Hilberts Hotel

$$\infty$$

Philipps-Universität Marburg
Fachbereich 12: Mathematik und Informatik
WS 2009 / 2010
(Pro)seminar über klassische Probleme der Mathematik
Leitung: Prof. Harald Upmeier, Benjamin Schwarz

Vorgetragen von: Daniel Rausch

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

Der Begriff der Unendlichkeit ist umringt von vielen verschiedenen Fragen. Egal ob fachlicher oder philosophischer Herkunft ist die Diskussion sehr spannend. Doch woher kommt die Unendlichkeit? Wie kann man sie sich vorstellen? Warum treibt sie manche Menschen in den Wahnsinn? Wieso können wir so einfach mit ihr „rechnen / umgehen“?
Dies sind nur einige wenige Fragen die man sich zu der Thematik stellen kann. Das vorliegende Skript wird versuchen zumindest den mathematischen Hintergrund zu beleuchten den einst Georg Cantor zu dieser Thematik herausgearbeitet hat.

Nebenbemerkung: Das Zeichen welches die Titelseite „schmückt“ wurde erstmals von dem Mathematiker John Wallis für die Symbolik der Unendlichkeit verwendet. Heute ist es vollständig in der Mathematik verankert.

1. Aktual und Potentiell Unendlich

Aristoteles unterschied zwei Arten von Unendlichkeit: das Aktual – Unendliche und das Potentiell – Unendliche.

1.1 Aktual – Unendliches

Das Aktual – Unendliche ist diejenige Unendlichkeit, die zu einem bestimmten Zeitpunkt vollständig und abgeschlossen existiert. Es kann nicht schrittweise entwickelt werden, sondern muss als bereits vorhanden gedachtes Ganzes aufgefasst werden. Es beinhaltet einen Prozess, dem bereits zu jedem beliebigen Zeitpunkt schon unendlich viele Wiederholungen vorangegangen sind.
Man könnte sich hier die Menge der ganzen Zahlen vorstellen ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, … da zu jedem beliebigen Zeitpunkt des Zählvorganges bereits unendlich viele ganze Zahlen existieren.

1.2 Potentiell – Unendliches

Das Potentiell – Unendliche beinhaltet einen Prozess, der zwar beliebig weitergeführt und wiederholt werden kann, der jedoch zu jedem Zeitpunkt nur aus einer endlichen Anzahl von Schritten besteht. Zahlen, die potentiell unendlich sind, können schrittweise weiterentwickelt werden.

Die Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, … ist demnach potentiell unendlich, da jede Zahl einen Nachfolger hat, aber auch zu jedem beliebigen Zeitpunkt des Zählvorganges, gleichgültig, wie weit fortgeschritten er ist, nur eine endliche Anzahl von Elementen abgezählt wurde.

Die Mathematiker erkannten den zweiten Typus des Unendlichen, das Potentiell - Unendliche, an, lehnten jedoch das Aktual – Unendliche ab.

Laut Aristoteles beziehen sich alle Einwände gegen das Unendliche auf das Aktual – Unendliche, wohingegen das Potentiell – Unendliche die Wirklichkeit widerspiegele, das bei jedem niemals endenden Vorgang anerkannt werden müsse – wie zum Beispiel beim Zählen oder beim Vergehen der Zeit.

