**PHILIPPS-UNIVERSITÄT MARBURG**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. R. Loogen
J.Berthold

D-35032 Marburg
Hans Meerwein Straße

6.Juni 2006

# 7. Übung zu "Semantik von Programmiersprachen", SS 2006

**Abgabe schriftlicher Aufgaben: Di, 13.Juni 2006 (vor der Vorlesung)**
**Besprechung mündlicher Aufg.: Do, 8.Juni 2006**

---

## Mündliche Aufgaben

7.1 **Fixpunktbestimmung:** Gegeben sei das semantische Funktional

$$\Phi(f) = \sigma \mapsto \begin{cases} f(\sigma[X \to 2 \cdot \sigma(X)]) & \text{, falls } \sigma(X) \neq 0 \\ \sigma & \text{, falls } \sigma(X) = 0 \end{cases}$$

(a) Geben Sie ein Kommando an, aus dem sich dieses Funktional für die denotationelle Semantik ergibt.

(b) Bestimmen Sie die Menge $M_\Phi(f) = \{\Phi^n(f) \mid n \in \mathbb{N}\}$ für beliebige $f$.

(c) Geben Sie den Fixpunkt $fix\ \Phi$ an.

7.2 **Prä-Fixpunkte**
Sei $\mathcal{D}$ eine Halbordnung $(D, \sqsubseteq)$ und $f : D \to D$. Dann heißt ein Element $a \in D$ *Prä-Fixpunkt* von $f$, wenn $a \sqsubseteq f(a)$ gilt.

Formulieren Sie Tarskis Fixpunktsatz neu, indem Sie einen Prä-Fixpunkt anstelle von $\perp$ verwenden. Beweisen Sie den neuen Satz.

## Schriftliche Aufgaben

7.3 Sei $(M, \sqsubseteq)$ eine kettenvollständige Halbordnung mit kleinstem Element $\perp_M := \bigsqcup \emptyset$. $\boxed{\text{7 Punkte}}$

Wir definieren induktiv die Menge $L$ der *Listen über* $M$ wie folgt:

- für die *leere Liste* $[\,]$ gelte $[\,] \in L$
- $\forall m \in M \cup L$ und $\forall l \in L$ ist $(m : l) \in L$.

Nun lässt sich $\sqsubseteq$ induktiv auf $L$ erweitern:

- Sei $l \sqsubseteq l\ \forall l \in L$
- $(x : l) \sqsubseteq (x' : l')$ $:\curvearrowleft$ $x \sqsubseteq x'$ und $l \sqsubseteq l'$ für $x, x' \in L \cup M$ und $l, l' \in L$.

(a) Naheliegend ist nun, die Definition durch $[\,] \sqsubseteq l\ \forall l \in L$ zu ergänzen. / 3
Zeigen Sie: Die dadurch entstehende Halbordnung ist nicht kettenvollständig.

(b) Zeigen Sie: Mit einem zusätzlichen Symbol $\perp$ und der Definition / 4

$$\perp \sqsubseteq l\ \forall l \in L_\perp := L \cup \{\perp\} \text{ (sonst wie oben)}$$

ist $\sqsubseteq$ kettenvollständige Halbordnung auf $L_\perp$ mit kleinstem Element $\perp$.

7.4 Bestimmen Sie die **denotationelle Semantik** der Anweisung $\boxed{\text{5 Punkte}}$

$$X := 0; \textbf{ while } Y \leq Z \textbf{ do } (\text{X:=X+1;Z:= Z-Y}).$$