Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Klassische Probleme der Mathematik
Leitung: Prof. Harald Upmeier und Benjamin Schwarz
Referentin: Nelli Töws
Wintersemester 2009/2010

Das Nadelproblem von Buffon

Ausarbeitung des Seminarvortrags vom 25.11.09

"Gibt's ein Problem?"

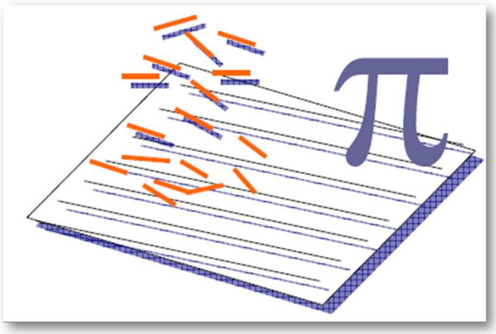
letztes Update: 24. November 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Schon Jahrhunderte vor Christus, schon vor den Griechen, suchten verschiedene Völker die geheimnisvolle Zahl π zu bestimmen. Die Schätzungen wurden immer genauer, doch erst 250 v. Chr. gelang es dem griechischen Mathematiker Archimedes diese Zahl - er nannte sie noch nicht pi - darzustellen. Er bewies, dass sich der Umfang eines Kreises zu seinem Durchmesser genauso verhält, wie die Fläche des Kreises zum Quadrat des Radius. Dieses Verhältnis beschreibt genau die gesuchte Zahl π und entspricht einem numerischen Verfahren π anzunähern.
In den nächsten Jahrhunderten faszinierte diese Zahl noch weitere zahlreiche Mathematiker, Physiker, Astronomen und andere Wissenschaftler, sodass die Annäherung an π phasenweise zu einem regelrechten Wettlauf wurde. Jahre lang war unklar, ob die Berechnungen von π nicht doch irgendwann zu einem Abschluss käme, ob π also eine rationale Zahl sei.
Viele Verfahren - wie die Annäherung eines Kreises durch Polygone oder die Berechnung von π mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung - wurden herangezogen.
1733 entwickelte ein französischer Adeliger, Georges Louis Leclerc, ein Verfahren, mit dem die Kreiszahl π mit Hilfe der geometrischen Wahrscheinlichkeit experimentell angenähert werden kann. Allerdings muss sich bei dieser Methode der Wert für π mit zunehmender Anzahl von Versuchen nicht unbedingt verbessern, sondern die Werte für π können sich mit höherer Anzahl von „Treffern" durchaus auch verschlechtern. Aus diesem Grund ist die Annäherung auf diese Weise in der Praxis eher unbrauchbar.

Bisher wurden über 1.241.100.000.000 Nachkommastellen von π berechnet.



2 Georges Louis Leclerc, Comte de Buffon

Georges Louis Leclerc de Buffon wurde am 7. September 1701 in Montbard als ältester Sohn von Benjamin-Francois Leclerc, Vorsitzender der Salzkammer von Montbard, geboren. Seine Mutter, Anne-Christine Marlin, stammte aus einer reichen Familie und erbte nach dem Tod ihres Onkels 1714 ein Vermögen. Schon drei Jahre später kaufte ihr Gatte die Seigneurie von Buffon, in der Nähe von Montbard und etwas später das Amt eines Gerichtsrates. Der Name „Buffon“ gehörte also zum ererbten Besitztum.