2. Biographie von Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

- Geboren am 3. März 1845 in Sankt Petersburg
- Vater Georg Woldemar Cantor – Börsenmakler
- Muter Marie Cantor Musikerin
- Konfession: lutherischen Glaubens
- Mit 11 Jahren siedelte die Familie nach Wiesbaden und dann später nach Frankfurt am Main um.
- 1860 Schulabschluss. (Mit Auszeichnung)
- 1860 Studium in Darmstadt
- 1867 Promotion in Berlin
- Lehrer von Cantor: Karl Weierstraß ; Ernst Eduard Kummer und Leopold Kronecker.
- Ab 1869 Lehre und Arbeit in Halle
  - Privatdozent
  - 1872 Extraordinarius
  - 1877 – 1913 ordentlicher Professor
- 1874 Heirat mit Vally Guttmann, aus der Ehe entstanden 6 Kindern (ernähren konnte er dies nur wegen der Erbschaft seines Vaters)
- Flitterwochen hat er im Harz verbracht, dort traf er Richard Dedekind (Freundschaft entsteht)
- 1884 wiederholte nervliche Erkrankungen (manische Depression) In dieser Zeit wandte er seine ganze Aufmerksamkeit der Suche nach dem „wahren" Autor von shakespeareschen Werken auf. (Vermutungen sagen wegen seinem Geisteszustand). Ebenfall hatte er großes Interesse an Philosophie und der katholischen Theologie, die für ihn eng mit der Frage nach der Unendlichkeit zusammenhängen.
- 1899 Cantors jüngster Sohn verstirbt. Diese Tragödie mindert seine Leidenschaft der Mathematik gegenüber enorm.
- 1904 Auf dem Internationalen Mathekongress veröffentlicht Julius König einen Widerspruch zu Cantors „transfiniten Zahlen". (Zermelo widerlegt den Beweis einen Tag später). Cantor erschüttert und beginnt an seinem Glauben zu zweifeln.
- 1912 Verleihung des Ehrendoktor von der Universität St. Andrews Schottland, Cantor kann wegen seiner Krankheit nicht erscheinen.
- 6. Januar 1918 Cantor verstirbt in einem Sanatorium in Halle.

3. Cantors neue Sichtweise

Cantor schaffte die formulierten Vorstellungen von Aristoteles ab. Er akzeptierte das Aktual – Unendliche als vollwertige mathematische Größe. Er bestand darauf, dass jede Menge, auch eine unendliche, als ein Ganzes oder eine Gesamtheit anzusehen sei. Somit konnte es keine Unterscheidung zwischen aktual und potentiell Unendlich geben.
Diese Unterscheidung zwischen den beiden Typen des Unendlichen erscheint bei Neuanordnung der ganzen Zahlen sowieso irrelevant. Anstatt die bereits erwähnte Reihe ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, … niederzuschreiben, ordnete Cantor die Zahlen in folgender Anordnung : 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, …, da laut Definition die Reihenfolge der Elemente innerhalb der Anordnung unerheblich ist. So ist die Menge der Obstsorten {Ampel, Auto, Benzin}identisch der Menge {Auto, Benzin, Ampel}.

Weiterhin zeigte Cantor, dass es nicht nur eine Art des Unendlichen, sondern viele verschiedene Klassen gibt. Diese Klassen unterscheiden sich voneinander, können jedoch trotzdem miteinander verglichen werden. Es gibt also damit eine Art Hierarchie von verschiedenen Klassen des Unendlichen, weshalb man durchaus sagen kann, dass eine unendliche Menge größer ist als eine andere.
Cantor gründete seine Theorie auf zwei Begriffe: den der Menge und den der umkehrbar eindeutigen Entsprechung.
Eine Menge ist hierbei einfach eine Ansammlung von Objekten, zum Beispiel einem Murmelsäckchen mit blauen und einem Murmelsäckchen mit roten Murmeln.
Zwischen den Elementen (hier den Murmeln) können wir eine umkehrbar eindeutige oder eineindeutige Zuordnung herstellen (1:1 Zuordnung / Bijektion), indem wir einfach jeweils einer blauen Murmel eine rote Murmel zuordnen. In welcher Reihenfolge diese Murmeln einander zugeordnet werden, ist hierbei gleichgültig, solange jeweils genau ein Element (also eine blaue Murmel) der einen Menge genau einem anderen Element (also einer roten Murmel) der anderen Menge zugeordnet werden kann und keine Elemente (Murmeln) übrig bleiben. Dies ist nur deshalb möglich, da die zwei Mengen (Murmelsäckchen) die gleiche Anzahl von Elementen (Murmeln) haben.
Diese Schlussfolgerung gilt jedoch nur für endliche Mengen.
Man kann also sagen, dass wenn zwei endliche Mengen die gleiche Anzahl von Elementen beinhalten, die Möglichkeit besteht, sie umkehrbar eindeutig aufeinander abzubilden. Im

