Philipps-Universität Marburg

Fachbereich 12: Mathematik und Informatik

PS Über klassische Probleme der Mathematik

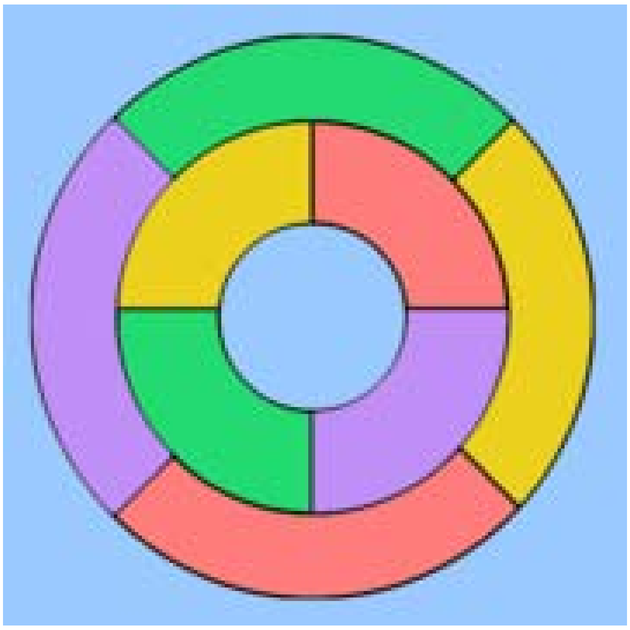
Leitung: Prof. Harald Upmeier, Benjamin Schwarz

Referentin: Sabrina Klöpfel

Wintersemester 2009/2010

Der Fünffarbensatz

Ausarbeitung des Seminarvortrags vom 04.11.09



Gliederung:

1. Einleitung

Die Frage mit der alles begann war:

Ob man jede Landkarte mit vier Farben färben kann, sodass keine aneinander angrenzenden Flächen die gleiche Farbe haben?

Dies fragte sich Francis Guthrie, ein Londoner Student 1852, als er die Grafschaften Englands einfärben wollte.

Da er keine Karte zeichnen konnte, für die er mehr als vier Farben brauchte schickte er die Frage an einen Professor.

Dieser wusste ebenfalls keine Antwort und schrieb an Sir William Rowan Hamilton (irischer Mathematiker und Physiker, Professor für Astronomie und königlicher Astronom für Irland): „Ein Student bat mich, ihm einen Beweis für eine Tatsache zu liefern, von der ich nicht einmal wusste, dass sie eine Tatsache ist, noch weiß ich es jetzt. Der Student sagt: Wenn man irgendeine (ebene) Figur nimmt und sie in Abteilungen aufteilt, die in verschiedenen Farben koloriert sind, sodass zwei nebeneinander liegende keine gemeinsame Farbe haben, dann sind vier Farben – so seine Behauptung – ausreichend."

Doch auch dieser wusste sich nicht zu helfen.

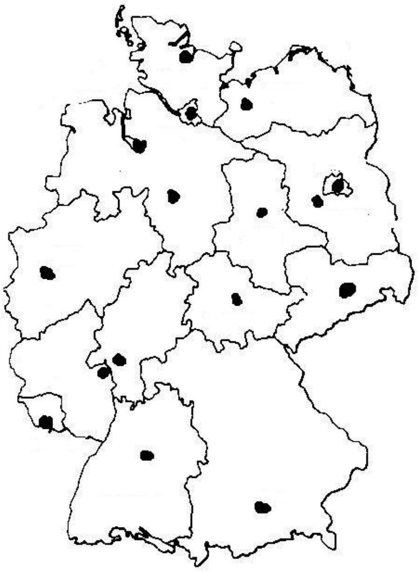
Die Frage wurde in der London Mathematical Society gestellt, 1879 antwortete Alfred Kempe, dass er einen Beweis habe. Die Achtung für ihn stieg seit dem so, dass er 1912 sogar zum Ritter geschlagen wurde.

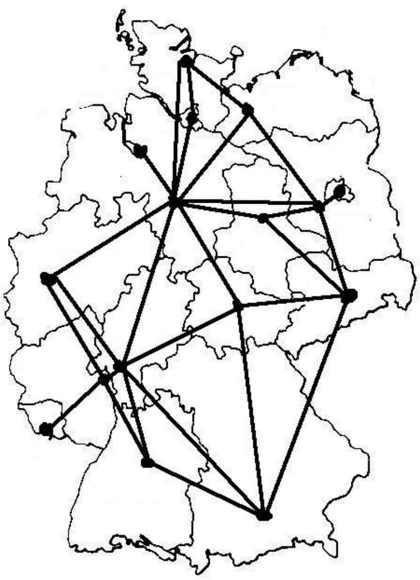
- 1890 fand Percy John Heawood jedoch einen Fehler. Aber er konnte mittels des fälschlichen Vier-Farben-Satz-Beweises den Fünf-Farben-Satz beweisen. Der Beweis für den Vier-Farben-Satz erfolgte erst 124 Jahre später mit einem PC.

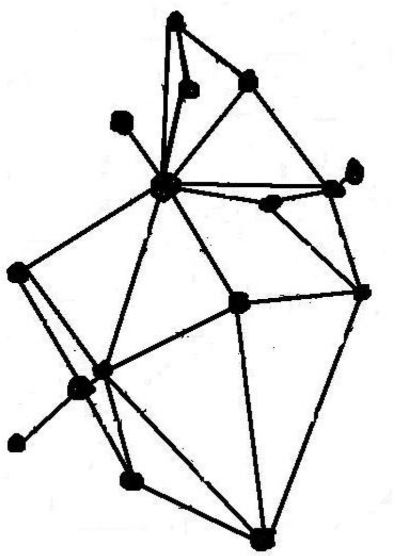
2. Übertragung des Färbungsproblems in die Graphentheorie

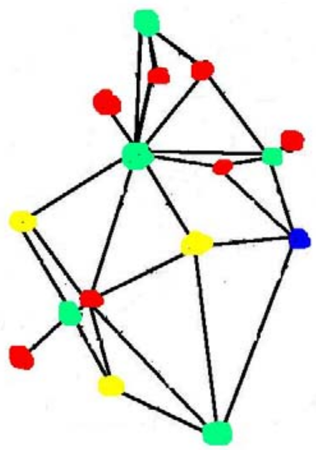
Da unser heutiges Ziel der Beweis des Fünf-Farbensatzes ist, überlegen wir uns nun wie man die Bundesländer Deutschlands in einen Graphen übertragen könnte um die Sache zu erleichtern.