Mit 20 Jahren entdeckt Buffon (unabhängig von Newton) den Binomischen Lehrsatz

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^0 b^n.$$

Bis 1723 besuchte er das Jesuitenkollegium von Dijon, im Osten Frankreichs, und schon 3 Jahre später, im Alter von 25 Jahren, absolvierte er ein Studium der Rechtswissenschaft, das er nach dem Willen seines Vaters 1723 begonnen hatte.
Als er im Alter von 25 Jahren das Vermögen seiner Mutter erbte, verschaffte ihm sein Reichtum den Zugang zum gesellschaftlichen Leben in den höchsten politischen Kreisen Paris. Schon 1726 wurde er als Mitglied in die Königliche Akademie der Wissenschaften gewählt.
Ab 1728 studierte er in Angers Mathematik, Medizin und Botanik.
Nach seiner Rückkehr nach Dijon freundete er sich mit dem jungen englischen Herzog von Kinston an, mit dem er im November 1730 eine Bildungsreise durch Südfrankreich und Italien unternahm. Auf dieser Reise entdeckte er seine große Liebe zu naturhistorischen Forschungen.
Während seines darauffolgenden Aufenthaltes in London beschäftigte er sich hauptsächlich mit den Schriften Isaac Newtons und übersetzte diese nach seiner Rückkehr nach Frankreich ins Französische. Hier widmete er ab etwa 1731 als Privatgelehrter vorrangig seine Zeit der Physik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Im Jahr 1733 verewigte er sich in der Stochastik durch sein Nadel-Experiment, das wir im Folgenden betrachten werden.
1739 wurde er von König Ludwig XV. zum Direktor des Königlichen Botanischen Gartens in Paris ernannt und kurze Zeit später in den Grafenstand erhoben.
Während dieser ganzen Zeit verfasste er sein Hauptwerk „Allgemeine und spezielle Geschichte der Natur“. Ab 1749 bis zu seinem Tod erschienen 36 Bände.
Am 16. April 1788 starb er in Paris.

3 Das Nadelproblem von Buffon

Im Jahr 1733 beschäftigte sich Buffon mit folgendem Problem:

> *Wenn man eine kurze Nadel auf liniertes Papier fallen lässt - wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel so liegen bleibt, dass sie eine der Linien kreuzt?*

Um dieses Problem zu lösen warf er Stäbchen über seine Schulter auf einen mit quadratischen Fliesen bedeckten Boden und bestimmte den Anteil der Stäbchen, die eine der Fugen zwischen den Fliesen kreuzten. Bei diesem Experiment stellte er zu seiner Verwunderung einen Zusammenhang mit der Zahl π fest.

Wovon hängt die Wahrscheinlichkeit ab?
In erster Linie hängt die Wahrscheinlichkeit natürlich von dem Abstand der Linien d und der Länge der Nadel l ab. Mit einer kurzen Nadel bezeichnen wir eine Nadel der Länge $l \leq d$ und eine lange Nadel ist eine, bei der $l \geq d$ gilt.

Hierzu formulierte er folgenden Satz:

Satz 3.1 Eine kurze Nadel der Länge l werde auf liniertes Papier fallen gelassen, dessen Linien einen Abstand $d \geq l$ haben. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel in einer Position zu liegen kommt, in der sie eine der Linien des Papiers kreuzt, genau

$$p = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot d}.$$

Dieses Resultat impliziert, dass man „experimentell" einen ungefähren Wert von π bestimmen kann.

Dessen bedienten sich im folgenden Jahrhundert einige Mathematiker, die ich nur kurz erwähnen möchte.
Im Jahre 1850 erzielte der Schweizer Astronom Johann Rudolph Wolf mit 5.000 Würfen einen Näherungswert für $\pi = 3,1596$.
Nur 5 Jahre später näherte Smith mit nur 3.204 Würfen $\pi = 3,1553$ an.
1894 führte Fox den Versuch mit 1.120 Würfen durch und erzielte eine Näherung von $\pi = 3,1419$ und im Jahre 1901 näherte der Mathematiker Mario Lazzarini die Zahl $\pi = 3,1415929$ an, die sogar auf 6 Nachkommastellen stimmt. Er warf eine 2,5 cm lange Nadel auf ein Brett mit Parallelen, die 3 cm voneinander entfernt waren. Angeblich soll er für solch ein Experiment sogar eine Maschine gebaut haben, die ein Stöckchen 3.408 Mal fallen ließ. Dabei kreuzte in 1.808 Fällen die Nadel eine der Parallelen.

