Das Weierstraßsche Monster

Philipps- Universität Marburg
Fachbereich 12: Mathematik und Informatik
PS: Klassische Probleme der Mathematik
Leitung: Prof. Harald Upmeier, Benjamin Schwarz
Referentin: Lydia Großhennig

WS 2009/2010

Inhaltsverzeichnis

1 Historischer Überblick

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts waren die meisten Mathematiker der Meinung, dass stetige Funktionen bis auf wenige isolierte Stellen differenzierbar seien. Ampère will dies 1806 in einer Arbeit bewiesen haben. Sein Beweis hält aber einer kritischen Betrachtung [5] nicht stand und ist nicht schlüssig. Riemann soll 1861 das Beispiel

$$R(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2 t)}{\pi n^2}$$

als stetige, nicht differenzierbare Funktion angegeben haben. Dieses Beispiel hat Mathematiker über einhundert Jahre beschäftigt und erst in letzter Zeit einen endgültige Klärung erfahren [7]. Die Funktion $R(t)$ ist genau in den rationalen Punkten der Form $t = \frac{(2A+1)}{(2B+1)}$ differenzierbar mit der Ableitung $R'(t) = -\frac{1}{2}$, wobei $A, B \in \mathbb{Z}$.

Übrigens ist

$$R_{\frac{3}{2}}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2 t)}{\pi n^{\frac{3}{2}}}$$

eine stetige, nirgends differenzierbare Funktion. Die ersten publizierten Vertreter der stetigen, nirgends differenzierbaren Funktionen gehen wohl auf Weierstraß zurück mit

$$W(t) := \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(\pi a^n t), \quad 0 < b < 1, \; a \in \mathbb{Z} \; \textit{ungerade}, \; ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$$

wobei $\{a^n\}$ als Frequenz- und $\{b^n\}$ als Amplitudenfolge interpretiert werden können. Von Cellèrier stammt das Beispiel

$$C(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} \cos(\pi a^n t), \quad b \textit{ gerade und } b > 1000.$$

Allerdings hat Bolzano bereits um 1834 eine derartige Funktion angegeben. (Diese wird freilich selten als erstes publiziertes Beispiel einer stetigen, nicht differenzierbaren Funktion angegeben, da der Beweis von Bolzano nicht schlüssig [4] war und erst K. Rychlik [4] zeigte, dass es sich bei der durch Bolzano angegebenen Funktion tatsächlich um eine stetige, nicht differenzierbare handelt.) Die Funktion von Bolzano ergibt sich rekursiv aus dem Grenzwert einer Folge stetiger Polygonzüge. Ausgehend von $B_0(t) := t, \quad 0 \le t \le 1$, ersetzt man nach Halbierung die beiden Halbseiten des Graphen durch je zwei Stecken mit doppelt positiver und negativer Steigung und gelangt so schrittweise zu $B_n(t)$ mit der Kurvenlänge $(1 + 2^{2n})^{\frac{1}{2}}$. Wie Strubecker zeigt, ist die Grenzfunktion $B(t)$ ebenfalls stetig und nirgends differenzierbar.

Die Weierstraßsche Entdeckung wurde stark beachtet und rief Stellungnahmen hervor, die von "schrecklich" und "erbärmlich" (du Bois-Reymond, Hermite), "Verstoß" gegen die Ideen der Altvorderen" (Poincarè) bis "wertvolle Anregung" (Jordan, Lebesgue) gingen.
Nicht zu leugnen ist, dass hierdurch entscheidende Entwicklungen in der Theorie der reellen Funktionen, Maß- und Integrationtheorie, Funktionsanalysis und mathematischen Physik eingeleitet wurden. Während das Cellèrier- Beispiel noch unendliche Differentialquotienten auf einer dichten, abzählbaren Menge ($t = \frac{r}{b^k},\ r \in \mathbb{Z}$) besitzt, haben die Weierstraß-Funktionen dort nur Spitzen mit unendlichen einseitigen Ableitungen. Zum Beweis der Nichtdifferenzierbarkeit untersucht man zwei einen Punkt einschließende Folgen von Differenzenquotienten, von denen die eine gegen $+\infty$, die andere gegen $-\infty$ strebt. Die Bedingung $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ ist jedoch technischer Natur und kann durch $ab \geq 1$ [6] ersetzt werden. Sogar für alle reellen $b > 1$ haben die Funktionen

$$f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(\pi a^n t), \qquad \tilde{f}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} b^n \sin(\pi a^n t)$$

in keinem Punkt einen endlichen Differentialquotienten, wie Hardy [6] zeigen konnte.

