

### Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 10 –

Abgabe Dienstag, 10.6.2008, 14 Uhr s.t.

**Aufgabe 35** (4 Punkte). Sei  $H$  ein komplexer Hilbertraum und  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_2(H)$  Hilbert-Schmidt-Operatoren. Zeigen Sie:

- a)  $T_1 T_2$  ist Spurklasse-Operator,
- b)  $\text{Spur}(T_1 T_2) = \text{Spur}(T_2 T_1)$ .

**Aufgabe 36** (4 Punkte). Seien  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_2(L^2(A))$  Hilbert-Schmidt-Integraloperatoren mit stetigem Kern  $k_1$  bzw.  $k_2$ , und  $A \subset \mathbb{R}^n$  sei kompakt. Zeigen Sie:  $T_2 T_1$  ist Spurklasse-Integraloperator mit Kern

$$k : (s, t) \mapsto \int_A k_2(s, \tau) k_1(\tau, t) d\tau$$

und

$$\text{Spur}(T_2 T_1) = \int_A k(t, t) dt .$$

**Aufgabe 37.** (Singularwertzerlegung des modifizierten Volterra-Operators) Sei  $I = [0, 1]$  und

$$T : L^2(I) \rightarrow L^2(I), f \mapsto \int_0^1 f .$$

- a) (2 Punkte) Zeigen Sie:  $T^* T$  ist injektiver Integraloperator auf  $L^2(I)$  mit Integral-Kern

$$h : (s, t) \mapsto \min(s, t)$$

- b) (4 Punkte) Formen Sie  $T^* T u = \lambda u$  in eine Differentialgleichung (mit Randbedingungen) um, und berechnen Sie damit die Eigenwerte  $\lambda_j$  und Eigenfunktionen  $u_j$  von  $T^* T$ .
- c) (2 Punkte) Geben Sie die Singularwertzerlegung von  $T$  an.
- d) (1 Punkte) Berechnen Sie  $\sum_j \lambda_j$  mit Aufgabe 36.