3.1 Grundbegriffe

Um den von Buffon aufgestellten Satz, der auf den ersten Blick nicht sofort einleuchtend erscheint, zu beweisen, möchte ich vorerst auf einige Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingehen, die wir im Weiteren benutzen werden.

„Der **Wahrscheinlichkeitsbegriff** ist ein Maß zur Quantifizierung der Sicherheit bzw. Unsicherheit des Eintretens eines bestimmten Ereignisses im Rahmen eines Zufallsexperiments.“
Die **Wahrscheinlichkeit** ist somit ein Grad der Gewissheit, wobei die Gewissheit unterschiedliche Gründe haben kann.

Zählt man nun bei häufiger Wiederholung eines Experimentes, wie oft ein bestimmtes Versuchsergebnis eintritt, und teilt diese Zahl durch die Anzahl der Versuche, erhalten wir die relative Häufigkeit h_N des Ereignisses.
Also sei N_A die Anzahl des Eintretens von A und N die Anzahl der Wiederholungen des Zufallsexperimentes

$$\Rightarrow h_N = \frac{N_A}{N}.$$

Führen wir nun unendlich viele Versuche durch, lassen also die Anzahl der Versuche N gegen unendlich laufen, erhalten wir die Wahrscheinlichkeit.

$$\lim_{N \to \infty} h_N = P(A).$$

Nach Laplace gilt
„Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A ist der Quotienten aus der Anzahl des Eintretens von günstigen Fällen A und der Anzahl aller möglichen Fälle, wobei vorausgesetzt wird, dass die verschiedenen Fälle alle gleichmöglich sind.“

Ein **Ereignis** ist der Ausgang eines Experiments.
Bsp. ≥ 3 beim Würfeln

Viele **Elementarereignisse** ω bilden zusammengesetzt ein Ereignis.
Bsp. $\{3{,}4\}$ oder $\{2{,}5\}$ oder $\{1{,}6\}$

Eine nichtleere Menge Ω heißt **Grundraum** oder **Ereignisraum**. Die Elemente des Ereignisraums heißen Elementarereignisse.
Bsp. „Kopf“, „Zahl“

3.2 Geometrischer Beweis

Vorüberlegung
Um die Idee zu begreifen, die hinter dem geometrischen Beweis steckt, schauen wir uns einen Kreis mit dem Radius $r = 1$ an, der von einem Quadrat mit der Seitenlänge 2 umschrieben wird (Abb. 1).

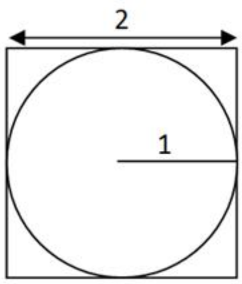


Abb. 1

Nun wird eine punktförmige Münze auf dieses Quadrat fallen gelassen, die die Figur nur in einem einzigen Punkt berührt.
Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit p, dass die Münze auch im Kreis landen wird?

Um diese zu ermitteln müssen wir die Anzahl der günstigen Fälle und die Anzahl aller möglichen Fälle zählen, also die Zahl der Punkte herausfinden, die die Münze im Kreis oder im Quadrat landet. Daraufhin teilen wir die Anzahl der günstigen Fälle durch alle möglichen Fälle und erhalten die gewünschte Wahrscheinlichkeit.
Da sich die Punkte dicht auf einer Fläche befinden und somit die gesamte Fläche ohne Freiraum ausfüllen, können wir ebenso die Fläche des Kreises, in dem sich die günstigen Fälle befinden, durch die Gesamtfläche, dem Quadrat, teilen.
Die Fläche des Kreises beträgt $\pi \cdot r^2$, hier genau π, da $r = 1$ und die Fläche des Quadrates beträgt $2 \cdot\ 2 = 4$.

$$\Rightarrow p = \frac{\pi}{4}$$

Eigentlicher Beweis

Sei y der Abstand des Mittelpunktes der Nadel von derjenigen Geraden, die ihm am nächsten liegt und φ der Winkel, den die Nadel mit dieser Geraden einschließt (Abb. 2).