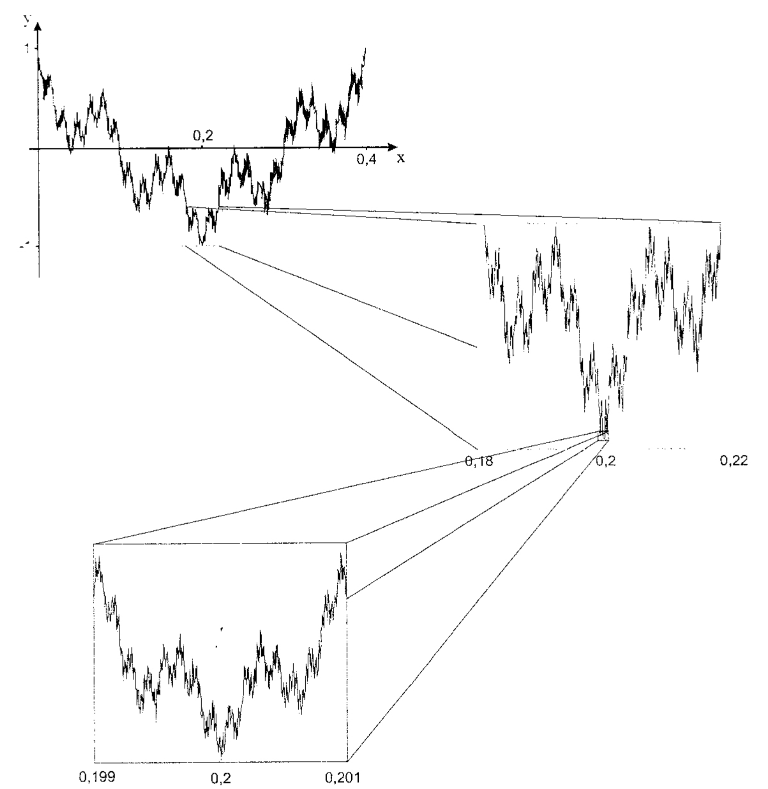

Abbildung 1: ein Bild des Weierstraßschen Monster für $b = \frac{1}{2}$, $a = 9$ und $x = 0,2$

2 Karl Theodor Wilhelm Weierstraß

2.1 Eckdaten

- *31. Oktober 1815 in Ostenfelde bei Ennigerloh/Münsterland
- †19. Februar 1897 in Berlin

Abbildung 2: Karl Theodor Wilhelm Weierstraß

zur Geburt Sein Vater, Wilhelm, war Sekretär beim Bürgermeister von Ostenfelde.

mit 8 Jahren Der Vater wurde Steuerinspektor, weshalb die Familie viel in Preußen herumziehen musste.

mit 13 Jahren Starb seine Mutter und sein Vater erhielt einen festen Posten in Paderborn. Karl besucht das dortige Gymnasium Theodorianum. Nebenher arbeitete er in der Buchführung, um die Familienfinanzen zu verbessern. Hatte aber trotzdem gute Noten und las nebenbei die führende deutsche Mathematik- Zeitschrift Crelles Journal.

mit 19 Jahren Studierte Karl in Bonn Rechtswissenschaften und Finanzwesen, wobei er nach Felix Klein (weiterer Mathematiker) zu sehr in seiner Studentenverbindung aufging. Nebenbei las er jedoch Werke von Laplace, Abel und Jacobi, was ihn in seiner Hinwendung zur Mathematik bestärkte.

mit 23 Jahren Verlässt Karl die Universität Bonn ohne einen Abschluss. Er überzeugte seinen Vater an der Akademie Münster Mathematik und Physik studieren zu dürfen.

