Philipps-Universität Marburg

Fachbereich Mathematik

SE: Klassische Probleme der Mathematik - WS 2009/2010

Leitung: Benjamin Schwarz

Referent: Joachim Franz

02.12.2009

Fundamentalsatz der Algebra

Ausarbeitung zum Vortrag

Inhalt

Einleitung

Der Fundamentalsatz der Algebra gehört zu den Sätzen die jeder Mathematik - Student schon einmal gehört haben dürfte. Während er in der Schule oft (natürlich unbewiesen) verwendet wird ist er doch in seiner Aussage für Schüler unbekannt. Dort tritt die Eigenschaft in den Vordergrund, dass Polynome in Linearfaktoren zerlegbar sind. Die Aussage des Fundamentalsatzes der Algebra gilt jedoch nur im Körper der komplexen Zahlen.

> „Die Aussage, dass jede algebraische Gleichung n-ten Grades im Bereich der komplexen Zahlen stets genau n nicht notwendig voneinander verschiedene Lösungen hat, wird allgemein als Fundamentalsatz der Algebra bezeichnet. Der Sachverhalt kann jedoch auch als Faktorisierungseigenschaft für das entsprechende Polynom formuliert werden und lautet dann: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit reellen Koeffizienten kann in ein Produkt von reellen Faktoren ersten und zweiten Grades zerlegt werden, bzw. äquivalent dazu: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten kann als ein Produkt von n linearen Faktoren mit komplexen Koeffizienten dargestellt werden.“ (S. 283 - (Alten, Djafari Naini, Folkerts, Schlosser, Schlote, & Wußing, 2003))

Geschichte

Peter Roth (gestorben 1617) war Rechenmeister in Nürnberg und wohl der erste, der einen Vorläufer des Fundamentalsatzes der Algebra formulierte. In seinem Buch „Arithmetica Philosophica. Oder schöne neue wolgegründete Überauß Künstliche Rechnung der Coß oder Algebrae“, welches

1608 erschien, macht er eine Bemerkung, dass eine Gleichung n-ten Grades höchstens n Nullstellen haben könne. Die Bemerkung ließ er jedoch ohne Beweis.

Im Jahr 1629 stellte der in den Niederlanden lebende Mathematiker Albert Girard fest, dass jede Gleichung der Algebra so viele Lösungen hat wie der Wert des höchsten Exponents. Zur damaligen Zeit bestand noch ein Streit darüber, ob auch komplexe Zahlen als Lösung von Gleichungen gelten. Zum Beispiel hat die Gleichung $x^4 = 4x - 3$ die Lösungen $1,1,-1+\sqrt{-2},-1-\sqrt{-2}$.

Girard nannte drei Gründe für die Anerkennung komplexer Zahlen als Lösung:

1. Um der Sicherheit der allgemeinen Regel willen,
2. Weil man dann weiß, dass es keine anderen Lösungen geben kann,
3. Wegen ihrer Nützlichkeit,

Weitergeführt wurde die Idee des Fundamentalsatzes ab dem Jahr 1702 durch Leibniz und Johann 1. Bernoulli mit dem Ziel, die Integration von gebrochen rationalen Funktionen zu vereinfachen, indem man das Nennerpolynom in seine Linearfaktoren zerlegt und aufgrund dessen den Bruch in einfache kleinere Brüche zerlegt. Diese Aussage geht jedoch direkt auf den Fundamentalsatz der Algebra zurück (was schließlich auch das Problem war).

Girard hatte den Satz zwar formuliert, allerdings war es über eine lange Zeit nicht gelungen die Aussage zu beweisen. Der Satz wurde dennoch während der gesamten Zeit als korrekt angesehen.

Einen ersten Beweisansatz lieferte d'Alembert 1759, indem er annahm, dass der Betrag jedes Polynoms ein Minimum hat, und zeigte weiter, dass dieses Minimum null sein muss. Die Nullstelle kann dann als Linearfaktor abgespalten werden. Durch Wiederholung dieses Vorgangs kommt man zur Aussage des Fundamentalsatzes.

Euler stellte 1748 in seinem Buch „Einführung in die Analysis im Unendlichen" die Behauptung auf, dass alle Polynome in Linearfaktoren zerlegbar sind.