Idee: -Landeshauptstädte verbinden







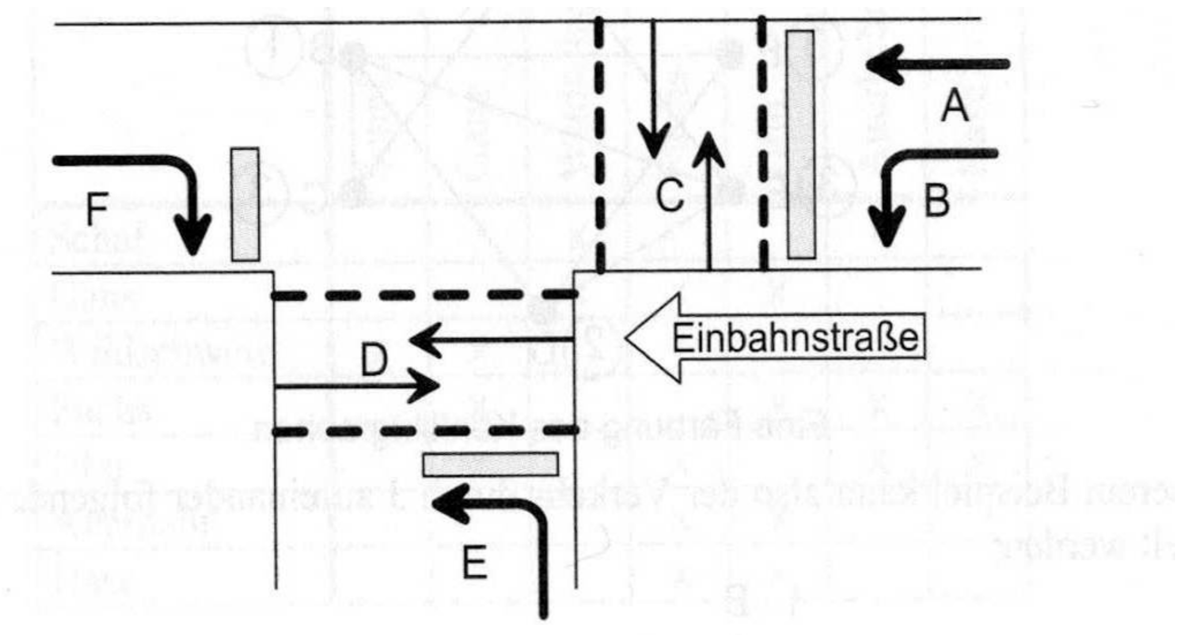


- Auch in unserem Beispiel sind wieder vier Farben die kleinste Anzahl von Farben die benötigt werden.

2.1. Gruppenarbeit: Minimierung von Ampelschaltungen

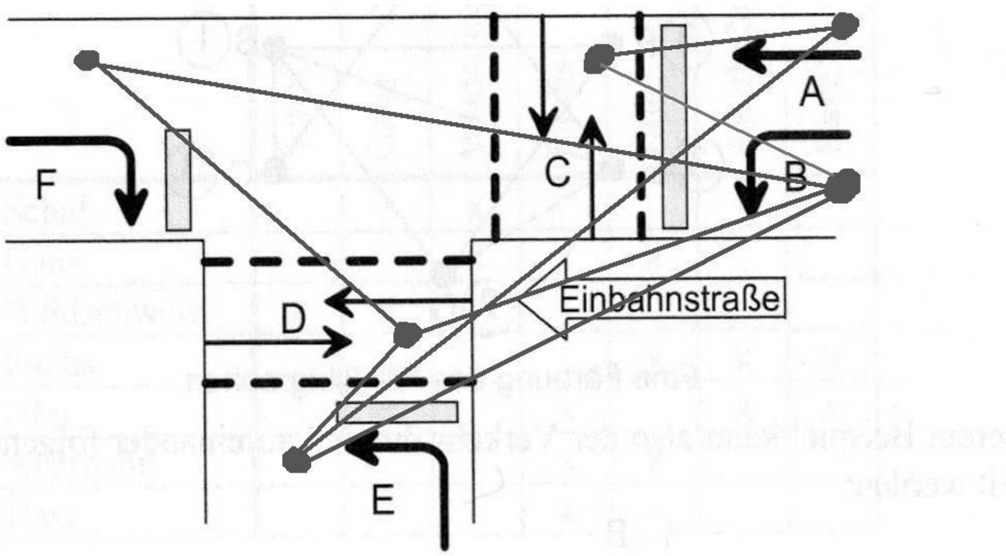
Dein Onkel, der bei der Verkehrsplanung gerade erst neu angefangen hat bittet dich als Mathestudent ihm unter die Arme zu greifen. Er glaubt mindestens fünf Ampelschaltungen zu benötigen, damit kein Verkehrsteilnehmer zu Schaden kommt. Nachdem du nun kennen gelernt hast wie man Karten in Graphen übertragen kann übe dich doch einmal an diesem Beispiel und versuche ihm einen Graphen aufzumalen, an dem er sehen kann, welche Verkehrsteilnehmer nicht gleichzeitig fahren können.