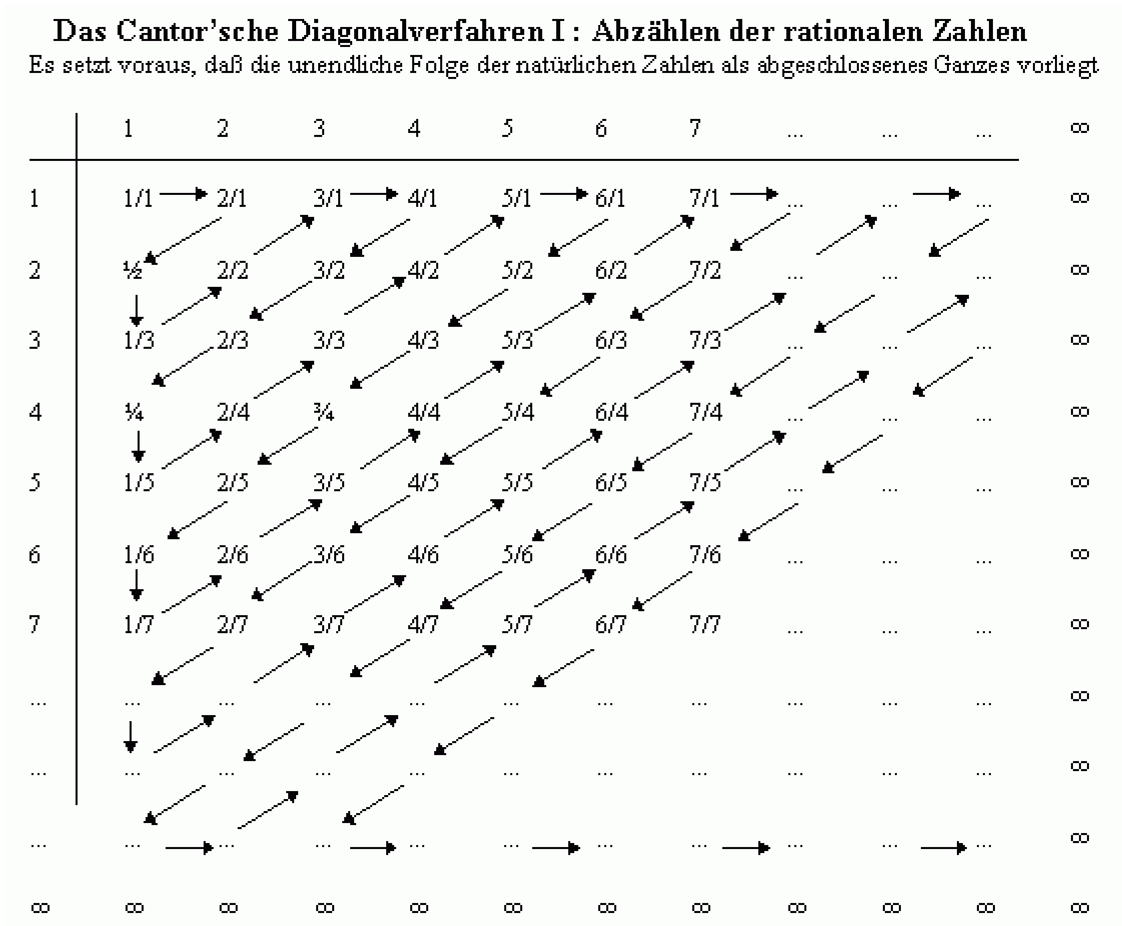
Umkehrschluss gilt daher: Wenn zwischen zwei endlichen Mengen eine 1:1 Beziehung hergestellt werden kann, ist es sicher, dass sie die gleiche Anzahl von Elementen besitzen.