> „Wenn eine ganze Funktion von $\mathbb{Z}$ [Das bedeutet, dass alle Koeffizienten aus den ganzen Zahlen sind, JF] (Euler versteht unter „ganze Funktion" eine ganzrationale Funktion) imaginäre Linearfunktionen hat, so ist deren Anzahl gerade und sie lassen sich zu je zweien so zusammenfassen, dass ihr Produkt reell ist. … Also kann jede ganze Funktion von $\mathbb{Z}$ in reelle Faktoren ersten Grades oder zweiten Grades zerlegt werden. Obwohl das nicht in aller Strenge bewiesen ist, wird doch die Wahrheit dieses Satzes im folgenden immer mehr

gestützt werden, …“ (S. 288 - (Alten, Djafari Naini, Folkerts, Schlosser, Schlote, & Wußing, 2003))

Bemerkung: Wir wissen, dass für Polynome mit reellen Koeffizienten jede komplexe Nullstelle $z = a + i \cdot b$ gelten muss, das auch $\bar{z} = a - i \cdot b$ eine Nullstelle ist.

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = \overline{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \dots + \overline{a_n z^n} = a_0 + a_1 \bar{z} + \dots + a_n \bar{z}^n = p(\bar{z})$$

Da z selbst Nullstelle des Polynoms ist wissen wir, dass auch das komplex konjugierte also $\bar{z}$ Nullstelle ist. Das bedeutet, dass wir zwei Linearfaktoren haben:

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = (z - a - i \cdot b\ \ )(z - a + i \cdot b\ \ ) = z^2 - 2az + a^2 + b^2$$

Wenn wir nun die pq-Formel auf den hier vorliegenden Quadratischen Term anwenden erhalten wir folgendes:

$$0 = z^2 - 2az + a^2 + b^2$$

$$z_{1/2} = a \pm \sqrt{a^2 - (a^2 + b^2)}$$

$$z_{1/2} = a \pm \sqrt{-b^2}$$

Dies ist jedoch im reellen nicht lösbar, da $\sqrt{-b^2}$ nicht definiert ist. Das erklärt auch die Aussage, dass man Polynome (im reellen) in Linearfaktoren ersten und zweiten Grades zerlegen kann.

Die Mathematiker des 18. Jahrhunderts schlossen aus dem Kontinuitätsprinzip auf Lösungen für Polynome ungeraden Grads. Wenn wir ein reelles Polynom haben, dass sowohl positive Funktionswerte als auch negative Funktionswerte hat muss notwendiger Weise eine Nullstelle haben. Dies folgt unter anderem aus der Eigenschaft der Stetigkeit für alle Polynome und wird mittels des Zwischenwertsatzes von Bolzano und der Vollständigkeit von den reellen Zahlen bewiesen.

Wie wir sehen bemühten sich zahlreiche Mathematiker um einen Beweis des Fundamentalsatzes. Keinem gelang es einen vollständigen und exakten Beweis zu finden, bis schließlich Carl Friedrich Gauß im Jahr 1799 einen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra in seiner Dissertation lieferte. Er schrieb diese Dissertation an der Braunschweigischen Landesuniversität in Helmstedt. Gauß stellte in den folgenden Jahren noch weitere Beweise für eben diesen Satz auf. Alle diese Beweise lieferten unterschiedliche Wege zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Gauß ließ zudem keine Gelegenheit aus auf die Fehler seiner Vorgänger einzugehen.

Auch spätere Generationen von Mathematikern versuchten den Fundamentalsatz der Algebra möglichst elegant zu beweisen.

Der Körper der komplexen Zahlen

Da der Fundamentalsatz erst durch komplexe Zahlen ($\mathbb{C}$) erfüllt ist benötigen wir für sämtliche Beweise auch Vorwissen über diese. Die komplexen Zahlen bestehen aus einem Realteil und einem Imaginärteil. Dabei sind die Quadrate der imaginären Zahlen negative reelle Zahlen. Die komplexen Zahlen werden meist in der Form

$$a + i \cdot b \quad , a, b \in \mathrm{R}$$

dargestellt (wobei $i^2 = -1$ ist). Die komplexen Zahlen bilden auf diese Weise eine Ebene, die auch als Gaußsche Zahlenebene bezeichnet wird. Zudem lässt sich jede beliebige komplexe Zahl in Polarkoordinaten darstellen:

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi)),$$

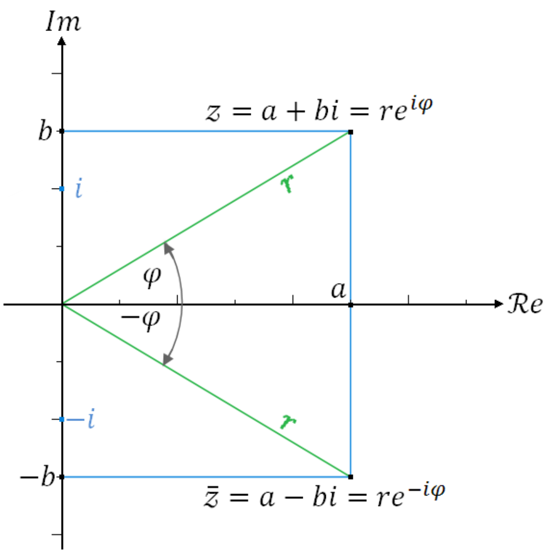

Abbildung 1 – Darstellung einer Zahl bzw. konjugierten Zahl in Polarkoordinaten (Quelle: (Wikipedia))

Die Eigenschaften der komplexen Zahlen bieten einige nützliche Eigenschaften. Die komplexen Zahlen bilden einen Körper. Auch für den Betrag einer komplexen Zahl lassen sich einige sehr interessante Schlüsse ziehen, die wir im weiteren Verlauf benötigen.

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Die Multiplikation komplexer Zahlen bietet auch einige interessante Besonderheiten. Wenn zwei beliebige komplexe Zahlen z und z‘ multipliziert werden, werden die Beträge multipliziert und die Argumente (Winkel) addiert.

$$z \cdot z' = \left(r \cdot e^{i\varphi}\right) \cdot \left(r' \cdot e^{i\varphi'}\right) = rr' \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi'} = rr' \cdot e^{i(\varphi+\varphi')}$$

Hieraus folgt die unter dem Namen der Moivreschen Formel, bekannte Regel:

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi} = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(n\varphi)),$$

Das bedeutet, dass bei der Multiplikation von komplexen Zahlen die Beträge multipliziert werden, während der „Winkel“ (hier das Argument φ) addiert wird. Aufgrund dieser Eigenschaften können wir nun die folgenden Beweise angehen.

Beweise

In der Literatur werden zwei äquivalente Aussagen für den Fundamentalsatz der Algebra verwendet:

1. Auf $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren
2. Jedes nicht-konstante Polynom besitzt eine Nullstelle

Wenn wir ein Polynom P vom Grad n haben, finden wir nach Aussage 2 eine Nullstelle z_0.

$$\Leftrightarrow P(z) = (z - z_0)Q(z)$$

Das Polynom Q ist vom Grad n-1. Diese Verfahren wenden wir insgesamt n-mal an und erhalten so eine Zerlegung des Polynoms P in Linearfaktoren.

$$\begin{aligned}
\mathrm{p(z)} &= \sum_{\mathrm{l=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_l z^l} = \sum_{\mathrm{l=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_l (z - z_0 + z_0)^l} = \sum_{\mathrm{l=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_l \big((z - z_0) + z_0\big)^l} = \sum_{l=1}^{n} a_l \sum_{k=1}^{l} \binom{l}{k} (z - z_0)^{l-k} \cdot {z_0}^l \\
&= \sum_{l=1}^{n} a_l {z_0}^l \sum_{k=1}^{l} \binom{l}{k} (z - z_0)^{l-k} = \sum_{l=1}^{n} a_l {z_0}^l \sum_{k=1}^{l} b_k \, (z - z_0)^k \\
&= (z - z_0) \sum_{l=1}^{n} a_l {z_0}^l \sum_{k=0}^{l-1} b_k \, (z - z_0)^k = (z - z_0) \cdot q(z)
\end{aligned}$$

Wobei der Grad von $q(z)$ = n-1

„Einfacher“ Beweis des Fundamentalsatzes

Der hier vorliegende Beweis geht auf die Quelle von Rolf Brigola (2008) zurück. Der Vorteil des Beweises liegt darin, dass er mit Mitteln der Analysis geführt wird. Wir bezeichnen im Folgenden ein Polynom vom Grad n:

$$P(z) = z^n + q(z) \,, \quad q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \, z^k \quad \text{für } \mathrm{n} \geq 1 \,, \mathrm{n} \in \mathbb{N}$$

Dabei nehmen wir hier an, dass es keinen Koeffizienten vor dem höchsten Exponenten gibt. Dies hat jedoch keine Auswirkung auf die Bestimmung von Nullstellen.