Nun kann die Nadel drei verschiedene Positionen zur parallelen Gerade einnehmen. Entweder sie kreuzt keine Linie, sie kreuzt eine Linie oder sie berührt eine Linie.

Falls $y > \sin(\varphi) \cdot \frac{l}{2}$ $\Rightarrow$ Die Nadel kreuzt keine Linie (Abb. 3)
$y < \sin(\varphi) \cdot \frac{l}{2}$ $\Rightarrow$ Die Nadel kreuzt eine Linie (Abb. 4)
$y = \sin(\varphi) \cdot \frac{l}{2}$ $\Rightarrow$ Die Nadel berührt eine Linie (diesen Fall zählen wir als kreuzen) (Abb. 5).

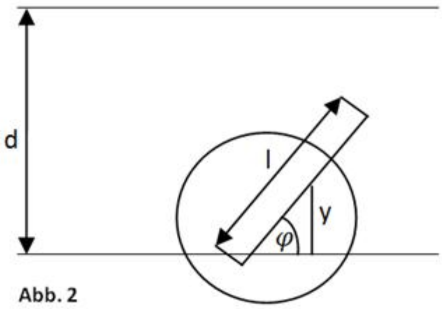


Abb. 2

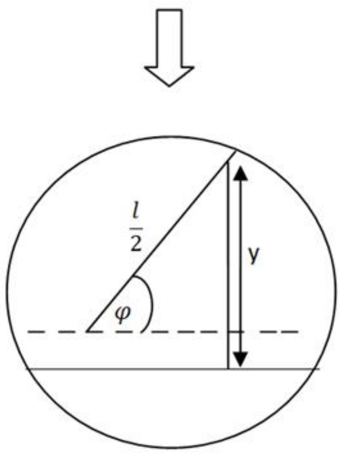


Abb. 3

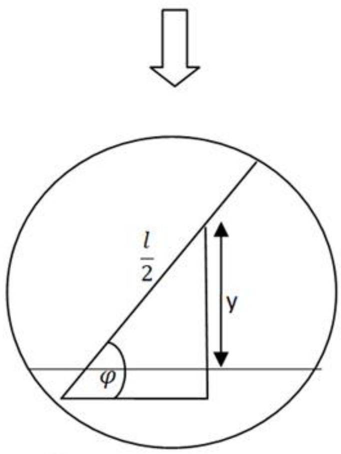


Abb. 4

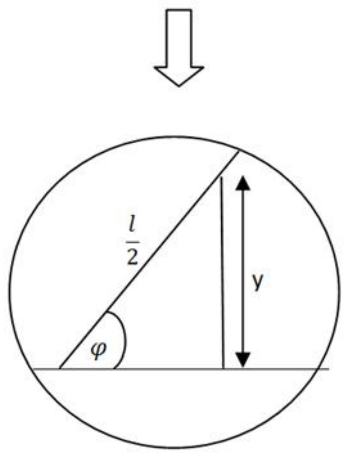


Abb. 5

Insbesondere gilt für $0 \leq \varphi \leq \pi$ und für den Abstand y vom Mittelpunkt der Nadel zur Parallelen $0 \leq y \leq \frac{d}{2}$. Alle möglichen Punkte liegen daher in dem eingezeichneten Rechteck (Abb. 6) mit dem Flächeninhalt G.
Da die Nadel eine Linie genau dann kreuzt, wenn $y \leq \sin\varphi \cdot \frac{l}{2}$ gilt, liegen diese Punkte (y, φ) in dem gelb unterlegten Bereich (Abb. 7) mit dem Flächeninhalt A.

