1 Historischer Überblick

Beginn des 19. Jahrhunderts herrschte Meinung, dass stetige Funktionen bis auf wenige isolierte Stellen differenzierbar seien vor

1806 Ampère will dies in einer Arbeit bewiesen haben

1834 gab wohl Bolzano die erste stetig, nirgends diffbare Funktion an, die aber erst 1922 veröffentlicht wurde, die Funktion von Bolzano ergibt sich rekursiv aus dem Grenzwert einer Folge stetiger Polygonzüge

1861 dachte sich Riemann das Beispiel $R(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2 t)}{\pi n^2}$ aus, von dem wir heute wissen, dass es in einigen Punkten differenzierbar ist, andererseits ist aber $R_{\frac{3}{2}}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2 t)}{\pi n^{\frac{3}{2}}}$ eine stetig, nirgends differenzierbare Funktion

1872 ersten publizierten Vertreter der stetigen, nirgends differenzierbaren Funktionen gehen wohl auf Weierstraß zurück mit $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(\pi a^n t), 0 < b < 1,\ a \in \mathbb{Z}$ ungerade, $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$

ca. 1890 veröffentlichte Cellèrier sein Beispiel, dass er vermutlich um 1860 "entdeckte", $C(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} \cos(\pi a^n t), b$ gerade und $b > 1000$

- Stellungnahmen anderer zur Entdeckung des Weierstraßschen Monsters: "schrecklich" und "erbärmlich" (du Bois-Reymond, Hermite), "Verstoß" gegen die Ideen der Altvorderen" (Poincarè) bis "wertvolle Anregung" (Jordan, Lebesgue)
- nicht zu leugnen - hierdurch entscheidende Entwicklungen in der Theorie der reellen Funktionen, Maß- und Integrationtheorie, Funktionsanalysis und mathematischen Physik eingeleitet

1.1 am Ende, wenn noch Zeit ist

- Während das Cellèrier- Beispiel noch unendliche Differentialquotienten auf einer dichten, abzählbaren Menge ($t = \frac{r}{b^k},\ r \in \mathbb{Z}$) besitzt, haben die Weierstraß- Funktionen dort nur Spitzen mit unendlichen einseitigen Ableitungen.

2 Karl Theodor Wilhelm Weierstraß

2.1 Eckdaten

- *31. Oktober 1815 in Ostenfelde bei Ennigerloh/Münsterland
- †19. Februar 1897 in Berlin

zur Geburt Vater, Wilhelm, war Sekretär beim Bürgermeister von Ostenfelde.

mit 8 Jahren Vater wurde Steuerinspektor, weshalb Familie viel in Preußen herumziehen musste.

mit 13 Jahren Starb Mutter und Vater erhielt festen Posten in Paderborn. Karl besucht das dortige Gymnasium. Nebenher arbeitete er in Buchführung, um die Familienfinanzen zu verbessern. Hatte trotzdem gute Noten und las nebenbei die führende deutsche Mathematik- Zeitschrift Crelles Journal.

mit 19 Jahren Studierte Karl in Bonn Rechtswissenschaften und Finanzwesen, wobei er nach Felix Klein (weiterer Mathematiker) zu sehr in seiner Studentenverbindung aufging, las Werke von Laplace, Abel und Jacobi, bestärkte ihn in Hinwendung zur Mathematik

mit 23 Jahren Verlässt Uni ohne einen Abschluss,überzeugte seinen Vater an der Akademie Münster Mathematik und Physik studieren zu dürfen.

mit 25 Jahren Unterrichtete als Lehrer am Gymnasium in Münster, entwickelt hier die Grundlagen seiner späteren Theorie der komplexen Funktionen, veröffentlichte aber nichts.

mit 27 Jahren am Progymnasium im damaligen Deutsch- Krone in Westpreußen tätig, musste Turnen unterrichten, hatte in jungen Jahren selbst geturnt, Fach sollte neu eingefŸhrt werdeb

mit 33 Jahren am damaligen Braunsberg am Lyceum Hosianum tätig,hier begannen seine Gesundheitsprobleme.