Hilfssatz. Es gibt eine reelle Zahl $\mathrm{r} > 0$, so dass für $\mathrm{z} \in \mathbb{C}$ außerhalb der offenen Kreisscheibe $\mathrm{K_r}\,(0)$ um Null mit Radius r gilt

$$|\mathrm{P(z)}| \ \geq \mathrm{r}$$

Beweis: Man setze $r = 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|$ und betrachte z mit $|\ z\ | \geq r \geq 1$. Dann gilt:

$$|\ q(z)\ | \ \leq \ |z|^{n-1} \left(\ |a_{n-1}| + \frac{|a_{n-2}|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}} \right)$$

$$\leq \ |z|^{n-1}\,(r-1) \ \leq \ |z|^{n-1}\,(|z|-1)$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt nun für $|P\ (z)|\ , |z| \ \geq r$ die Abschätzung

$$|\mathrm{P(z)}| \ = \ |z^n + \ q(z)| \ \geq \ |z^n| - \ |q(z)| \ \geq \ |z^n| - \ |z|^{n-1}\,(|z|-1)$$

$$= |z|^{n-1} \ \ \geq r \ \geq 1.$$

Folgerung. Die stetige Funktion $|P|$ hat in der abgeschlossenen Kreisscheibe $\mathrm{K_r}\,(0)$ ein Minimum, das wegen $|P(0)| = |a_0| < r$ im Inneren dieser Kreisscheibe liegt und auch Minimum von $|P|$ auf ganz $\mathbb{C}$ ist.

Fundamentalsatz der Algebra. Jedes nicht-konstante Polynom P hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle.

Beweis: z_0 sei Minimalstelle von $|P|$ in $\mathrm{K_r}\,(0)$, r wie im Hilfssatz oben gewählt. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $z_0 = 0$ ist (ansonsten „verschieben" wir die Funktion durch Koordinatentransformation $z \to z - z_0$). Sei nun also

$$P(z) = \ a_0 + \ a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \ \cdots \ + \ a_n z^n$$

mit $a_k \ \neq 0, P(0) = \ a_0$ und $z_0 = 0$ Minimalstelle von $|P|$. Dabei bezeichne k den ersten positiven Index m, für den $a_m \neq 0$ ist. Er existiert, da P nach Voraussetzung nicht-konstant ist. Wir zeigen nun, dass $P(0) = \ a_0 = 0$ gilt:

Im Weiteren seien dazu $w \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|w| = 1$ und für $t \ \geq 0$

$$f(t) = |P(tw)|^2 = P(tw)\overline{P(tw)}$$

Dann gilt

$$\left(a_0 + a_k t^k w^k + \cdots + a_n t^n w^n\right) \cdot \left(\overline{a_0} + \overline{a_k} t^k \overline{w}^k + \cdots + \overline{a_n} t^n \overline{w}^n\right) - a_0\overline{a_0}$$

$$= \left(\overline{a_0} a_k w^k + a_0 \overline{a_k}\,\overline{w}^k\right) t^k + t^{k+1} Q(t)$$

mit einem reellen Restpolynom Q.

Also

$$f(t) - f(0) = 2\Re\left(a_0\overline{a_k}w^k\right)t^k + t^{k+1}Q(t).$$

($\Re$ steht für den Realteil) Weil f in $t = 0$ minimal ist, gilt für hinreichend kleine $t \geq 0$

$$0 \leq \frac{f(t) - f(0)}{t^k} = 2\Re\left(a_0\overline{a_k}w^k\right) + tQ(t).$$

Mit $t \to 0$ folgt

$$0 \leq 2\Re\left(a_0\overline{a_k}w^k\right).$$

Dies gilt für alle $w \in \mathbb{C}, |w| = 1$. Da $a_k \neq 0$ ist und die Multiplikation mit w^k eine Drehung im Argument der rechten Seite bewirkt, könnte für passendes w die rechte Seite aber auch kleiner als Null werden, falls $a_0 \neq 0$ wäre. Das wäre ein Widerspruch. Daher muss $a_0 = P(0) = 0$ sein.