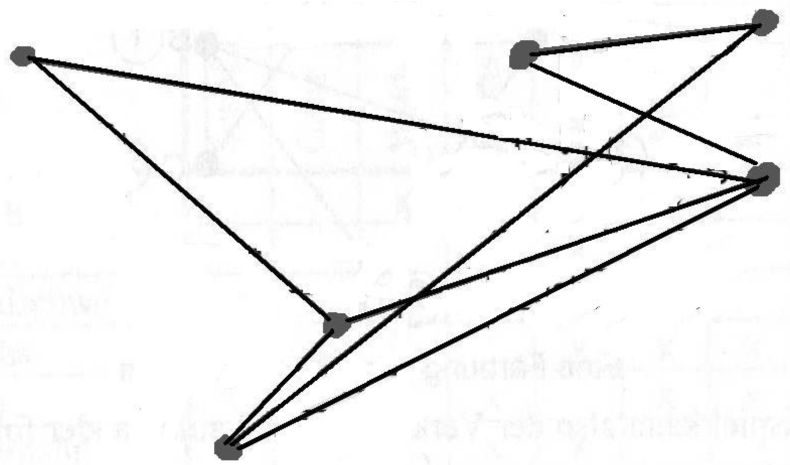
Kleine Hilfe: Die Ampelanlagen sollen verhindern, dass Fußgänger oder Fahrzeuge gleichzeitig unterwegs sind, wenn es zu Kollisionen kommen kann. In unserem Beispiel sollten A und C nicht gleichzeitig grün haben, während sich A und D nicht stören. Wir beschreiben die Situation mit einem Graphen: Den Ecken entsprechen die Verkehrsströme, und Kanten zeichnen wir dann, wenn sich die Verkehrsströme gegenseitig stören.

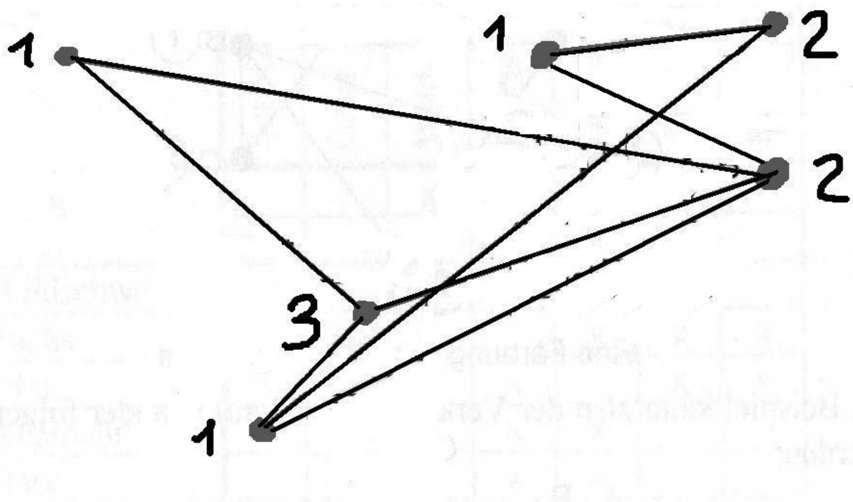


Literaturtipp: Nitzsche, M., Graphen für Einsteiger. Rund um das Haus vom Nikolaus, Wiesbaden (³2009).

Lösung:







Man braucht drei Ampelschaltungen um den Verkehrsfluss zu optimieren.

Grund: Graphen die Dreiecke enthalten brauchen immer
mindestens drei verschiedene Farben.

➢ nun können wir schon aus einer Landkarte einen Graphen konstruieren und ihn mit möglichst wenig Farben färben, aber wie hilft uns dies jetzt um zu zeigen, dass man alle Landkarten mit fünf Farben färben kann?

2.2. Zunächst einige Vokabeln

- **Unser Anfangsproblem lautet so: Die Knoten eines Graphen sollen so mit fünf Farben gefärbt werden, dass je zwei durch eine Kante verbundene Knoten verschiedene Farben haben:**

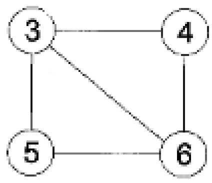
(a) Dazu müssen wir 1. wissen, dass Graphen, die aus Landkarten entstehen planar sind.

Erinnerung:

Planare oder plättbare Graphen

Ein Graph ist planar, falls er „ohne Überschneidungen" in der Ebene gezeichnet werden kann, so, dass sich zwei Kanten höchstens in einer Ecke schneiden.

Planarer Graph



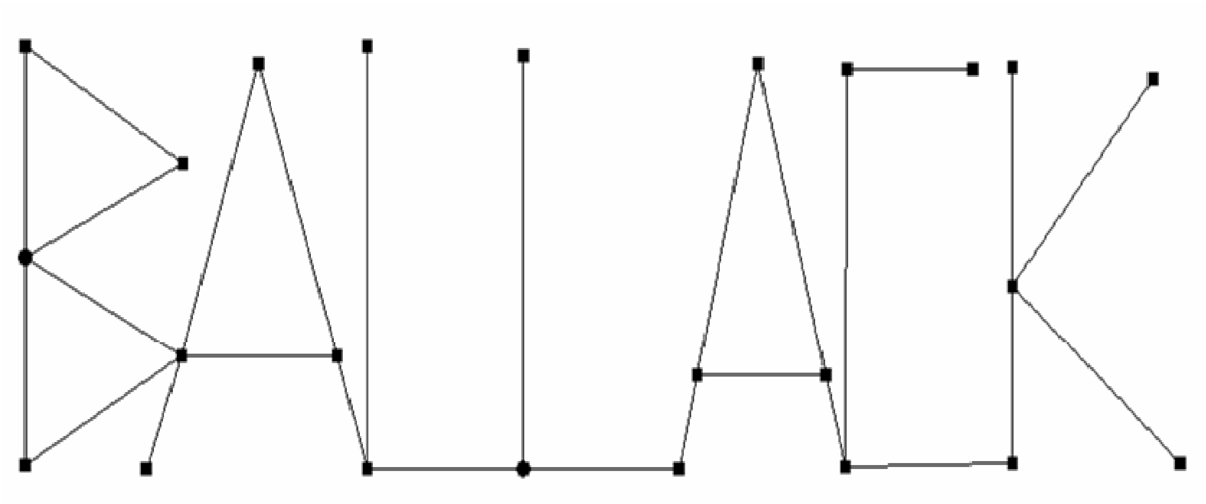
Wir können jetzt den Fünffarbensatz in die „Sprache der Graphentheorie" übertragen:

➢ Jeder planare Graph ist fünffärbbar!