mit 39 Jahren Erregte zum ersten Mal Aufmerksamkeit in der "mathematischen Welt" mit einem Aufsatz in Crelles Journal *Zur Theorie der Abelschen Funktionen.*

mit 41 Jahren Erhielt er die Ehrendoktorwürde der Universität Königsberg aufgrund seiner ausführlicheren Arbeit *Zur Theorie der Abelschen Funktionen* und die Berliner Mathematiker Peter Dirichlet und Ernst Kummer versuchten ihn nach Berlin zu ziehen, begann im Königlichen Gewerbeinstitut Mathematik zu unterrichten, wurde im selben Jahr zum außerordentlicher Professor an der Universität Berlin. In Berlin bildete sich bald eine große Schule um ihn.

mit 46 Jahren erleidet einen völligen gesundheitlichen Zusammenbruch.

mit 49 Jahren Wurde zum ordentlichen Professor der Friedrich- Wilhelms- Universität in Berlin ernannt.

mit 55 Jahren Unterrichtete Sofia Kowalewskaja privat, da sie als Frau keine Zulassung an der Universität erhielt. Beide verband ein besonderes Verhältnis. Ebenso wurde er in diesem Jahr Dekan der Philosophischen Fakultät (ein Jahr lang).

mit 57 Jahren Veröffentlichte ein stetige, nirgends differenzierbare Funktion.

mit 58 Jahren Wurde Rektor der Friedrich- Wilhelm- Universität Berlin.

mit 62 Jahren Gibt es ein Zerwürfnis zwischen ihm und einem Berliner Kollegen Leopold Kronecker, der die Mengenlehre von Weierstraß' Schüler Georg Cantor ablehnte.

mit 70 Jahren Wurde ihm als Zeichen der Verehrung und Dankbarkeit ein Fotoalbum mit Porträts vieler seiner Schüler, Freunde und Kollegen überreicht.

mit 75 Jahren Starb die langjährige Bekannte Sofia Kowalewskaja.

mit 77 Jahren Verleihung der Helmholtz- Medaille der Königlich- Freußischen Akademie der Wissenschaften.

mit 80 Jahren Verleihung der Copley- Medaille der Royal Society London.

mit 82 Jahren Starb er gezeichnet durch körperliche Leiden, aber immer noch schlagfertig, an einer Lungenentzündung.

2.2 Werke

- die logisch korrekten Fundierung der Analysis.
- die Entwicklung der Funktionentheorie auf der Basis der Potenzreihenentwicklungen.
- wichtige Beiträge zur Theorie der elliptischen Funktionen, zur Differentialgeometrie und zur Variationsrechnung
- Begriff *Elementarteiler* (aus der Algebra) stammt von ihm
- bewies, dass der Körper der komplexen Zahlen der einzige endlichdimensionale kommutative Oberkörper der reellen Zahlen ist
- fand eine Funktion, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist

2.2.1 Sätze die nach ihm benannt wurden

- Satz von Bolzano- Weierstraß
- Approximationssatz von Weierstraß
- Satz von Lindemann- Weierstraß
- weierstraßscher Konvergenzsatz
- weierstraßsche Zerlegungsformel
- Vorbereitungssatz von Weierstraß
- weierstraßscher Produktsatz
- Satz von Weierstraß- Casorati
- Satz vom Minimum und Maximum, wird manchmal auch als *Satz von Weierstraß* bezeichnet

3 Grundlagen

Definition Funktion

Seien M und N Mengen. Eine *Funktion* $f : M \to N$ (eine Funktion f von M nach N) ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in M$ (genau) ein Element $f(x) \in N$ zuordnet.

Definition Stetigkeit

1. f heißt *stetig in* $a \in D$, falls gilt $f(x) \xrightarrow{x \to a} f(a)$ (d.h. $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert und ist gleich $f(a)$).

2. f heißt stetig (auf D), falls f in jedem Punkt von D stetig ist.

Definition Differenzierbarkeit

1. f heißt *differenzierbar in* a, falls der Grenzwert $\lim_{\substack{x\to a \\ x\in I\setminus\{a\}}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert. Falls er existiert, bezeichnet man ihn mit $f'(x)$ und nennt ihn die Ableitung von f in a.

2. f heißt *differenzierbar in* I, falls f in jedem Punkt $a \in I$ differenzierbar ist. Die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ heißt dann die Ableitung von f.

Geometrische Interpretation der Differenzierbarkeit

f ist differenzierbar in $a \iff$ die Sekanten durch $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ "konvergieren" für $x \to a$.

Definition Sekante

Gerade die durch (mindestens) zwei Punkte einer Kurve (Bsp.: ein Funktionsgraph) geht.