Topologischer Beweis des Fundamentalsatzes nach Gauß

Gauß behauptete, dass es für jedes Polynom

$$f(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten mindestens eine komplexe Zahl $\alpha = x + i \cdot y$ gibt, sodass

$$f(\alpha) = 0$$

Lassen wir nun eine komplexe Zahl z einen Kreis vom Radius r um den Ursprung beschreiben, so wird z^n einen Kreis vom Radius r^n genau n-mal durchlaufen, während z seinen Kreis einmal durchläuft (Moivresche Formel). Weiter müssen wir wissen, dass $|z|$ den Abstand zwischen z und 0 angibt und dass $|z - z'|$ den Abstand zwischen z und z‘ erklärt, wobei z‘$= x' + i \cdot y'$ eine andere komplexe Zahl ist. Desweiteren wird die Umlaufzahl in dem vorliegenden Beweis benötigt. Die Umlaufzahl einer Kurve in Bezug zu einem Punkt z_0 stellt die Anzahl der Umrundungen entgegen der Uhrzeigerrichtung um z_0 dar, wenn man dem Verlauf der Kurve folgt.

Nehmen wir an, das Polynom

$$f(z) = z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot z + a_0$$

hätte keine Nullstelle, sodass für jede komplexe Zahl gilt $f(z) \neq 0$.

Nun lassen wir z auf dem Kreis um 0 mit dem Radius r in der komplexen Ebene durchlaufen. Diese Kurve wird niemals durch den Ursprung verlaufen. Siehe folgende Abbildung.

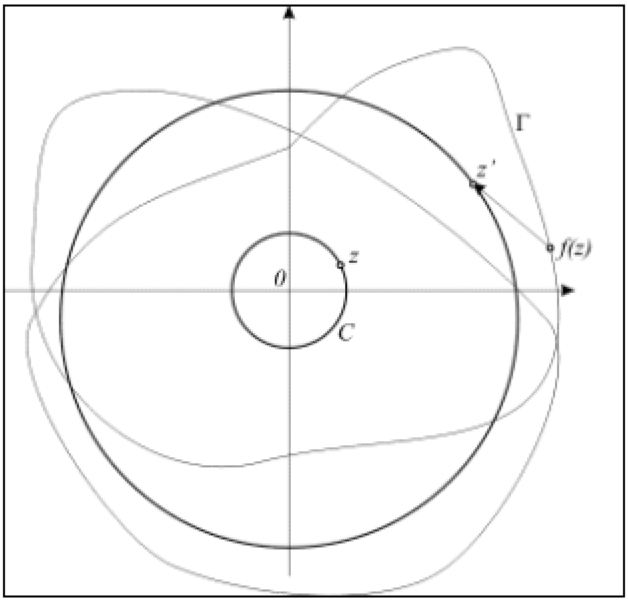

Abbildung 2 – (Quelle: (Modler, 2008))

Wir betrachten nun die Umlaufzahl für den Punkt 0 mit der geschlossenen Kurve die von $f(z)$ durchlaufen wird, während z eine geschlossene Kurve um den 0 Punkt durchläuft (Umlaufzahlen können nur ganze Zahlen sein). Die geschlossene Kurve welche von z durchlaufen wird sei ein Kreis um 0 mit der Radius r. Wir definieren die Funktion $\varphi(r)$ als die Umlaufzahl von 0 mit Bezug auf die Funktion $f(z)$ für den Kreis um 0 mit Radius r.

Wir können sagen, dass $\varphi(0) = 0$ gilt. Da ein Kreis mit dem Radius 0, 0 als einzigen Punkt besitzt. Die Kurve besteht dann aus dem Punkt $f(0) \neq 0$.