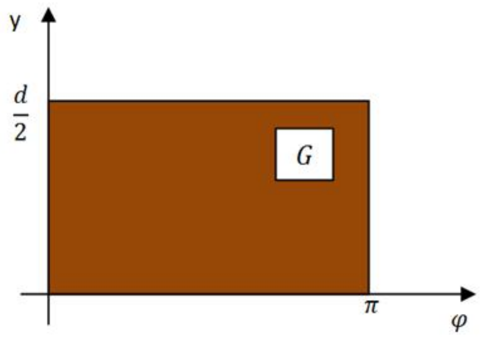


Abb. 6

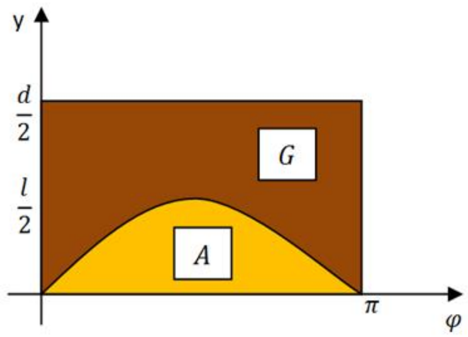


Abb. 7

Diese Fläche besitzt den Inhalt

$$\begin{aligned} F(A) &= \int_0^\pi \frac{l}{2} \cdot \sin\varphi \, d\varphi \\ &= \frac{l}{2} \cdot [-\cos\varphi]_0^\pi \\ &= \frac{l}{2} \cdot [(-\cos\pi) - (-\cos 0)] \\ &= \frac{l}{2} \cdot (1+1) = l \end{aligned}$$

Wird das Experiment so durchgeführt, dass kein Punkt (y, φ) des Rechtecks bevorzugt auftritt, so erhalten wir für die gesuchte Wahrscheinlichkeit den Wert

$$p = \frac{F(A)}{F(G)} = \frac{l}{\pi \cdot \frac{d}{2}} = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot d}.$$

3.3 Stochastischer Beweis

Im Vorfeld möchte ich wieder einige Begriffe definieren, die wir für diesen Beweis benötigen.

Eine **Zufallsvariable** oder **Zufallsgröße** bezeichnet eine Funktion, die den Ergebnissen eines Zufallsexperiments Werte zuordnet. Diese Werte werden als **Realisation** der Zufallsvariable bezeichnet. Die Zufallsvariable wird üblicherweise mit einem Großbuchstaben (X) bezeichnet, während man für die Realisation den entsprechenden Kleinbuchstaben (x) verwendet.

Der **Erwartungswert** einer Zufallsvariablen X ist jener Wert, von dem man annimmt, dass er sich bei einer oftmaligen Wiederholung des Experiments durchschnittlich ergibt. Er errechnet sich als die Summe der Wahrscheinlichkeit jedes möglichen Ergebnisses des Experiments multipliziert mit dem „Wert“ dieses Ergebnisses. Der Erwartungswert kann allerdings bei einem einzelnen Experiment unwahrscheinlich oder sogar unmöglich sein.

$$EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$$

Da wir es hier nur mit endlichen oder abzählbaren Größen zu tun haben, ist der Erwartungswert definiert durch

$$EX = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot p_i$$

mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Werte eines Ergebnisses und deren Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Bsp.: Werfen eines Würfels.
Die Zufallsvariable X ist die gewürfelte Augenzahl. Die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_6$ eine der Zahlen $1, \ldots, 6$ zu würfeln sind jeweils $\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow\ EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

Eigentlicher Beweis

Sei l die Länge einer beliebig langen Nadel und p_1 die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel genau eine Linie kreuzt, p_2 die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel genau zwei Linien kreuzt, p_3 die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel genau drei Linien kreuzt, usw.
Sei N die Zufallsvariable, die die Anzahl der Kreuzungspunkte eines Nadelwurfs zählt.
Somit ergibt sich für den Erwartungswert

$$EN = \sum_{i=1}^{\infty} N_i \cdot p_i$$

Also

$$EN = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot\ p_3 + \ldots.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir mindestens einen Kreuzungspunkt erhalten, ist damit