mit 25 Jahren Unterrichtete er als Lehrer an einem Gymnasium in Münster. Hier entwickelt er auch die Grundlagen seiner späteren Theorie der komplexen Funktionen, veröffentlichte aber nichts.

mit 27 Jahren War er am Progymnasium im damaligen Deutsch- Krone in Westpreußen tätig. Hier musste er auch Turnen unterrichten, da er in jungen Jahren selbst geturnt hatte und das Fach neu eingeführt werden sollte.

mit 33 Jahren War er im damaligen Braunsberg am Lyceum Hosianum tätig. Hier begannen auch seine Gesundheitsprobleme.

mit 39 Jahren Erregte er zum ersten Mal Aufmerksamkeit in der "mathematischen Welt" mit einem Aufsatz in Crelles Journal *Zur Theorie der Abelschen Funktionen.*

mit 41 Jahren Erhielt er die Ehrendoktorwürde der Universität Königsberg aufgrund seiner ausführlicheren Arbeit *Zur Theorie der Abelschen Funktionen* und die Berliner Mathematiker Peter Dirichlet und Ernst Kummer versuchten ihn nach Berlin zu ziehen. Er begann im Königlichen Gewerbeinstitut Mathematik zu unterrichten, wurde im selben Jahr auch noch außerordentlicher Professor an der Universität Berlin. In Berlin bildete sich bald eine große Schule um ihn.

mit 46 Jahren Weierstraß erleidet einen völligen gesundheitlichen Zusammenbruch.

mit 49 Jahren Wurde er zum ordentlichen Professor der Friedrich- Wilhelms- Universität in Berlin ernannt.

mit 55 Jahren Unterrichtete er Sofia Kowalewskaja privat, da sie als Frau keine Zulassung an der Universität erhielt. Beide verband ein besonderes Verhältnis. Ebenso wurde er in diesem Jahr Dekan der Philosophischen Fakultät (ein Jahr lang).

mit 57 Jahren Veröffentlichte er ein stetige, nirgends differenzierbare Funktion.

mit 58 Jahren Wurde er Rektor der Friedrich- Wilhelm- Universität Berlin.

mit 62 Jahren Gibt es ein Zerwürfnis zwischen ihm und einem Berliner Kollegen Leopold Kronecker, der die Mengenlehre von Weierstraß' Schüler Georg Cantor ablehnte.

mit 70 Jahren Wurde ihm als Zeichen der Verehrung und Dankbarkeit ein Fotoalbum mit Porträts vieler seiner Schüler, Freunde und Kollegen überreicht.

mit 75 Jahren Starb die langjährige Bekannte Sofia Kowalewskaja.

mit 77 Jahren Verleihung der Helmholtz- Medaille der Königlich- Freußischen Akademie der Wissenschaften.

mit 80 Jahren Verleihung der Copley- Medaille der Royal Society London.

mit 82 Jahren Starb er gezeichnet durch körperliche Leiden, aber immer noch schlagfertig, an einer Lungenentzündung.

2.2 Werke

- die logisch korrekten Fundierung der Analysis.
- die Entwicklung der Funktionentheorie auf der Basis der Potenzreihenentwicklungen.
- wichtige Beiträge zur Theorie der elliptischen Funktionen, zur Differentialgeometrie und zur Variationsrechnung
- Begriff *Elementarteiler* (aus der Algebra) stammt von ihm
- bewies, dass der Körper der komplexen Zahlen der einzige endlichdimensionale kommutative Oberkörper der reellen Zahlen ist
- fand eine Funktion, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist

2.2.1 Sätze die nach ihm benannt wurden

- Satz von Bolzano- Weierstraß
- Approximationssatz von Weierstraß
- Satz von Lindemann- Weierstraß
- weierstraßscher Konvergenzsatz
- weierstraßsche Zerlegungsformel
- Vorbereitungssatz von Weierstraß
- weierstraßscher Produktsatz
- Satz von Weierstraß- Casorati
- Satz vom Minimum und Maximum, wird manchmal auch als *Satz von Weierstraß* bezeichnet

3 Grundlagen

Definition Funktion

Seien M und N Mengen. Eine Funktion $f : M \to N$ (eine Funktion f von M nach N) ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in M$ (genau) ein Element $f(x) \in N$ zuordnet.