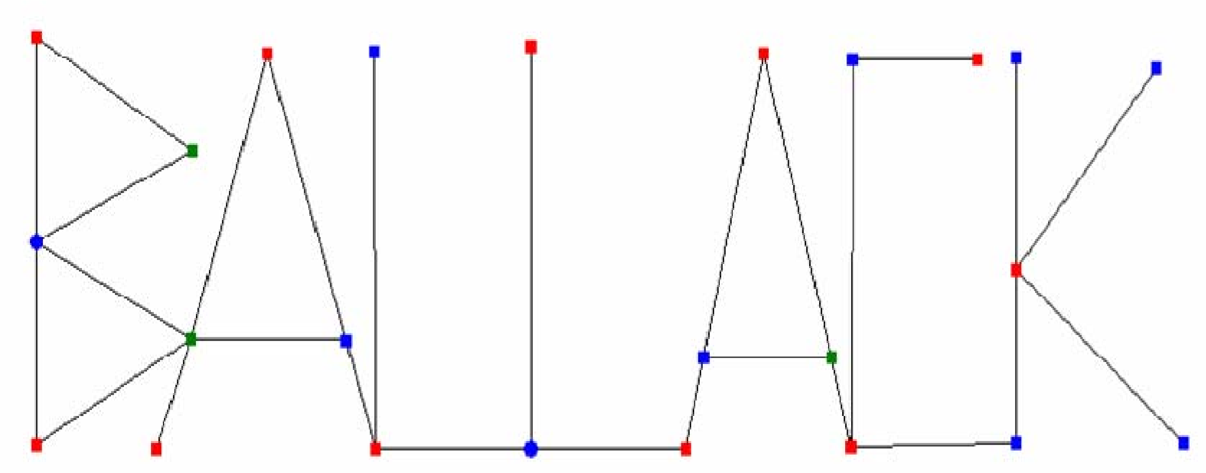
(b) Was wir noch benötigen, ist die Chromatische Zahl

- Die **chromatische Zahl** eines Graphen ist die geringste Anzahl der Farben, die zum Färben eines Graphen verwendet werden müssen.

Nun könnt ihr das an einem Beispiel selbst ausprobieren:

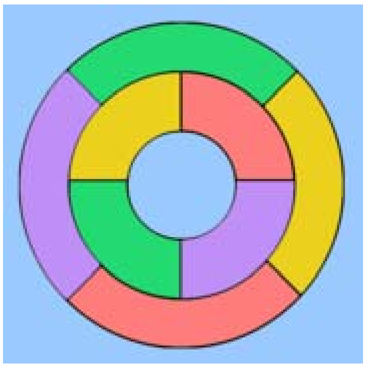


Lösung:



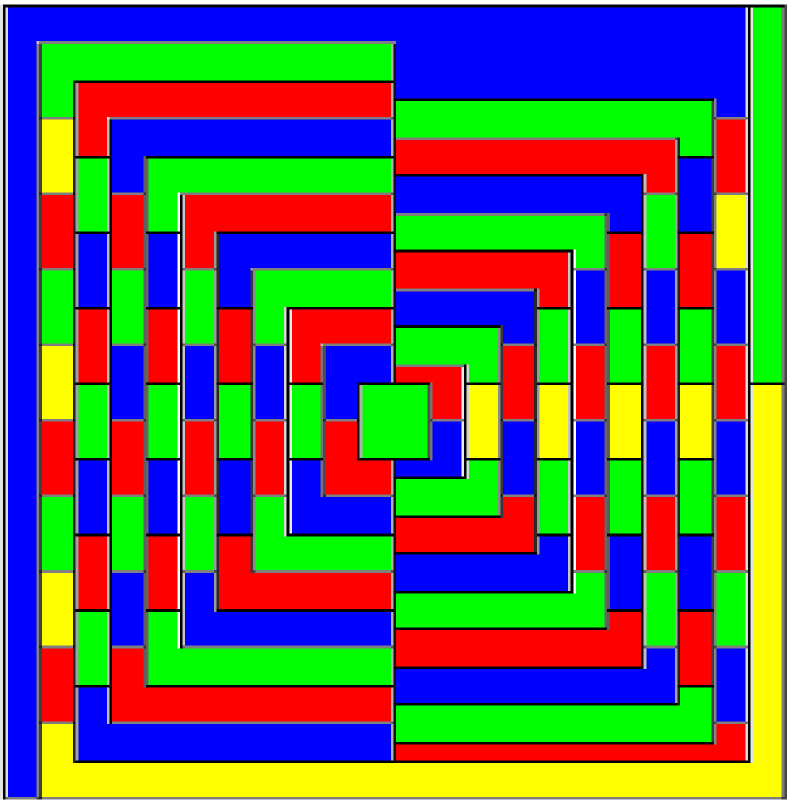
Die chromatische Zahl ist demnach 3.

3. Der Fünffarbensatz



Jeder planare Graph kann mit fünf Farben gefärbt werden.