4 Beweise

4.1 Beweis der Stetigkeit des Weierstraßschen Monsters

Wir wollen zeigen, dass die Funktion $f(x) = f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi)$, auch Weierstraßsches Monster [1] genannt, mit $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$ ungerade, $0 < b < 1$ stetig ist.
Für $\frac{1}{x}$ gilt $\frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Des weiteren ist $f_k(\frac{1}{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \frac{1}{x}\pi)$ und $f_k(0) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n 0\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \overset{geom.Reihe}{=} \frac{1}{1-b}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f_k(\frac{1}{x}) &= \lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\left(a^n \frac{1}{x}\pi\right) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to\infty} \left(b^n \cos\left(a^n \frac{1}{x}\pi\right)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to\infty} b^n \lim_{x\to\infty} \cos\left(a^n \frac{1}{x}\pi\right) \\
&\overset{(**)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\left(\lim_{x\to\infty} (a^n \frac{1}{x}\pi)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\left(a^n \lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x})\ \pi\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b^n 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b^n \\
&= \frac{1}{1-b} \\
\lim_{x\to\infty} f_k(\frac{1}{x}) &= f_k(0)
\end{aligned}
$$

Da $\lim_{x\to\infty} b^n = b^n$ und $\lim_{x\to\infty} \cos(a^n \frac{1}{x}\pi) = \cos(0) = 1$ gilt.

(∗) Den Limes in die Summe ziehen ist nur gestattet, wenn der Grenzwert ebenfalls stetig ist: Da gilt, wenn die Funktionenfolgen $f_k = \sum_{n=0}^{k} b^n \cos(a^n x\pi)$ für alle k stetig sind und ausserdem die Funktionenfolgen f_k gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f konvergieren, dann ist f ebenfalls stetig.
Das die f_k für alle k stetig sind ist klar. (Der cos ist eine stetige Funktion, der Rest ist konstant, damit ist dann auch die Summe stetig.) Jetzt muss nur noch gezeigt werden, dass f_k gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert. Eine Funktionfolge

[1] Die Klassifizierung einiger mathematischer Gegenstände von Volkert [?], welche einen als paradox bestimmten Charakter besitzen, bezeichnet dieser als Monster.

f_k ist gleichmäßig konvergent, wenn $\|f_k\|_{sup} = \|\sum_{n=0}^{k} b^n \cos(a^n x\pi)\|_{sup}$ konvergent ist (Weierstraß Kriterium). Also wissen wir, dass f_k gleichmäßig konvergent ist, da gilt: $\|\sum_{n=0}^{k} f_n\|_{sup} \overset{\triangle-Ungl.}{\leq} \sum_{n=0}^{k}\|f_n\|_{sup} = \sum_{n=0}^{k} sup\{|f_n|, x \in \mathbb{R}\} = \sum_{n=0}^{k} sup\{|b^n \cos(a^n x\pi)|, x \in \mathbb{R}\} = \sum_{n=0}^{k} b^n$ da $|\cos(a^n x\pi)|$ kleiner gleich eins und b positiv ist. Und da $\sum_{n=0}^{k} b^n$ gegen $\frac{1}{1-b}$ konvergiert, konvergiert $\|f_k\|_{sup}$ gleichmäßig.

(∗∗) Der Cosinus ist eine stetige Funktion, deswegen darf man den Limes auch in den Cosinus reinziehen.

4.2 Beweis der Nicht- Differenzierbarkeit des Weierstraßschen Monsters

Um zu zeigen, dass die Funktion $f(x) = f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi)$ mit $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$ ungerade, $0 < b < 1$ in einem Punkt nicht differenzierbar ist, genügt es zu zeigen, dass zwei verschiedene Folgen, die gegen diesen Punkt konvergieren, nicht denselben Differentialquotienten besitzen.
Sei $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ beliebig und x_0 ein bestimmter, aber beliebiger, Wert von $x \in \mathbb{R}$, für den der Differentialquotienten zu untersuchen ist.
Nun gibt es ein $\gamma_m \in \mathbb{Z}$, so dass gilt:

$$-\frac{1}{2} < a^m x_0 - \gamma_m \leq \frac{1}{2}$$

Wir definieren nun $a^m x_0 - \gamma_m := \Delta_{m+1}$, wobei $a \in \mathbb{Z}$ ungerade ist. Ausserdem setzen wir $x'_m = \frac{\alpha_m - 1}{a_m}$, $x''_m = \frac{\alpha_m + 1}{a^m}$. Dann gilt nun $x'_m < x_0 < x''_m$ und x'_m konvergiert gegen x_0 für $m \to \infty$, ebenso konvergiert x''_m gegen x_0 für $m \to \infty$. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} x'_m - x_0 &= -\frac{1 + \Delta_{m+1}}{a^m} \\ x''_m - x_0 &= \frac{1 - \Delta_{m+1}}{a^m} \end{aligned}$$

für die Berechnung des Differenzenquotienten für x'_m.