Definition Stetigkeit

1. f heißt stetig in $a \in D$, falls gilt $f(x) \overset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$ (d.h. $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert und ist gleich $f(a)$).

2. f heißt stetig (auf D), falls f in jedem Punkt von D stetig ist.

Definition Differenzierbarkeit

1. f heißt differenzierbar in a, falls der Grenzwert $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I \setminus \{a\}}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert. Falls er existiert, bezeichnet man ihn mit $f'(x)$ und nennt ihn die Ableitung von f in a.

2. f heißt differenzierbar in I, falls f in jedem Punkt $a \in I$ differenzierbar ist. Die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ heißt dann die Ableitung von f.

Geometrische Interpretation der Differenzierbarkeit

f ist differenzierbar in $a \iff$ die Sekanten durch $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ "konvergieren" für $x \to a$.

Definition Sekante

Gerade die durch (mindestens) zwei Punkte einer Kurve (Bsp.: ein Funktionsgraph) geht.

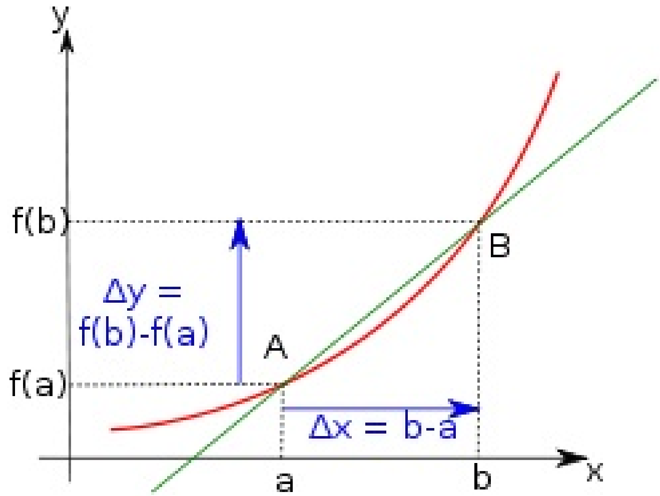

Abbildung 3: Wie man sich Differenzierbarkeit vorstellen kann...

4 Beweise

4.1 Beweis der Stetigkeit des Weierstraßschen Monsters

Wir wollen zeigen, dass die Funktion $f(x) = f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi)$, auch Weierstraßsches Monster [1] genannt, mit $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$ ungerade, $0 < b < 1$ stetig ist.
Für $\frac{1}{x}$ gilt $\frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Des weiteren ist $f_k(\frac{1}{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \frac{1}{x}\pi)$ und $f_k(0) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n 0\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \overset{geom.Reihe}{=} \frac{1}{1-b}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f_k(\frac{1}{x}) &= \lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\left(a^n \frac{1}{x}\pi\right) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to\infty} \left(b^n \cos\left(a^n \frac{1}{x}\pi\right)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to\infty} b^n \lim_{x\to\infty} \cos\left(a^n \frac{1}{x}\pi\right) \\
&\overset{(**)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\left(\lim_{x\to\infty} (a^n \frac{1}{x}\pi)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\left(a^n \lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x})\ \pi\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b^n 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b^n \\
&= \frac{1}{1-b} \\
\lim_{x\to\infty} f_k(\frac{1}{x}) &= f_k(0)
\end{aligned}$$

Da $\lim_{x\to\infty} b^n = b^n$ und $\lim_{x\to\infty} \cos(a^n \frac{1}{x}\pi) = \cos(0) = 1$ gilt.