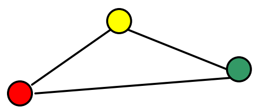
- **Algorithmus: http://www.matheprisma.de/Module/4FP/Seite10.htm**

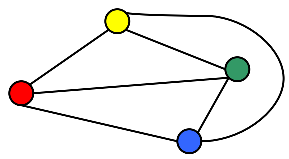


Da der Beweis des Vierfarbensatzes wie erwähnt allerdings sehr lang und computerlastig ist, wollen wir heute versuchen den Fünffarbensatz zu beweisen:

Beweis per Induktion nach der Eckenzahl e:

Für e = 1, 2, 3, 4, oder 5 ist die Aussage klar, da jeder Graph mit höchstens 5 Ecken natürlich mit 5 Farben gefärbt werden kann





Was aber wenn nun $e \geq 5$, und die Aussage für e richtig ist. Dann betrachten wir einen planaren Graphen G mit e+1 Ecken.

Zu zeigen: dieser Graph ist 5-färbbar

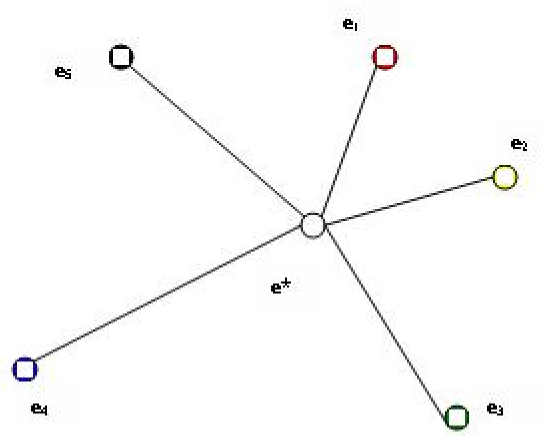
Dazu brauchen wir 3 Sätze:

<u>Hilfssatz 1:</u> Erinnern wir uns an die **<u>Eulersche Polyederformel</u>** aus der letzten Stunde:
Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit e Knoten, k Kanten und f Flächen. Dann gilt:

$$\mathbf{e - k + f = 2.}$$

<u>Hilfssatz 2:</u> Sei G ein zusammenhängender einfacher planarer Graph mit $e \geq 3$ Knoten und k Kanten. Dann gilt: $k \leq 3e - 6$.

An unserem Beispiel:



Knoten ≤ 3 ∘ Kanten – 6

Knoten = 6

Kanten = 5

$5 \leq 3 \circ 6 - 6$

$5 < 12$

Beweis (durch trickreiche Abzählungen):

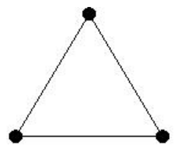
- Für eine Fläche L eines planaren Graphen sei:

  (a) g = die Anzahl der Kanten dieser Fläche

  (b) f = die Anzahl der Flächen.

  (c) Σ g sei die Summe der Kanten aller Flächen:

  (1) Weil jede Fläche mindestens drei Kanten hat,



gilt: Σ **g** $\geq 3f$.

(2) Jede Kante grenzen an höchstens zwei Flächen an: Σ **g** (Summe aller Flächenkanten) $\leq 2k$. *(jede Kante wird maximal zweimal gezählt)*

Zusammen folgt: $2k \geq \Sigma\, \mathbf{g} \geq 3f$, d.h. $f \leq 2k/3$.

Einsetzen in die Eulersche Polyederformel liefert: $e - k + 2k/3 \geq e - k + f = 2$, also $\mathbf{k \leq 3e - 6.}$

<u>Hilfssatz 3:</u> Jeder einfache, planare Graph enthält eine Ecke, deren Grad höchstens fünf ist.

Widerspruchsbeweis:

Annahme: Der Graph ist planar, zusammenhängend und enthält mindestens drei Knoten

Hätte nun jeder Knoten mindestens den Grad sechs, so gilt:

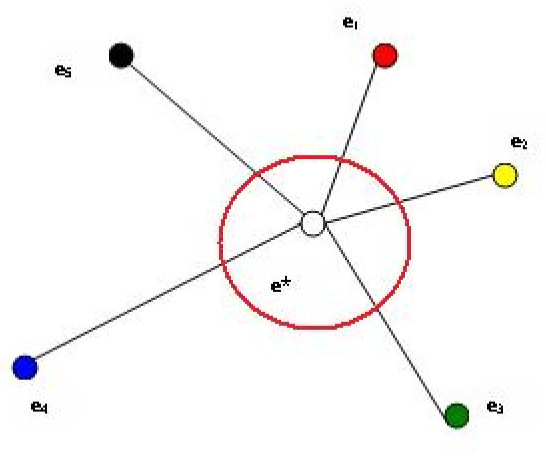
(a) Jede Kante grenzt an höchstens zwei Flächen an: $\mathbf{\Sigma\, g \leq 2k.}$

(b) Die Summe aller Kanten ist größer gleich der sechsfachen Anzahl der Ecken: $\mathbf{\Sigma\, g \geq 6e.}$

$\mathbf{6e \leq \Sigma\, g \leq 2k}$ **(also** $\mathbf{3e \leq k}$**)**

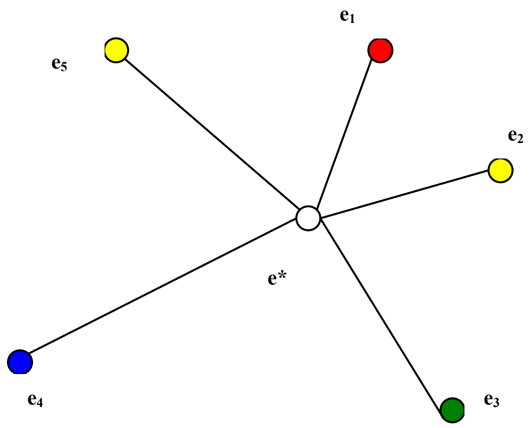
Nach Hilfssatz 2 gilt: $3e \leq \mathbf{k \leq 3e - 6}$ Widerspruch!

