

Sei $\pi(x) = \#\{p \leq x : p \in \mathbb{P}, x \in \mathbb{R}\}$ die Anzahl der Primzahlen kleiner einer festen reellen Zahl

x . Wir betrachten $\log(x)$ den natürlichen Logarithmus und definieren diesen als

$$\log(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Als Nächstes vergleicht er die Fläche unter dem Graphen von $f(t) = \frac{1}{t}$ mit einer oberen Treppenfunktion.

Für $n \leq x \leq n+1$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $\log(x) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \leq \sum' m$, wobei die Reihe alle $m \in \mathbb{N}$, die nur Primteiler $p_i \leq x$ besitzt, aufsummiert.

Da m wie jede natürliche Zahl sich eindeutig als Produkt aus Vielfachen der Primteiler

darstellen lässt, ergibt sich $\sum' \frac{1}{m} = \prod_{p \leq x, p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^k} \right)$.

Die innere Summe $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^k}$ ist eine geometrische Reihe und hat somit den Grenzwert $\frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$.

Daraus ergibt sich die Ungleichung

$$\log x \leq \prod_{p \leq x, p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^k} \right) = \prod_{p \leq x, p \in \mathbb{P}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right) =$$

$$\prod_{p \leq x, p \in \mathbb{P}} \frac{p}{p-1} = \prod_{k=1}^{\pi(x)} \frac{p_k}{p_k-1}$$

Für $p_k \geq k+1$ folgt deshalb

$$\frac{p_k}{p_k-1} = 1 + \frac{1}{p_k-1} \leq 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}.$$

Es ergibt sich

$$\log(x) \leq \prod_{k \geq 0}^{\pi(x)} \frac{k+1}{k} = \pi(x) + 1.$$