Also ist

$$\begin{aligned}
\frac{f(x'_m)-f(x_0)}{x'_m-x_0} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b^n\cos(a^n x'_m\pi)-\sum_{n=0}^{\infty} b^n\cos(a^n x_0\pi)}{x'_m-x_0}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(b^n\frac{\cos(a^n x'_m\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{x'_m-x_0}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{m-1}\left((ab)^n\frac{\cos(a^n x'_m\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{a^n(x'_m-x_0)}\right)\\
&+ \sum_{n=m}^{\infty}\left(b^{(n)}\frac{\cos(a^{(n)} x'_m\pi)-\cos(a^{(n)} x_0\pi)}{x'_m-x_0}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{m-1}\left((ab)^n\frac{\cos(a^n x'_m\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{a^n(x'_m-x_0)}\right)\\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\left(b^{(m+n)}\frac{\cos(a^{(m+n)} x'_m\pi)-\cos(a^{(m+n)} x_0\pi)}{x'_m-x_0}\right).
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(a^n x'_m\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{x'_m-x_0} &= -\frac{\pi\sin(a^n\frac{x'_m+x_0}{2}\pi)\cdot\sin(a^n\frac{x'_m-x_0}{2}\pi)}{a^n\frac{x'_m-x_0}{2}\pi}\\
&= -\pi\sin(a^n\frac{x'_m+x_0}{2}\pi)\cdot\frac{\sin(a^n\frac{x'_m-x_0}{2}\pi)}{a^n\frac{x'_m-x_0}{2}\pi},
\end{aligned}$$

nach den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen:

$$\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)=\sin\alpha\ \sin\beta \quad\Longleftrightarrow\quad \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\ \sin\beta,$$

wenn man für $\alpha = a^n\frac{x'_m+x_0}{2}\pi$ und für $\beta = a^n\frac{x'_m-x_0}{2}\pi$ einsetzt. Dann ist

$$\begin{aligned}
\cos\left(\left(a^n\frac{x'_m+x_0}{2}\pi\right)-\left(a^n\frac{x'_m-x_0}{2}\pi\right)\right) &= \cos(a^n x_0\ \pi)\\
\cos\left(\left(a^n\frac{x'_m+x_0}{2}\pi\right)+\left(a^n\frac{x'_m-x_0}{2}\pi\right)\right) &= \cos(a^n x'_m\pi).
\end{aligned}$$

Ebenso gilt allerdings auch:

$$-1 < \frac{\sin(a^n\frac{x'_m-x_0}{2}\pi)}{a^n\frac{x'_m-x_0}{2}\pi} < +1,$$

deswegen ist

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{m-1}\left((ab)^n\frac{\cos(a^n x_m'\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{a^n(x_m'-x_0)}\right)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{m-1}\left((ab)^n\left(-\pi\sin(a^n\frac{x_m'+x_0}{2}\pi)\cdot\frac{\sin(a^n\frac{x_m'-x_0}{2}\pi)}{a^n\frac{x_m'-x_0}{2}\pi}\right)\right)\right| \\
&\overset{-1<\sin<1}{<} \pi\sum_{n=0}^{m-1}(ab)^n \\
&= \pi\frac{(ab)^m-1}{ab-1} \\
&< \frac{\pi}{ab-1}(ab)^m
\end{aligned}$$

Damit haben wir den ersten Teil der Gleichung abgeschätzt.