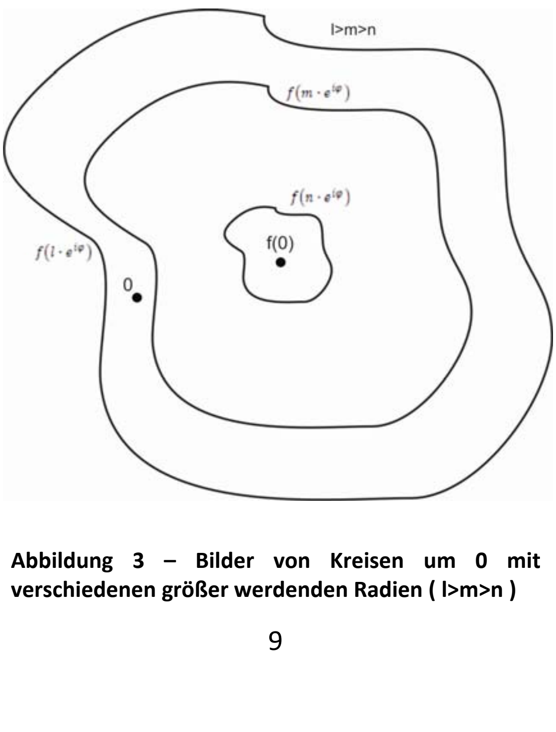

Abbildung 3 – Bilder von Kreisen um 0 mit verschiedenen größer werdenden Radien (l>m>n)

Wir zeigen nun, dass $\varphi(r) = n$ für große Werte von r gilt. Die Ordnung von $\varphi(r)$ hängt stetig von r ab, da $f(z)$ eine stetige Funktion von z ist. Da die Funktion $\varphi(r)$ aber nur ganzzahlige Werte annehmen und demnach nicht stetig von dem Wert 0 in den Wert n übergehen kann, haben wir einen Widerspruch konstruiert.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\varphi(r) = n$ für große Werte von r gilt. Auf einem Kreis mit dem Radius $|z| = r$, der so groß ist, dass $r > 1$ und $r > |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$, besteht offenbar die Gleichung

$$|f(z) - z^n| = |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \cdots + |a_0| = r^{n-1} \cdot \left[|a_{n-1}| + \cdots \frac{|a_0|}{r^{n-1}}\right] \leq r^{n-1} \cdot [|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|]$$
$$< r^n = |z^n|$$

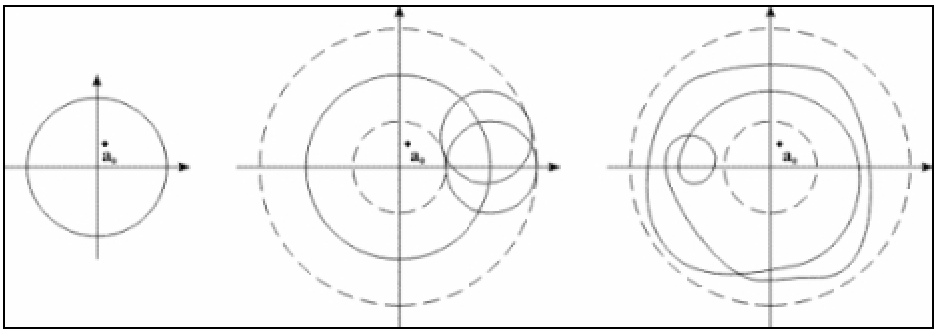

Abbildung 4 - Ein Umlauf auf einem Kreis mit genügend großem Radius um den Nullpunkt (linkes Bild) wird durch ein Polynom vom Grad *n* in einem n-maligen Durchlauf innerhalb eines Kreisringes abgebildet (siehe Bild rechts). Das mittlere Bild zeigt eine Kurve zur höchsten Potenz z^n und an zwei Stellen beispielsweise deren maximale „Störung" durch die Polynomterme zu den niedrigen Potenzen. (Quelle: (Modler, 2008))

Da der Ausdruck auf der linken Seite der Ungleichung der Abstand zwischen den beiden Punkten z^n und $f(z)$ ist, während der letzte Ausdruck auf der rechten Seite der Abstand des Punktes z^n vom Ursprung ist, sehen wir, dass die geradlinige Verbindung der Punkte $f(z)$ und z^n nicht durch den Ursprung gehen kann, solange z auf dem Kreis mit dem Radius r um den Ursprung liegt. Daher können wir die von $f(z)$ beschriebene Kurve stetig in die von z^n beschriebene Kurve deformieren, ohne jemals den Ursprung zu überstreichen, indem wir einfach jeden Punkt $f(z)$ längs seiner Verbindungslinie mit z^n verschieben. Da nun die Umlaufzahl des Ursprungs während der Deformation sich einerseits stetig ändert und anderseits nur ganzzahlige Werte annehmen kann, muss sie für beide Kurven denselben Wert haben. Weil die Ordnung für z^n gleich n ist, muss die Ordnung $f(z)$ ebenfalls n sein. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Ein Beweis des Fundamentalsatzes aus der Funktionentheorie