(∗) Den Limes in die Summe ziehen ist nur gestattet, wenn der Grenzwert ebenfalls stetig ist: Da gilt, wenn die Funktionenfolgen $f_k = \sum_{n=0}^{k} b^n \cos(a^n x\pi)$ für alle k stetig sind und ausserdem die Funktionenfolgen f_k gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f konvergieren, dann ist f ebenfalls stetig.
Das die f_k für alle k stetig sind ist klar. (Der cos ist eine stetige Funktion, der Rest ist konstant, damit ist dann auch die Summe stetig.) Jetzt muss nur noch gezeigt werden, dass f_k gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert. Eine Funktionfolge

[1] Die Klassifizierung einiger mathematischer Gegenstände von Volkert [9], welche einen als paradox bestimmten Charakter besitzen, bezeichnet dieser als Monster.

f_k ist gleichmäßig konvergent, wenn $\|f_k\|_{sup} = \|\sum_{n=0}^{k} b^n \cos(a^n x\pi)\|_{sup}$ konvergent ist (Weierstraß Kriterium). Also wissen wir, dass f_k gleichmäßig konvergent ist, da gilt: $\| \sum_{n=0}^{k} f_n\|_{sup} \overset{\triangle-Ungl.}{\leq} \sum_{n=0}^{k}\|f_n\|_{sup} = \sum_{n=0}^{k} sup\{|f_n|, x \in \mathbb{R}\} = \sum_{n=0}^{k} sup\{|b^n \cos(a^n x\pi)|, x \in \mathbb{R}\} = \sum_{n=0}^{k} b^n$ da $|\cos(a^n x\pi)|$ kleiner gleich eins und b positiv ist. Und da $\sum_{n=0}^{k} b^n$ gegen $\frac{1}{1-b}$ konvergiert, konvergiert $\|f_k\|_{sup}$ gleichmäßig.

(∗∗) Der Cosinus ist eine stetige Funktion, deswegen darf man den Limes auch in den Cosinus reinziehen.

4.2 Beweis der Nicht- Differenzierbarkeit des Weierstraßschen Monsters

Um zu zeigen, dass die Funktion $f(x) = f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi)$ mit $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$ ungerade, $0 < b < 1$ in einem Punkt nicht differenzierbar ist, genügt es zu zeigen, dass zwei verschiedene Folgen, die gegen diesen Punkt konvergieren, nicht denselben Differentialquotienten besitzen.
Sei $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ beliebig und x_0 ein bestimmter, aber beliebiger, Wert von $x \in \mathbb{R}$, für den der Differentialquotienten zu untersuchen ist.
Nun gibt es ein $\gamma_m \in \mathbb{Z}$, so dass gilt:

$$-\frac{1}{2} < a^m x_0 - \gamma_m \leq \frac{1}{2}$$

Wir definieren nun $a^m x_0 - \gamma_m := \Delta_{m+1}$, wobei $a \in \mathbb{Z}$ ungerade ist. Ausserdem setzen wir $x'_m = \frac{\alpha_m - 1}{a_m}$, $x''_m = \frac{\alpha_m + 1}{a^m}$. Dann gilt nun $x'_m < x_0 < x''_m$ und x'_m konvergiert gegen x_0 für $m \to \infty$, ebenso konvergiert x''_m gegen x_0 für $m \to \infty$. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} x'_m - x_0 &= -\frac{1 + \Delta_{m+1}}{a^m} \\ x''_m - x_0 &= \frac{1 - \Delta_{m+1}}{a^m} \end{aligned}$$

für die Berechnung des Differenzenquotienten für x'_m.

Also ist

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x'_m) - f(x_0)}{x'_m - x_0} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x'_m \pi) - \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x_0 \pi)}{x'_m - x_0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(b^n \frac{\cos(a^n x'_m \pi) - \cos(a^n x_0 \pi)}{x'_m - x_0} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \left((ab)^n \frac{\cos(a^n x'_m \pi) - \cos(a^n x_0 \pi)}{a^n (x'_m - x_0)} \right) \\
&+ \sum_{n=m}^{\infty} \left(b^{(n)} \frac{\cos(a^{(n)} x'_m \pi) - \cos(a^{(n)} x_0 \pi)}{x'_m - x_0} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \left((ab)^n \frac{\cos(a^n x'_m \pi) - \cos(a^n x_0 \pi)}{a^n (x'_m - x_0)} \right) \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(b^{(m+n)} \frac{\cos(a^{(m+n)} x'_m \pi) - \cos(a^{(m+n)} x_0 \pi)}{x'_m - x_0} \right).
\end{aligned}
$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos(a^n x'_m \pi) - \cos(a^n x_0 \pi)}{x'_m - x_0} &= -\frac{\pi \sin(a^n \frac{x'_m + x_0}{2} \pi) \cdot \sin(a^n \frac{x'_m - x_0}{2} \pi)}{a^n \frac{x'_m - x_0}{2} \pi} \\
&= -\pi \sin(a^n \frac{x'_m + x_0}{2} \pi) \cdot \frac{\sin(a^n \frac{x'_m - x_0}{2} \pi)}{a^n \frac{x'_m - x_0}{2} \pi},
\end{aligned}
$$