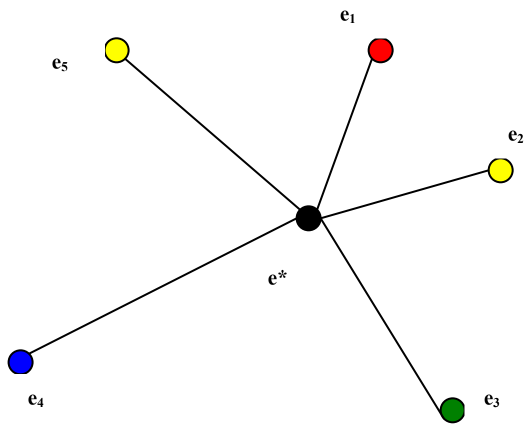
Genau diese Ecke e* – deren Grad höchstens fünf ist - wollen wir nun betrachten. Wir entfernen e* zusammen mit allen Kanten an e* und erhalten einen Graphen G*. Dies ist ein planarer Graph mit nur e Ecken.



Nun haben wir einen planaren Graph mit nur e Ecken. Also können wir diesen nach Induktionsannahme mit 5 Farben färben. Wir wollen nun diese Färbung zu einer Färbung von G ergänzen.

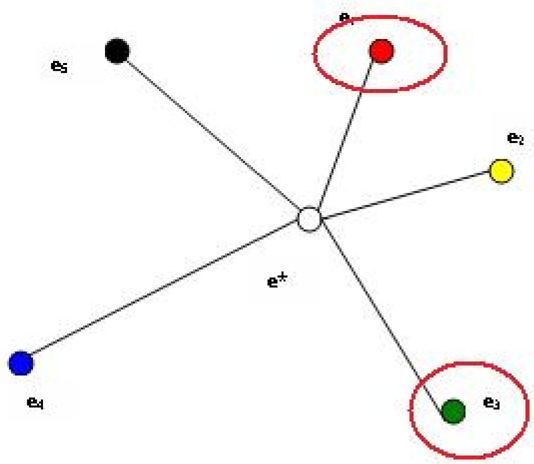
Einfacher Fall: Wenn e* den Grad 5 hat, aber seine Nachbarecken zufällig mit höchstens vier Farben gefärbt sind:





Schwieriger Fall:

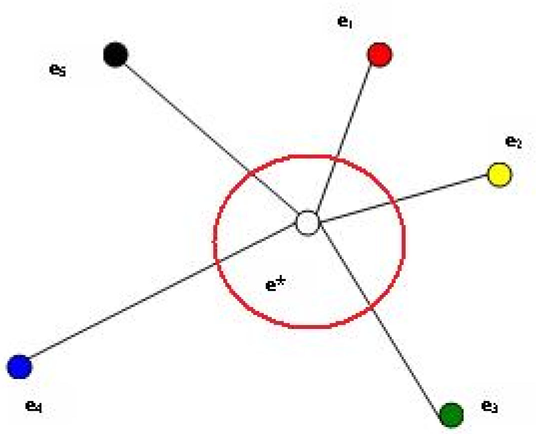
Dieser tritt ein, wenn der Grad von e* = 5 ist und alle Nachbarecken von e* in G* verschieden gefärbt sind.



Die Ecken sind mit den Farben schwarz, rot, gelb, grün und blau gefärbt. In diesem Fall bleibt keine Farbe für e* übrig.

Was könnten wir also tun?

(a) G* umfärben



(b) G* umordnen (ändern der Reihenfolge der Knotenfarben)

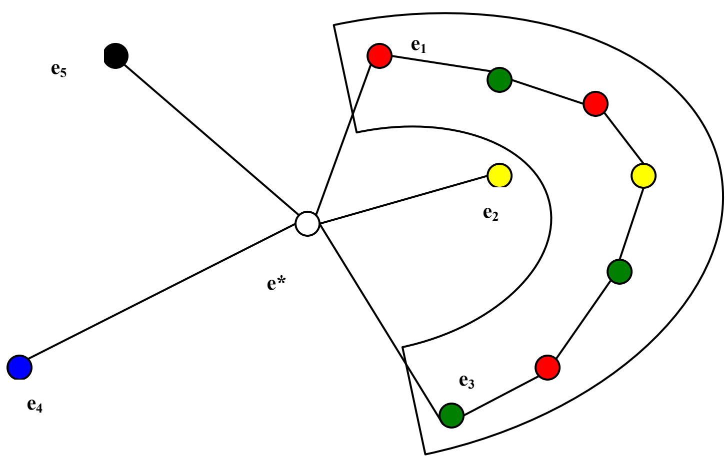
Lösung: Wir färben G* um!

Dazu schauen wir uns die Ecken e1 und e3, die mit den Farben rot und grün gefärbt sind genauer an:

Wir betrachten nun alle Ecken, die wir von e1 aus erreichen können, indem wir nur Ecken mit den Farben grün und rot verwenden. Dabei gibt es 2 Möglichkeiten:

1) „Glück gehabt"

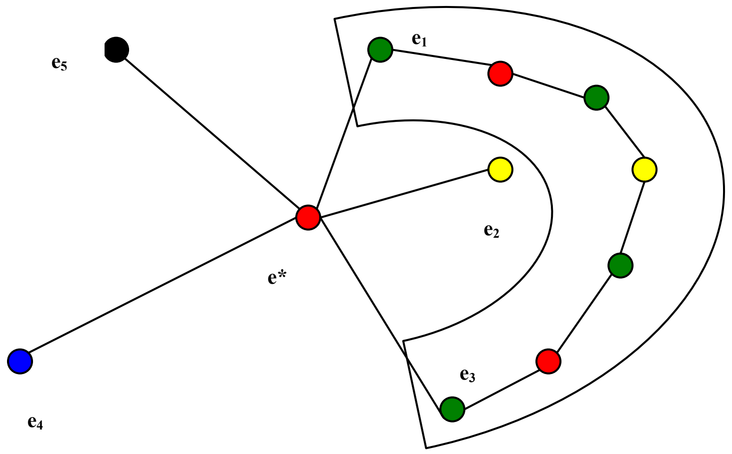
Es gibt keinen Weg, der nur die Farben grün und rot benutzt, auf dem man von e1 zu e3 kommen kann.