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots.$$

Im Falle einer kurzen Nadel ($l \leq d$) erhalten wir höchstens einen Kreuzungspunkt, weil eine kurze Nadel nicht zwei Linien gleichzeitig kreuzen kann. Also ist die Wahrscheinlichkeit für mehr als einen Kreuzungspunkt Null, $p_2 = p_3 = p_3 = \ldots = 0$. Somit erhalten wir $E = p_1$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist genau die erwartete Anzahl von Kreuzungspunkten.

Sei nun EN_l die erwartete Anzahl von Kreuzungspunkten, die wir für eine beliebig lange, gerade Nadel der Länge l erhalten. Wenn wir diese Nadel in zwei Teile teilen, also $l = x + y$ ist (Abb. 8), und die einzelnen Teile getrennt betrachten, so erhalten wir aufgrund der Linearität des Erwartungswertes

$$EN_l = EN_{x+y} = EN_x + EN_y.$$

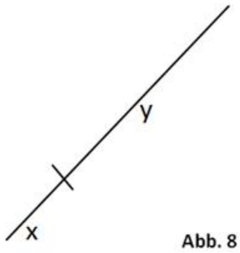


Abb. 8

Die Gesamtzahl der Kreuzungen ergibt sich nämlich genau aus der Anzahl der Kreuzungen des „vorderen Teils“ plus die Anzahl der Kreuzungen des „hinteren Teils“ der Nadel.

Definieren wir nun der Übersicht halber $E(x) := EN_x$ und nehmen an, die Nadel wäre in n gleichgroße Teile geteilt worden, dann ergibt sich für $n \in N$

$$E(n \cdot x) = n \cdot E(x).$$

Beweis

IA: $n = 1$ $\quad E(1 \cdot x) = E(x) = 1 \cdot E(x).$

$n = 2$ $\quad E(2 \cdot x) = E(x + x) = E(x) + E(x) = 2 \cdot E(x).$

IV: $\quad E(n \cdot x) = n \cdot E(x)$

IS: $n \to n+1$ $\quad E((n+1) \cdot x) = E(n \cdot x + x) = E(n \cdot x) + E(x) = n \cdot E(x) + E(x) = (n+1) \cdot E(x)$

□

Somit haben wir gezeigt, dass die Behauptung $E(n \cdot x) = n \cdot E(x)$ für alle $n \in N$ gilt.

Daraus folgt aber auch, dass

$$E(r \cdot x) = r \cdot E(x) \text{ für alle } r \in Q \text{ gilt,}$$

denn sei $r = \frac{n}{m}$ mit $n, m \in N$, dann gilt

$$m \cdot E(\frac{n}{m} \cdot x) = E(m \cdot \frac{n}{m} \cdot x) = E(n \cdot x) = n \cdot E(x) \qquad /\text{:m}$$

$$\Rightarrow E(\frac{n}{m} \cdot x) = \frac{n}{m} \cdot E(x).$$

Da nun $E(x)$ monoton von $x \geq 0$ abhängt, gilt auch $E(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot E(x)$ für alle $\lambda \in R$.

Beweis
Sei $\lambda = \lim_{n\to\infty} r_n$ mit $r_n \in Q$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(\lambda \cdot x) &= E(\lim_{n\to\infty} r_n \cdot x) \\ &= \lim_{n\to\infty} E(r_n \cdot x) \\ &= \lim_{n\to\infty} r_n \cdot E(x) \\ &= \lambda \cdot E(x) \end{aligned}$$

□

Es gilt also $E(x) = E(x \cdot 1) = x \cdot E(1) = x \cdot c$ für alle $x \geq 0$, wobei $c = E(1)$ irgendeine Konstante ist.