nach den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen:

$$
\frac{1}{2} \left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right) = \sin\alpha \ \sin\beta \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin\alpha \ \sin\beta,
$$

wenn man für $\alpha = a^n \frac{x'_m + x_0}{2} \pi$ und für $\beta = a^n \frac{x'_m - x_0}{2} \pi$ einsetzt. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\left(a^n \frac{x'_m + x_0}{2} \pi \right) - \left(a^n \frac{x'_m - x_0}{2} \pi \right) \right) &= \cos(a^n x_0 \ \pi) \\
\cos\left(\left(a^n \frac{x'_m + x_0}{2} \pi \right) + \left(a^n \frac{x'_m - x_0}{2} \pi \right) \right) &= \cos(a^n x'_m \pi).
\end{aligned}
$$

Ebenso gilt allerdings auch:

$$
-1 < \frac{\sin(a^n \frac{x'_m - x_0}{2} \pi)}{a^n \frac{x'_m - x_0}{2} \pi} < +1,
$$

deswegen ist

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{m-1}\left((ab)^n \frac{\cos(a^n x'_m\pi) - \cos(a^n x_0\pi)}{a^n(x'_m - x_0)}\right)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{m-1}\left((ab)^n\left(-\pi\sin(a^n\frac{x'_m + x_0}{2}\pi)\cdot\frac{\sin(a^n\frac{x'_m - x_0}{2}\pi)}{a^n\frac{x'_m - x_0}{2}\pi}\right)\right)\right| \\
&\overset{-1<\sin<1}{<} \pi\sum_{n=0}^{m-1}(ab)^n \\
&= \pi\frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} \\
&< \frac{\pi}{ab-1}(ab)^m
\end{aligned}
$$

Damit haben wir den ersten Teil der Gleichung abgeschätzt.

Beginnen wir mit dem zweiten Teil der Gleichung. Es gilt, weil $a \in \mathbb{Z}$ eine ungerade Zahl ist, da $\cos(k\pi) = 1$ für $k \in \mathbb{Z}$ gerade und weil $\cos(k\pi) = -1$ für $k \in \mathbb{Z}$ ungerade und indem $\gamma \in \mathbb{Z}$ ist:

$$
\begin{aligned}
\cos(a^{m+n}x'_m\pi) &= \cos(a^{m+n}\left(\frac{\gamma_m - 1}{a^m}\right)\pi) \\
&= \cos(a^n(\gamma_m - 1)\pi) \\
&= -(-1)^{\gamma_m},
\end{aligned}
$$

und nach dem Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen gilt:

$$
\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)
$$

Welches wir hier anwenden:

$$
\begin{aligned}
\cos(a^{m+n}x_0\pi) &= cos\left(a^{m+n}\left(\frac{\Delta_{m+1} + \gamma_m}{a^m}\right)\pi\right) \\
&= \cos(a^n\gamma_m\pi + a^n\Delta_{m+1}\pi) \\
&= \cos(a^n\gamma_m\pi)\ \cos(a^n\Delta_{m+1}\pi) + \sin(a^n\gamma_m\pi)\ \sin(a^n\Delta_{m+1}\pi) \\
&= (-1)^{\gamma_m}\cos(a^n\Delta_{m+1}\pi),
\end{aligned}
$$

da $sin(k\pi) = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$ und aus den oben genannten Gründen. Nun ist der 2. Teil unserer Gleichung:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} b^{(m+n)}\frac{\cos(a^{(m+n)}x'_m\pi) - \cos(a^{(m+n)}x_0\pi)}{x'_m - x_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} b^{(m+n)}\left(\frac{-(-1)^{\gamma_m} - (-1)^{\gamma_m}\cos(a^n\Delta_{m+1}\pi}{-\frac{1+\Delta_{m+1}}{a^m}}\right) \\
&= (-1)^{\gamma_m}(ab)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1 + \cos(a^n\Delta_{m+1}\pi)}{1 + \Delta_{m+1}}\ b^n.
\end{aligned}
$$