Bei unendlichen Mengen sieht das jedoch etwas anders aus. Cantor zeigte nämlich, dass es möglich ist die Menge der geraden Zahlen (2, 4, 6, 8, …) umkehrbar eindeutig auf die Menge der natürlichen Zahlen (1, 2, 3, 4, …) abzubilden, obwohl es doch eigentlich doppelt so viele natürliche Zahlen wie gerade Zahlen geben müsste.
Im Schema sieht diese Zuordnung wie folgt aus:

2	4	6	8	10	12	14	16	…
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1	2	3	4	5	6	7	8	…

Das heißt also, dass zwischen den Elementen einer unendlichen Menge und den Elementen einer ihrer Teilmengen eine umkehrbar eindeutige Zuordnung möglich ist.

Cantor erklärte deshalb, dass zwei Mengen – gleichgültig ob endlich oder unendlich – genau dann gleich groß sind, wenn sie einander umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können.
Cantor nannte jede Menge, die zur Menge der natürlichen Zahlen äquivalent ist, *abzählbar*.
Zu diesen abzählbaren Mengen gehören folglich die geraden Zahlen, die ungeraden Zahlen, die ganzen Zahlen, sowie die Quadratzahlen und die Primzahlen.
Aber auch die unendliche Menge der (positiven) rationalen Zahlen - also der Zahlen, die Quotient zweier natürlicher Zahlen sind – sind abzählbar, wie folgendes Schema, das unter dem Begriff „Cantors Diagonalverfahren I“ berühmt geworden ist, zeigt.



Die unendlichen Mengen verstoßen also gegen ein „Grundgesetz“ unserer endlichen Welt, das da lautet: Das Ganze ist größer als sein Teil, d. h. die Menge einer Gesamtheit ist größer als eine ihrer Teilmengen.
Über seine Entdeckung, dass die rationalen Zahlen abzählbar sind, schrieb Cantor 1877 in einem Brief an einen Freund mit den Worten: „Ich sehe es, aber ich glaube es nicht!“

Die „Anzahl der Elemente“ wird in der Mathematik auch oftmals Mächtigkeit oder Kardinalzahl genannt. Kardinalzahlen geben die Größe von Mengen wieder, wenn man diese - ohne Beachtung einer eventuellen Anordnung ihrer Elemente - misst.
Die Menge der rationalen Zahlen ist hier also gleich mächtig der Menge der natürlichen Zahlen.
An diesem Punkt der Erkenntnis angelangt, beschloss Cantor den abzählbaren Mengen einen Namen zu geben und führte das Zeichen $\aleph_0$ ($\aleph$, gesprochen „aleph“ ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets) wobei die Null im Index die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen kennzeichnet.

Nun kann daraus der Verdacht entstehen, dass vielleicht alle unendlichen Mengen abzählbar sind. Dem ist jedoch nicht so, wie Cantor mit seinem „zweiten Diagonalverfahren“ beweisen konnte.

4 Die Kontinuumshypothese

4.1 Die Mächtigkeit der reellen Zahlen

Cantor zeigte mit einem Widerspruchsbeweis, dass die reellen Zahlen nicht abzählbar unendlich sind. Für unseren Beweis gilt also die Annahme: Die reellen Zahlen sind abzählbar unendlich.

Nun betrachten wir nach Cantor die reellen Zahlen zwischen 0 und 1, d. h. die Zahlen der Form

$0,a_1a_2a_3a_4...$ und schreiben sie in beliebiger Reihenfolge auf:

$0,a_1a_2a_3a_4...$	z. B. 0, **1**2533497563...
$0,b_1b_2b_3b_4...$	0, 2**3**549584372...
$0,c_1c_2c_3c_4...$	0, 45**8**37939048...
$0,d_1d_2d_3d_4...$	0, 111**4**9384037...
……………	………………….

Entsprechend unserer Annahme, dass auch die reellen Zahlen abzählbar unendlich sind, müssten damit alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 erfasst sein.

