Fachbereich Mathematik und Informatik

Prof. Dr. J. Hinz

Sommersemester 2009

Übungen zur Linearen Algebra II

- Blatt 7 -

Abgabetermin: Donnerstag, **18.6.2009**, 12.00 - 12.10 Uhr (vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (4 Punkte) : Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} ,$$

und geben Sie eine orthogonale Matrix U an, so dass $U^{-1}A\,U$ Diagonalgestalt hat.

2. Aufgabe (4 Punkte) : Es sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $<,>$ und zugehöriger Norm $\|\;\|$. Zeigen Sie: Für einen Endomorphismus $f \in L(V,V)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) f ist unitär (bzw. orthogonal) ;

b) $(\;\|x\| = 1 \implies \|f(x)\| = 1\;)$ für alle $x \in V$;

c) $\|x\| = \|f(x)\|$ für alle $x \in V$;

d) Für jedes ON-System $\{b_1, \ldots, b_r\}$ von V ist $\{f(b_1), \ldots, f(b_r)\}$ ein ON-System .

(Hinweise: Zu c) $\Longrightarrow$ d) : Betrachten Sie $||f(b_k + b_l)||^2$ für $k \neq l$. Zu d) $\Longrightarrow$ a) : Zeigen Sie $< f(x), f(y) >=< x, y >$ für linear abhängige und für linear unabhängige $x, y \in V$.)

3. Aufgabe (4 Punkte) : Im $\mathbb{R}^3$ - mit dem Standardskalarprodukt - sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch Multiplikation mit der Matrix

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass f normal ist. Geben Sie ihre Normalform gemäß Satz 6.17 an, und bestimmen Sie die zugehörige Orthonormalbasis.

Bitte wenden!

4. Aufgabe (4 Punkte) : Es seien V ein euklidischer Vektorraum mit $\dim V = n \geq 1$ und $f \in L(V,V)$ ein anti-selbstadjungierter Endomorphismus, d.h. mit $f^{ad} = -f$. Zeigen Sie: Es gibt eine Orthonormalbasis $B \subset V$ mit

$$f \quad \xrightarrow{B} \quad \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ & & 0 & & & \\ & & & Q_1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \cdots & & Q_s \end{pmatrix} ,$$

wobei $Q_j = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_j \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix}$ mit $\beta_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, s$.

5. Aufgabe (4 Punkte) : Es seien V ein euklidischer Vektorraum mit $\dim V = n$ und $f \in L(V,V)$ ein selbstadjungierter Endomorphismus mit den Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Die Abbildung $F : V \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$F(x) \;:=\; < x, f(x) > \qquad \text{für alle } x \in V \quad .$$

Zeigen Sie: Ist $B := \{x \in V;\, \|x\| = 1\}$ der Rand der "Einheitskugel" in V , so gilt:

$$\min_{x \in B} F(x) = \lambda_1 \quad , \quad \max_{x \in B} F(x) = \lambda_n .$$

Zusatzaufgabe (3+2=5 Punkte) : Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume mit Skalarprodukt, $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $U \subset W$ ein Unterraum von W . Zeigen Sie:

1) $f^*(U^\circ) \;=\; (f^{-1}(U))^\circ$.

(Hinweis: Betrachten Sie die Zerlegungen $V = f^{-1}(U) \oplus V_1$, $W = U \oplus f(V_1) \oplus W_1$, wählen Sie eine Basis $\{b_1, \ldots, b_r\}$ von V_1 und zeigen Sie, dass $\{f(b_1), \ldots, f(b_r)\}$ eine Basis von $f(V_1)$ ist.)

2) $f^{ad}(U^\perp) \;=\; (f^{-1}(U))^\perp$.