Weiterhin gilt auch:

$$\frac{1+\cos(a^n \Delta_{m+1}\pi)}{1+\Delta_{m+1}}\, b^n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und ferner gilt

$$\begin{aligned}\frac{1+\cos(a^0 \Delta_{m+1}\pi)}{1+\Delta_{m+1}}\, b^0 &= \frac{1+\cos(\Delta_{m+1}\pi)}{1+\Delta_{m+1}} \\ &\geq \frac{2}{3},\end{aligned}$$

da cos $(\Delta_{m+1}\ \pi) \geq 0$, aber $\frac{1}{2} < 1 + \Delta_{m+1} < \frac{3}{2}$.

Also gilt nun für die gesamte Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{f(x'_m) - f(x_0)}{x'_m - x_0} &= (-1)^{\gamma_m}(ab)^m \eta \left(\frac{2}{3} + \epsilon\ \frac{\pi}{ab-1}\right) \\ &= \left((-1)^{\gamma_m}(ab)^m \eta\ \frac{2}{3} + (-1)^{\gamma_m}(ab)^m \eta\ \epsilon\ \frac{\pi}{ab-1}\right),\end{aligned}$$

wobei $\eta > 1$ und $-1 < \epsilon < 1$ ist.

Ebenso ergibt sich dies auch für x''_m:

$$\begin{aligned}\frac{f(x''_m) - f(x_0)}{x''_m - x_0} &= -(-1)^{\gamma_m}(ab)^m \eta_1\ (\frac{2}{3} + \epsilon_1\ \frac{\pi}{ab-1}) \\ &= \left(-(-1)^{\gamma_m}(ab)^m \eta_1\ \frac{2}{3} - (-1)^{\gamma_m}(ab)^m \eta_1\ \epsilon_1\ \frac{\pi}{ab-1}\right),\end{aligned}$$

wobei $\eta_1 > 1$ und $-1 < \epsilon < 1$ ist.

Nimmt man nun a, b so an, dass $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, also

$$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1},$$

ist, so haben

$$\frac{f(x'_m) - f(x_0)}{x'_m - x_0}, \quad \frac{f(x''_m) - f(x_0)}{x''_m - x_0}$$

stets entgegengesetzte Vorzeichen, werden aber beide, wenn m ohne Ende wächst unendlich groß. Daraus ergibt sich, dass $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ weder einen bestimmten endlichen, noch auch einen bestimmten unendlich großen Differentialquotienten besitzt. Und da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt war ist die Funktion nirgends differenzierbar.

Literatur

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass

[2] http://www.sammlungen.hu-berlin.de/dokumente/238/

[3] Weierstraß, K.: *Abhandlung aus der Functionenlehre.* Springer, 1886.

[4] Hobson, E. W.: *Theory of functions of a Real Variable and the theory of fourir's series.*, Vol. 1, 2. Dover, New York 1926/ 1957.

[5] Boese, G., Luther, W.: *Stetige, nirgends differenzierbare Funktionen und nicht rektifizierbare Kurven.* In math. Semesterberichte, 30, S. 228-249 (1981).

[6] Hardy, G. H.: *Weierstrass's non-differentiable function.* Trans. Amer. Math. Soc. 17: 302-325 (1916).

[7] Neuenschwander, E.: *Riemann' s Example of a Continous, "Nondifferentiable" Function.* Math. Intelligencer 1: 40- 44 (1978).

[8] Krüger, N.: *Konstruktion und Visualisierung von stetigen, nirgends differenzierbaren Funktionen.* Wissenschaftliche Hausarbeit im Fach Mathematik, 2007.

[9] Volkert, K.: *Die Krise der Anschauung. Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850.* Göttingen, Vandehoeck und Ruprecht (1986).