Gemäß Cantors Idee konstruieren wir nun eine neue Zahl, die in unserer Aufzählung nicht enthalten ist: $0,\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4...$, wobei jeweils gelten muss $\lambda_1 \neq a_1$, $\lambda_2 \neq b_2$, $\lambda_3 \neq c_3$, $\lambda_4 \neq d_4$, ...
Konkret auf unser Beispiel angewandt bedeutet dies: $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq 3$, $\lambda_3 \neq 8$, $\lambda_4 \neq 4$, ...
Die neue Zahl könnte also wie folgt lauten: 0, 2573..., oder 0, 4667..., oder 0, 4693... .

Diese neue Zahl kann mit keiner oben aufgeführten Zahl übereinstimmen, da sie nicht mit der x – ten Zahl an der x –ten Kommastelle übereinstimmen kann. So betrachten wir zum Beispiel die Zahl 0, 2573..., die weder mit der ersten Kommastelle der ersten Zahl (hier die 1), noch mit der zweiten Kommastelle der zweiten Zahl (hier die 3), noch mit der dritten Kommastelle der dritten Zahl (hier die 8), ..., übereinstimmt.
Das heißt: Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar, was zu beweisen war.

Folglich ist ihre Unendlichkeit laut Definition von einer größeren Mächtigkeit, als die Mächtigkeit $\aleph_0$ der abzählbaren natürlichen Zahlen.
Cantor bezeichnete diese Art der Unendlichkeit, die Mächtigkeit der reellen Zahlen, mit $\aleph_1$.

4.2 Die Mächtigkeit der Potenzmenge P (M)

Unter der Potenzmenge P (M) einer Menge M versteht man die Menge aller Teilmengen der ursprünglichen Menge. Zum Beispiel lassen sich aus der Menge (1, 2, 3) die acht Teilmengen (1), (2), (3), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3) und die leere Menge ( ) bilden.

Allgemein gilt: Wenn M n Elemente enthält, enthält die Potenzmenge P (M) 2^n Elemente.
Die Begründung hierfür liegt in der Tatsache, dass es für jedes Element n der Menge M zwei Möglichkeiten gibt: Entweder ist es in einer Teilmenge enthalten oder aber nicht. Das heißt, es gibt also 2 * 2 * 2 * … * 2 = 2^n Möglichkeiten, unterschiedliche Teilmengen zu bilden.
In unserem Beispiel enthält die Menge (1, 2, 3) drei Elemente, nämlich die Zahlen 1, 2 und 3. Die Potenzmenge P (M) enthält also $2^3 = 8$ Elemente.

Entsprechend dem oberen Beweis kann man zeigen, dass die Menge aller Teilmengen einer abzählbaren unendlichen Menge nicht abzählbar ist.
Analog zu der Mächtigkeit der Potenzmenge P (M) = 2^n endlicher Zahlen definierte Cantor die Mächtigkeit der Potenzmenge der natürlichen Zahlen P (N) als $2^{\aleph_0}$.
Die Kontinuumshypothese von Cantor besagt nun, dass die Mächtigkeiten der Potenzmenge der natürlichen Zahlen und die Mächtigkeit der reellen Zahlen gleich sind, d. h. dass gilt: $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Diese Behauptung kann allerdings mit den heutigen Mittel der Mengenlehre weder bewiesen noch widerlegt werden, d. h. beide Annahmen passen widerspruchsfrei zu den Axiomen der Mengenlehre.

5. Hilberts Hotel

Der deutsche Mathematiker David Hilbert entwickelte 1926 mit der Paradoxie vom „Hotel Unendlichkeit“, auch bekannt unter der englischen Bezeichnung „Hotel Infinity“, ein anschauliches Modell zur Einführung in den Begriff der Unendlichkeit. Anhand der Vorstellung eines Hotels mit unendlicher Bettenkapazität im Vergleich mit der beschränkten Bettenkapazität eines Hotels in unserer Wirklichkeit wird deutlich, dass im unendlichen Raum andere Rechenregeln als im endlichen Raum angewandt werden müssen und dass oftmals Vorstellungen, die jeder Person aus ihrem realen, persönlichen Erfahrungsbereich vertraut sind, im Unendlichen nicht mehr gültig sind.