Beginnen wir mit dem zweiten Teil der Gleichung. Es gilt, weil $a\in\mathbb{Z}$ eine ungerade Zahl ist, da $\cos(k\pi)=1$ für $k\in\mathbb{Z}$ gerade und weil $\cos(k\pi)=-1$ für $k\in\mathbb{Z}$ ungerade und indem $\gamma\in\mathbb{Z}$ ist:

$$\begin{aligned}
\cos(a^{m+n}x_m'\pi) &= \cos(a^{m+n}\left(\frac{\gamma_m-1}{a^m}\right)\pi) \\
&= \cos(a^n(\gamma_m-1)\pi) \\
&= -(-1)^{\gamma_m},
\end{aligned}$$

und nach dem Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen gilt:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Welches wir hier anwenden:

$$\begin{aligned}
\cos(a^{m+n}x_0\pi) &= cos\left(a^{m+n}\left(\frac{\Delta_{m+1}+\gamma_m}{a^m}\right)\pi\right) \\
&= \cos(a^n\gamma_m\pi+a^n\Delta_{m+1}\pi) \\
&= \cos(a^n\gamma_m\pi)\ \cos(a^n\Delta_{m+1}\pi)+\sin(a^n\gamma_m\pi)\ \sin(a^n\Delta_{m+1}\pi) \\
&= (-1)^{\gamma_m}\cos(a^n\Delta_{m+1}\pi),
\end{aligned}$$

da $sin(k\pi)=0$ für $k\in\mathbb{Z}$ und aus den oben genannten Gründen. Damit ist der 2. Teil unserer Gleichung:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}b^{(m+n)}\frac{\cos(a^{(m+n)}x_m'\pi)-\cos(a^{(m+n)}x_0\pi)}{x_m'-x_0} &= \sum_{n=0}^{\infty}b^{(m+n)}\left(\frac{-(-1)^{\gamma_m}-(-1)^{\gamma_m}\cos(a^n\Delta_{m+1}\pi}{-\frac{1+\Delta_{m+1}}{a^m}}\right) \\
&= (-1)^{\gamma_m}(ab)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\cos(a^n\Delta_{m+1}\pi)}{1+\Delta_{m+1}}\ b^n.
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt auch:

$$\frac{1+\cos(a^n \Delta_{m+1}\pi)}{1+\Delta_{m+1}}\ b^n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und ferner gilt

$$\begin{aligned}\frac{1+\cos(a^0 \Delta_{m+1}\pi)}{1+\Delta_{m+1}}\ b^0 &= \frac{1+\cos(\Delta_{m+1}\pi)}{1+\Delta_{m+1}} \\ &\geq \frac{2}{3},\end{aligned}$$

da cos $(\Delta_{m+1}\ \pi) \geq 0$, aber $\frac{1}{2} < 1 + \Delta_{m+1} < \frac{3}{2}$.

Also gilt nun für die gesamte Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{f(x'_m) - f(x_0)}{x'_m - x_0} &= (-1)^{\gamma_m}(ab)^m \eta\ \left(\frac{2}{3} + \epsilon\ \frac{\pi}{ab-1}\right) \\ &= \left((-1)^{\gamma_m}(ab)^m \eta\ \frac{2}{3} + (-1)^{\gamma_m}(ab)^m \eta\ \epsilon\ \frac{\pi}{ab-1}\right),\end{aligned}$$

wobei $\eta > 1$ und $-1 < \epsilon < 1$ ist.

Ebenso ergibt sich dies auch für x''_m:

$$\begin{aligned}\frac{f(x''_m) - f(x_0)}{x''_m - x_0} &= -(-1)^{\gamma_m}(ab)^m \eta_1\ (\frac{2}{3} + \epsilon_1\ \frac{\pi}{ab-1}) \\ &= \left(-(-1)^{\gamma_m}(ab)^m \eta_1\ \frac{2}{3} - (-1)^{\gamma_m}(ab)^m \eta_1\ \epsilon_1\ \frac{\pi}{ab-1}\right),\end{aligned}$$

wobei $\eta_1 > 1$ und $-1 < \epsilon < 1$ ist.

Nimmt man nun a, b so an, dass $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, also

$$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1},$$

ist, so haben

$$\frac{f(x'_m) - f(x_0)}{x'_m - x_0}, \quad \frac{f(x''_) - f(x_0)}{x''_m - x_0}$$

stets entgegengesetzte Vorzeichen, werden aber beide, wenn m ohne Ende wächst unendlich groß. Daraus ergibt sich, dass $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ weder einen bestimmten endlichen, noch auch einen bestimmten unendlich großen Differentialquotienten besitzt. Und da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt war ist die Funktion nirgends differenzierbar.