

Hilfssatz 1: Erinnern wir uns an die **Eulersche Polyederformel** aus der letzten Stunde:

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit e Knoten, k Kanten und f Flächen. Dann gilt:

$$e - k + f = 2.$$

Hilfssatz 2: Sei G ein zusammenhängender einfacher planarer Graph mit $e \geq 3$ Knoten und k Kanten. Dann gilt: $k \leq 3e - 6$.

Beweis (durch trickreiche Abzählungen):

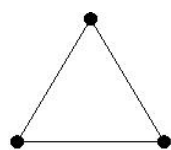
o Für eine Fläche L eines planaren Graphen sei:

(a) g = die Anzahl der Kanten dieser Fläche

(b) f = die Anzahl der Flächen.

(c) Σg sei die Summe der Kanten aller Flächen:

(1) Weil jede Fläche mindestens drei Kanten hat,



gilt: $\Sigma g \geq 3f$.

(2) Jede Kante grenzt an höchstens zwei Flächen an: Σg (Summe aller Flächenkanten) $\leq 2k$. (jede Kante wird maximal zweimal gezählt)

Zusammen folgt: $2k \geq \Sigma g \geq 3f$, d.h. $f \leq 2k/3$.

Einsetzen in die Eulersche Polyederformel liefert:

$$e - k + 2k/3 \geq e - k + f = 2, \text{ also } k \leq 3e - 6.$$

Hilfssatz 3: Jeder einfache, planare Graph enthält eine Ecke, deren Grad höchstens fünf ist.

Widerspruchsbeweis:

Annahme: Der Graph ist planar, zusammenhängend und enthält mindestens drei Knoten

Hätte nun jeder Knoten mindestens den Grad sechs, so gilt:

(a) Jede Kante grenzt an höchstens zwei Flächen an: $\Sigma g \leq 2k$.

(b) Die Summe aller Kanten ist größer gleich der sechsfachen Anzahl der Ecken: $\Sigma g \geq 6e$.

$$6e \leq \Sigma g \leq 2k \text{ (also } 3e \leq k)$$

Nach Hilfssatz 2 gilt: $3e \leq k \leq 3e - 6$ Widerspruch!