5.1. Ein Gast fragt nach einem Zimmer

Stellen wir uns nun das größte Hotel überhaupt vor, das Hotel Unendlichkeit, in dem es eine unendliche Anzahl Zimmer gibt, die allesamt belegt sind. Nehmen wir an, ein Gast der an der Rezeption nach einem Zimmer fragt, wird vom Portier die freundliche Antwort erhalten: »Tut mir leid, wir sind eigentlich voll besetzt, aber wir können Ihnen ohne weiteres ein Zimmer geben.

Doch was wird der Portier unternehmen können, um den neuen Gast unterzubringen?

In das letzte Zimmer kann der Portier den neu angekommenen Gast nicht ziehen lassen, da es im Hotel Unendlichkeit kein letztes Zimmer gibt. Weiterhin sind alle Zimmer – wir erinnern uns an die Aussage des Portiers – belegt. Um dennoch ein Zimmer für den einzelnen Gast zur Verfügung stellen zu können, sagt Hilbert dem Portier er soll einen Umzug aller Gäste in deren jeweilige Nebenzimmer veranlassen. Der Portier verlegt also den Gast von Zimmer 0 in Zimmer 1, denjenigen von Zimmer 1 in Zimmer 2, den von Zimmer 2 in Zimmer 3 und so weiter. Folglich kann der neue Gast in das gerade frei gewordene Zimmer 0 einziehen.

Im Schema sieht die Operation folgendermaßen aus:

Gast aus Zimmer 0 → Zimmer 1
Gast aus Zimmer 1 → Zimmer 2
Gast aus Zimmer 2 → Zimmer 3

… → …

neuer Gast → Zimmer 0

Allgemein lässt sich sagen, dass für jeden der Gäste ein Umzug von Zimmer n in das Zimmer n+1 ansteht.
Die Formel für die Zimmernummerzuteilung lautet also: $n \rightarrow n+1$ n: Zimmernummer

5.2. Ankunft eines Busses mit unendlich vielen Passagieren

Bei Annahme, dass der Portier nun einen Bus mit unendlich vielen Passagieren in seinem – bereits voll belegten - Hotel unterbringen möchte, muss er, bevor er den neuen Gästen ihre Zimmer zuweisen kann, zunächst einmal eine unendliche Anzahl an Zimmern frei machen.

Hierbei kann er sich zum Beispiel für die Möglichkeit entscheiden, alle Zimmer mit geraden Zimmernummern zu räumen.
Durch die Formel 2n+1, wobei n wiederum eine Variable für jede beliebige natürliche Zimmernummer darstellt, veranlasst er einen Umzug der Gäste aus allen Zimmern.
Der Gast aus Zimmer Nummer 1 bekommt nach kleinerer Kopfrechnung das Zimmer 3 zugewiesen, derjenige aus Zimmer Nummer 2 das Zimmer Nummer 5, weitere ziehen von Zimmer 3 in das Zimmer 7 um oder verlassen das Zimmer 4, um es sich im Zimmer 9 bequem zu machen. Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass Gäste, die bereits in ungeradzahligen Zimmern einquartiert gewesen sind, wiederum in derartige ziehen, wohingegen Gäste, die bisher Bewohner geradzahliger Zimmer gewesen sind, nun in ungeradzahlige Zimmer umziehen müssen.
Die neu angekommenen Gäste können nun in die Zimmer 2, 4, 6,… ziehen!
Allgemein weist der Portier mit der Formel: $n = 2i+2$ jedem Gast entsprechend seiner Sitzplatznummer i im Bus seine spezielle („gerade“) Zimmernummer n im Hotel zu.