Der hier vorliegende Beweis wird mit Sätzen der Funktionentheorie durchgeführt und stammt in dieser Form aus der Funktionentheorie Vorlesung von Herrn Bauer (SS 2009). Zunächst müssen wir dafür der Vollständigkeit halber einige einführende Sätze zeigen. Im Kern geht der Beweis auf den Satz von Liouville zurück.

Der Satz von Liouville

Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis:

Vorbemerkung 1: Unter einer ganzen Funktion verstehen wir eine beliebige holomorphe (komplex-differenzierbare) Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Die komplexe Differenzierbarkeit ist definiert über den Differenzenquotienten

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \qquad , z \in \mathbb{C}$$

Vorbemerkung 2: Wir wissen durch den Entwicklungssatz, dass jede holomorphe Funktion in ihrem Konvergenzbereich in einer Potenzreihe entwickelbar ist:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Nach dem Entwicklungssatz und der Eigenschaft das die vorliegende Funktion eine ganze Funktion ist, wissen wir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad , \forall\, z \in \mathbb{C}$$

Die Cauchy-Ungleichung liefert für jedes $r > 0$

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \|f\|_r \qquad , \|f\|_r \leq \text{const.} \quad \text{, da f beschränkt}$$

$$\|f\|_r = \max\{|f(z)| \mid |z| = r\}$$

Daher $a_n = 0$, $\forall\, n \geq 1$

Lemma:

Ist $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ein Polynom vom Grad n über $\mathbb{C}$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $r > 0$, so dass gilt:

$$(a_n - \varepsilon)|z|^n \leq |f(z)| \leq (a_n + \varepsilon)|z|^n$$

falls $|z| > r$ ist.

Beweis:

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right) \ , \qquad für\ z \neq 0$$

$$|f(z)| = |z|^n \left|\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right)\right| \ \text{ mit } \ \left|\frac{a_{n-1}}{z}\right| + \cdots + \left|\frac{a_0}{z^n}\right| < \varepsilon \ \text{ falls |z| genügend groß ist}$$

Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes nicht konstante Polynom über $\mathbb{C}$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis:

Angenommen f hat keine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Wir betrachten $\frac{1}{f}: \ \mathbb{C} \ \rightarrow \ \mathbb{C}$

Nach Lemma existiert $B \ > 0 \, , r \ > 0$, so dass gilt:

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \ \leq \ \frac{1}{B \cdot |z|^n} \ \leq \ \frac{1}{B \cdot r^n} \quad , für\ |z| > r$$

Daraus folgt $\frac{1}{f}$ ist beschränkt auf $\mathbb{C} \backslash \overline{B_r(0)}$. Da $\frac{1}{f}$ auf $\overline{B_r(0)}$ auch beschränkt ist (da stetig), folgt mit Liouville, dass $\frac{1}{f}$ konstant ist. Dies ist ein Widerspruch.

Literaturverzeichnis

Alten, H.-W., Djafari Naini, A., Folkerts, M., Schlosser, H., Schlote, K.-H., & Wußing, H. (2003). *4000 Jahre Algebra - Geschichte, Kulturen, Menschen.* Berlin: Springer Verlag.

Brigola, R. (2008). *Lehrangebot Mathematik, Georg-Simon-Ohm-Fachhochschule Nürnberg.* Abgerufen am 26. 11 2009 von http://www.fh-nuernberg.de/aw/profs/brigola/Fundamentalsatz.pdf

Modler, F. (04. 11 2008). *Homepage von Florian Modler.* Abgerufen am 26. 11 2009 von http://www.stud.uni-hannover.de/~fmodler/beweisefsda.pdf

Wikipedia. (kein Datum). Abgerufen am 28. 11 2009 von http://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe_Zahl