigma \dashrightarrow \Sigma) \to (\Sigma \dashrightarrow \Sigma).$$

(b) Geben Sie mindestens zwei verschiedene Fixpunkte von Φ an.