Um diese unbekannte Konstante zu ermittel, betrachten wir eine Nadel, die aus mehreren geraden Stücken besteht - eine „polygonale“ Nadel der Länge l (Abb. 9). Die Anzahl der Kreuzungen, die diese Nadel erzeugt, ist die Summe der Anzahlen von Kreuzungen, die die einzelnen Teile erzeugen.

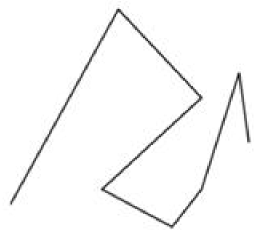


Abb. 9

An dieser Stelle ergibt sich die Frage, ob es nicht einen Unterschied macht, ob die Nadel gerade oder gebogen ist.

Zwar erhalten wir bei einer gebogenen Nadel im Falle eines Kreuzungspunktes sofort auch 2-3 weitere Kreuzungspunkte, doch ergibt sich auch in vielen Fällen kein Kreuzungspunkt. Bei einer geraden Nadel der gleichen Länge hingegen ist die Wahrscheinlichkeit einen Kreuzungspunkt zu erhalten viel größer, wo hingegen die Anzahl der Kreuzungen pro Nadel geringer ist. Betrachten wir nun eine Vielzahl von Versuchsergebnissen, ist der Erwartungswert für die Anzahl der Kreuzungen bei beiden Versuchsansätzen gleich.

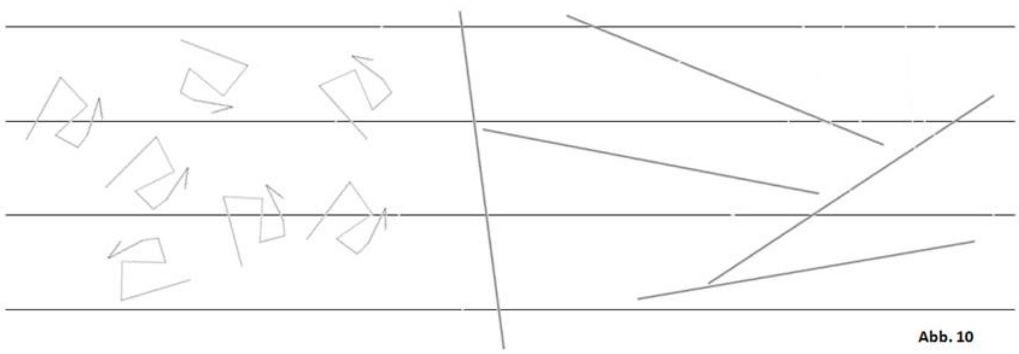


Abb. 10

Aus dem Grund ist es nicht wichtig, ob die geraden Teile nun fest zusammengelötet oder beweglich aneinander gehängt sind.
Also ist die erwartete Anzahl der Kreuzungspunkte wieder

$$E(l) = c \cdot l.$$

Betrachten wir nun eine Nadel, die einen Kreis C vom Durchmesser d bildet. Diese Nadel besitzt die Länge $l = \pi \cdot d$. Wenn man eine solche Nadel auf liniertes Papier wirft, so liefert dies immer genau zwei Schnittpunkte (Abb. 11).