5.3. Ankunft zweier Busse mit jeweils unendlich vielen Passagieren

Bei der Annahme, dass der Portier nun vor der Aufgabe steht, zwei Busse mit jeweils unendlich vielen Passagieren in seinem – immer noch voll belegten – Hotel unterzubringen, muss er wiederum erst einmal für die Neuankömmlinge Platz schaffen.
Durch Anwendung der bereits vorgestellten Methode lässt er jedes zweite Zimmer, in diesem Fall erneut alle geradzahligen Zimmer, räumen.
Weiterhin muss es ihm gelingen, allen Fahrgästen der Busse 1 und 2 parallel zur gleichen Zeit ihre Zimmer zuzuweisen, da er nicht zuerst den ersten Bus und danach den zweiten Bus abfertigen kann, da die Abfertigung des ersten Busses aufgrund seiner unendlich vielen Passagiere kein zeitliches Ende findet.
Der Portier entschließt sich deshalb, die Neuankömmlinge jeweils abwechselnd in den geradzahligen Zimmern unterzubringen, bzw. die Passagiere des ersten Busses nur in jedem zweiten der geraden Zimmer unterzubringen oder anders formuliert, ihnen genau die Hälfte aller geraden Zimmer zuzuweisen. Analog dazu verfährt er mit den Passagieren des zweiten Busses.

In der Übersicht sieht die Zimmernummerzuteilung wie folgt aus:

	1. Bus	2. Bus
0. Person	Zimmer 2	Zimmer 4
1. Person	Zimmer 6	Zimmer 8
2. Person	Zimmer 10	Zimmer 12
….	……	……
i. Person	Zimmer 4i+2	Zimmer 4i+4

5.4 Ankunft unendlich vieler Busse mit jeweils unendlich vielen Passagieren

Stellen wir uns jetzt noch vor, dass sich am selben Tag zu späterer Stunde das Unmögliche wiederholt. Diesmal ergießt sich ein endloser Strom von Gästen in die Hotelhalle, so dass der Portier mit einer unendlichen Anzahl neuer Gäste konfrontiert ist, die allesamt Zimmer wünschen. Da er ein cleverer Geschäftsmann ist, weiß er natürlich, dass er sich eine goldene Nase verdienen kann, wenn es ihm gelingt, alle Neuankömmlinge unterzubringen. Wie kann er nun dieses Problem lösen?

Zunächst einmal muss der Portier wiederum eine unendliche Anzahl an Zimmern räumen lassen.
Er bittet den Gast deshalb erneut darum, vom Zimmer i ins Zimmer mit der Nummer 2i+1 umzuziehen, wodurch wieder alle Zimmer mit gerader Nummer frei werden.
Dann wendet er die folgende neue Verteilerformel $2^{i+1}\cdot(2j+1)$ an, die jedem der abzählbar unendlich vielen Passagiere (mit der Sitzplatznummer i) aus den abzählbar unendlich vielen Bussen (mit der Busnummer j) eine Zimmernummer zuweist.
Die Beispiele sollen zur Veranschaulichung des oben angeführten Terms dienen.

Für Passagiere des Busses mit der Nummer 0 gilt Folgendes:

Formel: $2^{i+1}\cdot(2j+1)$

0. Bus: 2^{i+1}

	Sitzplatznummer	Zimmer
j=0	i=0	2
	i=1	4
	i=2	8

Für Passagiere des Busses mit der Nummer 1 dagegen gilt Folgendes:

Formel: $2^{i+1}\cdot(2j+1)$

1. Bus: $2^{i+1}\cdot 3$

	Sitzplatznummer	Zimmer
j=1	i=0	6
	i=1	12

	i=2	24

Passagieren des Busses Nummer 2 werden die hier berechneten Zimmernummern zugewiesen:

Formel: $2^{i+1} \cdot (2j+1)$

2. Bus: $2^{i+1} \cdot 5$

	Sitzplatznummer	Zimmer
j=2	i=0	10
	i=1	20
	i=2	40

Betrachten wir die Rechnungen in der Übersicht, ergeben sich folgende Zimmernummerzuteilungen:

Formel: $2^{i+1} \cdot (2j+1)$

Sitz	0. Bus	1. Bus	2. Bus	3. Bus	4. Bus	j-ter Bus
0	2	6	10	14	18	…
1	4	12	20	28	36	…
2	8	24	40	56	72	…

i = Sitzplatznummer

j = Busnummer

Zusammenfassend lässt sich schlussfolgern, dass die Zimmernummern n im Hotel sich durch die komplizierte Verrechnung der Busnummern j mit den Sitzplatznummern i errechnen lassen.