Dann färben wir alle Ecken der Farben grün und rot, die wir von e1 erreichen können um; aus grün wird rot, aus rot wird grün.

- Was erreichen wir dadurch? = eine **Färbung von G***

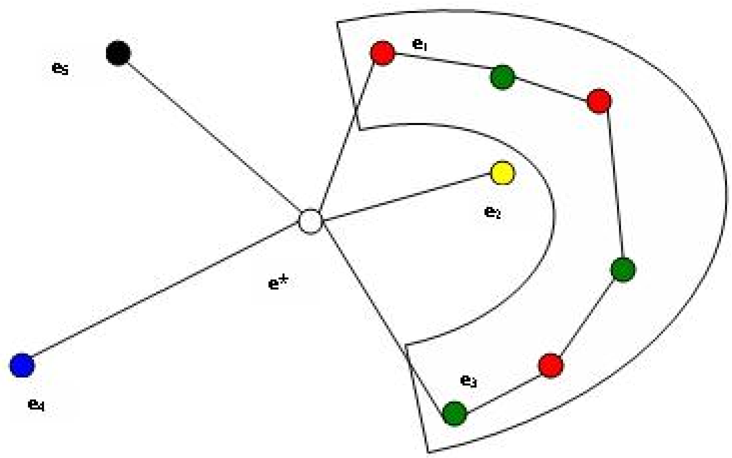
e1 ist jetzt also grün und e3 auch:



Das heißt wir haben nun die Farbe rot übrig um e* zu färben.

2) Aber es gibt auch einen 2. Fall: „Pech gehabt“

Es gibt einen Weg, der nur die Farben grün und rot benutzt, auf dem man von e1 zu e3 kommen kann.



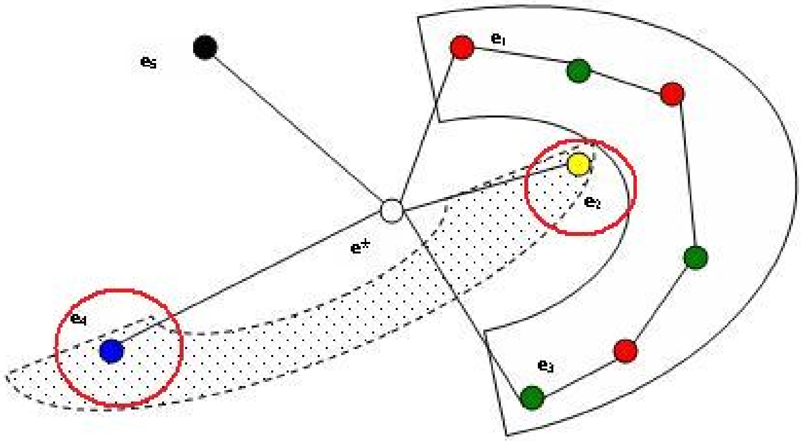
Das bedeutet, dass uns das umfärben gar nichts bringt, denn e1 würde zwar rot werden, aber e3 auch automatisch grün und so hätten wir wieder die gleiche Ausgangssituation.

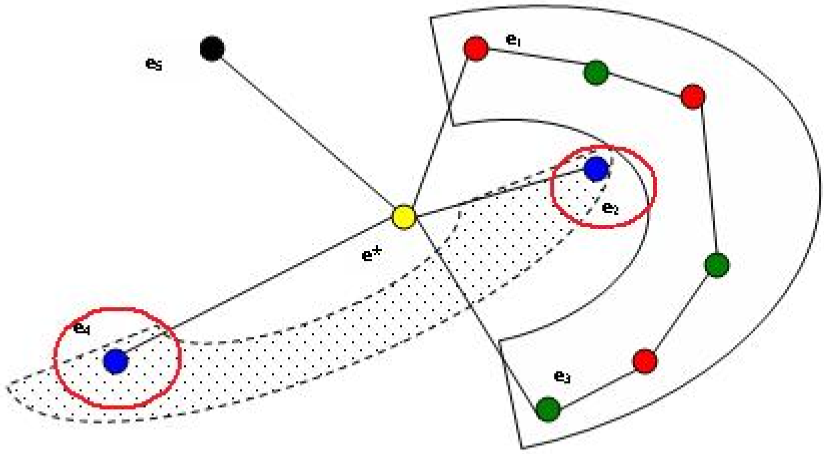
Also fangen wir anders an:

Statt grün und rot können wir auch gelb und blau tauschen, der Ablauf ist dabei wieder der gleiche. Wir schauen uns erneut zwei Ecken der Farben gelb und blau an, die wir von e2 aus erreichen können und unterscheiden die 2 Fälle:

1) „Glück gehabt“

Hier kommt man wieder nicht von e2 zu e4 und wir können demnach alle Ecken der Farben gelb und blau, die wir von e2 erreichen können umfärben: aus gelb wird blau, aus blau wird gelb. E2 und e4 sind danach beide blau gefärbt und für e* kann man die frei gewordene Farbe gelb verwenden:





2) „Pech gehabt“

Es gibt wieder eine Möglichkeit von e2 zu e4 zu kommen und dabei nur die Farben gelb und blau zu verwenden.

Dabei müssen wir uns die Frage stellen ob man wirklich zweimal hintereinander Pech haben kann?

