

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 3 –

Abgabetermin: Dienstag, 4.11.2008, 9 Uhr (vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (4 Punkte) : Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{n+1} - 1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} ;$$
$$\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} .$$

2. Aufgabe (3 Punkte) : Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(n) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } n = 1 , \\ 4 \cdot f\left(\frac{n}{2}\right) & , \text{ falls } n \text{ gerade} , \\ f(n-1) + 2 \cdot n - 1 & , \text{ sonst} . \end{cases}$$

Finden Sie eine geschlossene Form für $f(n)$, und beweisen Sie deren Richtigkeit mittels starker vollständiger Induktion.

3. Aufgabe (3 Punkte) : Zeigen Sie: \mathbb{N} und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sind gleichmächtig.

(Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f((a, b)) = 2^{a-1}(2b-1)$.)

4. Aufgabe (3 Punkte) : Vervollständigen Sie die folgende Tabelle für R derart, dass $R \subset M \times M$ mit $M := \{a, b, c, d, e\}$ zu einer Äquivalenzrelation wird, und geben Sie deren Äquivalenzklassen an.

R	a	b	c	d	e
a		1			
b					0
c	1				
d					
e				1	

Zusatzaufgabe (mündlich, keine Abgabe): Ein Konferenzhotel für Mathematiker hat genau \mathbb{N} Betten, d.h., die Menge der Betten ist gleichmächtig zu \mathbb{N} . Das Hotel ist bereits voll belegt, aber die Mathematiker lassen sich nach Belieben innerhalb des Hotels umquartieren. Das Hotel soll aus wirtschaftlichen Gründen stets voll belegt sein, und wenn möglich, sollen alle neu ankommenden Gäste untergebracht werden. Was macht man in folgenden Fällen?

- Ein weiterer Mathematiker trifft ein.
- Die Insassen eines Kleinbusses mit n Plätzen suchen Unterkunft.
- Ein Großraumbus mit \mathbb{N} Personen kommt an.

Fazit: Man übernachtet möglichst nicht in einem Mathematiker-Hotel, weil die Gefahr groß ist, häufig umziehen zu müssen!