6. Die 23 Hilbert Probleme

Auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress im Jahre 1900 in Paris formulierte David Hilbert dreiundzwanzig Probleme, auf die als Schlüsselprobleme des weiteren mathematischen Fortschritts die Kräfte zu konzentrieren seien. Es zeigte sich dann im Verlauf des 20. Jahrhunderts tatsächlich, dass Hilbert fast durchgängig Kernprobleme der Mathematik genannt hatte, deren Erforschung und Lösung einen großen Teil der Erfolge der Mathematik in diesem Jahrhundert ausmachten.

1. Cantors Problem von der Mächtigkeit des Kontinuums.
2. Die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome Hilbert fährt fort: Aus dem Gebiete der Grundlagen der Geometrie möchte ich zunächst das folgende Problem nennen.
3. Die Volumengleichheit zweier Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe.
4. Problem von der Geraden als kürzester Verbindung zweier Punkte.
5. Lies Begriff der kontinuierlichen Transformationsgruppe ohne die Annahme der Differenzierbarkeit der die Gruppe definierenden Funktionen.
6. Mathematische Behandlung der Axiome der Physik.
7. Irrationalität und Transzendenz bestimmter Zahlen.
8. Primzahlenprobleme.

Hilbert weiter: Ich nenne noch drei speziellere Probleme aus der Zahlentheorie, nämlich eines über die Reziprozitätsgesetze, eines über diophantische Gleichungen und ein drittes aus dem Gebiet der quadratischen Formen.

9. Beweis des allgemeinsten Reziprozitätsgesetzes im beliebigen Zahlkörper.
10. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung.
11. Quadratische Formen mit beliebigen algebraischen Zahlenkoeffizienten.

Hilbert weiter: Den Übergang zur Algebra und Funktionentheorie möge das folgende wichtige Problem bilden.

12. Ausdehnung des Kroneckerschen Satzes über abelsche Körper auf einen beliebigen algebraischen Rationalitätsbereich.

Hilbert weiter: Wir kommen nun zur Algebra; ich nenne im folgenden ein Problem aus der Gleichungstheorie und eines, auf welches mich die Theorie der algebraischen Invarianten geführt hat.

13. Unmöglichkeit der Lösung der allgemeinen Gleichung 7. Grades mittels Funktionen von nur 2 Argumenten.
14. Nachweis der Endlichkeit gewisser voller Funktionensysteme.

Hilbert weiter: Aus den Grenzgebieten zwischen Algebra und Geometrie möchte ich zwei Probleme nennen: das eine betrifft den geometrischen Abzählungskalkül und das zweite die Topologie algebraischer Kurven und Flächen.

15. Strenge Begründung von Schuberts Abzählungskalkül.
16. Problem der Topologie algebraischer Kurven und Flächen.
17. Darstellung definiter Formen durch Quadrate.

Hilbert weiter: Ich nenne noch eine geometrische Aufgabe.

18. Aufbau des Raumes aus kongruenten Polyedern.
19. Sind die Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytisch?
20. Allgemeine Randwertprobleme.
21. Beweis der Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe.
22. Uniformisierung analytischer Beziehungen mittels automorpher Funktionen.
23. Weiterführung der Methoden der Variationsrechnung.

7. Quellen

23 Hilbertprobleme : „http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/hilbertprobleme.html“

Biographie : „http://www.cantor-gymnasium.de/“

„Die Entdeckung des Unendlichen: Georg Cantor und die Welt der Mathematik von David Foster Wallace“

Bild zu Diagonalverfahren :

„http://www.mathematik.de/ger/information/landkarte/stichpunkte/abzaehlbar.html“

Hilberts Hotel : „Das Hotel Unendlichkeit von Nicholas Falletta aus Paradoxon“

„Die Entdeckung des Unendlichen: Georg Cantor und die Welt der Mathematik von David Foster Wallace“