- Nein!

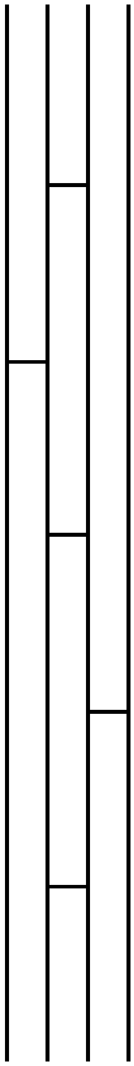
Wenn wir bei dem ersten Versuch schon Pech hatten, dann heißt das, dass es einen Weg von e1 nach e3 geben muss, der nur Ecken der Farben rot und grün abläuft. Pech beim zweiten Versuch heißt aber gleichzeitig, dass es einen Weg gäbe, der von e2 nach e4 geht, der nur die Farben gelb und blau enthält. Irgendwo müssten sich diese Wege treffen. Da unser Graph aber planar ist, können sie sich aber nur in einer Ecke treffen.

Nun müssen wir uns nach der Farbe dieser Ecke fragen:
Da sie auf Weg 1 liegt, hat sie die Farbe rot oder grün, da sie aber auch auf dem zweiten Weg liegt hat sie auch die Farbe gelb oder blau.
→ Dies ist ein offensichtlicher **Widerspruch!** Also kann dieser zweite Fall nicht eintreten, das heißt wir können kein zweites Mal Pech haben.

→ G ist daher auf jeden Fall mit 5 Farben färbbar, also gilt die Behauptung für e+1

Literaturtipp: www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~steuding/elsesser.doc

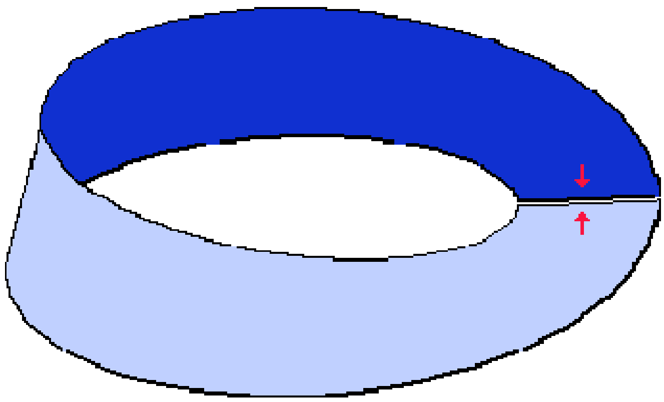
4. Dreidimensionale Färbungen am Beispiel des Möbiusbandes



Das Möbiusband

Zweidimensionale Landkarten einzufärben ist nun hoffentlich kein Problem mehr, aber wie sieht das bei dreidimensionalen Karten aus?

Bastel aus dem Streifen ein Möbiusband, d.h. halte den Papierstreifen an einem Ende fest, drehe das andere Ende um 180° und klebe die Enden dann zusammen.



Es entsteht dabei ein Papierstreifen mit nur einer Seite.

Aufgabe: Färbe nun das Band mit möglichst wenig Farben so ein, dass benachbarte Gebiete unterschiedliche Farben habe.

Wie viel Farben benötigt man mindestens?

Literaturtipp: http://www.matheprisma.de/Module/4FP/index.htm

5. Literatur- und Quellenverzeichnis

Literatur:

Diskrete Mathematik, hrsg. u.a. von Lászlo Lovász, Online-Ressource, u.a. Berlin 2005 (S. 251-267)

Diskrete Mathematik für Einsteiger: Mit Anwendungen in Technik und Informatik, hrsg. u.a. von Albrecht Beutelsbacher, Online-Ressource, u.a. Berlin (^{3}2008) (S. 137-162).

Kombinatorische Optimierung erleben: in Studium und Unterricht, hrsg. u.a. von Stephan Hußmann, Online-Ressource, Wiesbaden 2007 (S. 131-170).

Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämtler, hrsg. u.a. von Susanne Müller-Philipp, Online-Ressource, Wiesbaden (^{4}2009) (S. 6- 46).

Mathematik durch die Hintertür **:** das Schubfach-Prinzip, der Vier-Farben-Satz und viele andere Denkwürdigkeiten aus der Welt der Zahlen, hrsg. u.a. von Adrián Paenza, München (^{2}2008).

Nitzsche, M., Graphen für Einsteiger. Rund um das Haus vom Nikolaus, Wiesbaden (^{3}2009).

Internetquellen:

http://blog.fsmath.uni-oldenburg.de/wp-content/uploads/2009/07/vier_farben_problem.pdf
www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~steuding/elsesser.doc
www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~steuding/hopf.ppt
http://www.matheprisma.de/Module/4FP/Moebius.htm
http://www.matheprisma.de/Module/4FP/Seite10.htm

Bildquellen:

http://wikibrowser.net/images/en/200px_Simple_bipartite_graph_svg.png
http://ifgivor.uni-muenster.de/vorlesungen/Geoinformatik/kap/kap2/img00020.gif
http://mathestuff.de/files/k4kl.png
http://www.tilman.de/uni/ws03/alp/nichtplanarergraph.gif
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/56/Francis_guthrie.jpg
http://www.learn-math.info/history/photos/Heawood_2.jpeg
http://www.uebermorgenstadt.de/faerbung_departments.JPG
http://www2.ilch.uminho.pt/kultur/europa%20umrisse%20dtsprachig.GIF
http://www.hilmar.moches.de/DDC_Material/D_Umriss_Denkmalschutz_SW.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/2e/4ct-non-counterexample.png/180px-4ct-non-counterexample.png
http://www.unicef.de/typo3temp/pics/8ccca1f7b9.gif
http://www.lehrer-online.de/dyn/pics/708467-708488-1-4_povraykoerper.gif