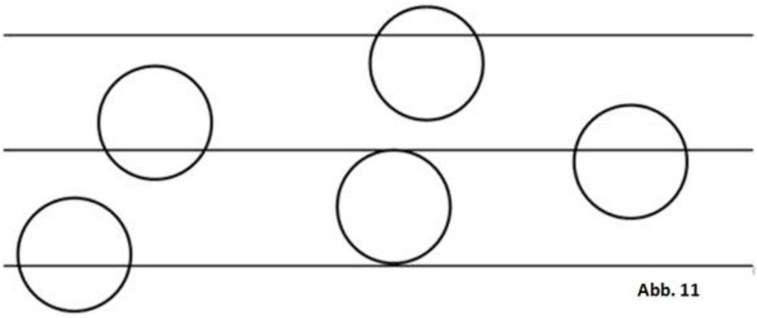


Abb. 11

Bekanntlich kann eine solche Kreislinie durch Polygone approximiert werden. Dazu stellen wir uns einfach vor, dass wir mit der runden Nadel C immer ein einbeschriebenes regelmäßiges n-Eck P_n und ein regelmäßiges umbeschriebenes n-Eck P^n fallen lassen (Abb. 12).

Abb. 12

Jede Linie, die nun P_n schneidet, wird auch C schneiden, und wenn sie C schneidet, dann trifft sie auch P^n (Abb. 13).

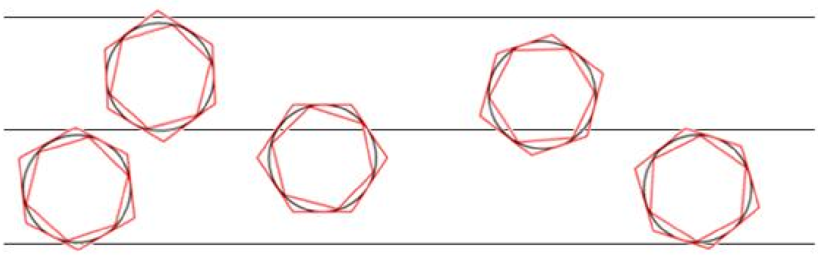


Abb. 13

Also erfüllt die erwartete Anzahl von Schnittpunkten

$$E(P_n) \leq E(C) \leq E(P^n).$$

Da wir festgestellt haben, dass für Polygone die erwartete Anzahl der Kreuzungspunkte genau „c mal die Länge“ ist ($E(l) = c \cdot l$) und die erwartete Anzahl der Kreuzungspunkte für C genau 2 ist, erhalten wir

$$c \cdot l(P_n) \leq 2 \leq c \cdot l(P^n). \tag{1}$$

Sowohl P_n als auch P^n approximieren C für $n \to \infty$. Dies liefert uns

$$\lim_{n\to\infty} l(P_n) = \pi \cdot d = \lim_{n\to\infty} l(P^n),$$

und es folgt aus (1), dass mit $n \to \infty$

$$c \cdot \pi \cdot d \leq 2 \leq c \cdot \pi \cdot d \quad \text{gilt},$$

und somit

$$c = \frac{2}{\pi \cdot d}.$$

Da nun $E(l) = c \cdot l$

$$\Rightarrow E(l) = \frac{2}{\pi \cdot d} \cdot l = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot d} \quad \text{und da}$$

$$E(l) = p$$

$$\Rightarrow p = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot d}.$$

$\square$.

4 Literaturverzeichnis

Martin Aigner, Günter M. Ziegler: Das Buch der Beweise, 2. Auflage. Springer Berlin Heidelberg 2004, S. 147-150

Karl Bosch: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Vieweg studium - Basiswissen 1984, 4. Auflage, S. 25-29

Internetquellen

http://www.mohamed-naji.de/Repetitorium/Dateien/PraesentationsPruefungAbitur05.pdf
http://www2.mathematik.uni-mainz.de/monoid/Monoid72.pdf
http://www.wissenschaft-online.de/sixcms/media.php/924/September_2007_Buffon.pdf
http://www.madeasy.de/2/p.htm
http://www.mathepedia.de/Zufallsvariablen.aspx
http://www.cwscholz.net/projects/fba/fba.html

Bilder

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7f/Georges-Louis_Leclerc,_Comte_de_Buffon.jpg

Martin Aigner, Günter M. Ziegler: Das Buch der Beweise, 2. Auflage. Springer Berlin Heidelberg 2004, S. 147-150