Konvergenzraten von Raum-Zeit-Approximationen stochastischer Evolutionsgleichungen

Diplomarbeit

am

Fachbereich Mathematik und Informatik

der

Philipps-Universität Marburg

vorgelegt von

Petru A. Cioica

am 2.12.2009

Betreuer

Prof. Dr. Stephan Dahlke

Prof. Dr. René L. Schilling

părinţilor mei

Inhaltsverzeichnis

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Diplomarbeit und meines Studiums der Wirtschaftsmathematik beigetragen haben. Zunächst gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. S. Dahlke für die sehr angenehme Betreuung meiner Diplomarbeit und für die Möglichkeit an dem Workshop „SPDE09“ in Darmstadt teilzunehmen. Herrn Prof. Dr. R. L. Schilling möchte ich insbesondere dafür danken, dass er mich durch seine an der Philipps-Universität Marburg gehaltenen Vorlesungen für das Fach Stochastik begeistert hat. Den beiden Professoren und der Arbeitsgruppe Numerik und Optimierung möchte ich auch für die Unterstützung bei der Bewerbung um ein Promotionsstipendium danken. Bei Herrn Dipl.-Math. Felix Lindner möchte ich mich herzlich für die sehr hilfreichen Impulse und Korrekturen bedanken.
An der Finanzierung meines Studiums waren zahlreiche Personen und Einrichtungen beteiligt. In diesem Zusammenhang möchte ich mich beim Kölner Gymnasial- und Stiftungsfonds, bei der Richard-Winter-Stiftung, bei der Dr. Wolff'schen Stiftung sowie bei der Fürstin-Franziska-Christine-Stiftung bedanken. Mein besonderer Dank gilt Fam. Licht, die mich nicht nur finanziell stets bei meinen Vorhaben unterstützt hat.
Meiner Freundin Christine danke ich für die schöne Zeit in Marburg und freue mich auf unsere gemeinsame Zukunft!

Einleitung

Das Feld der stochastischen partiellen Differentialgleichungen ist ein relativ neues Gebiet der Mathematik, welches in jüngster Zeit nicht nur in der Theorie an Bedeutung gewinnt. Auch ihre praktischer Relevanz steigt. So werden stochastische partielle Differentialgleichungen bei der Modellierung von Zinsstrukturkurven, von Epidemieausbreitungen oder aber in der Populationsgenetik benutzt (vgl. z.B. [4] und [18]). Dabei wird unter diesem Begriff in einem Großteil der Literatur eine Integralgleichung vom sog. Itô-Typ in unendlich-dimensionalen Hilberträumen verstanden. Diese hat die allgemeine Form:

$$(\bullet) \qquad u(t) = u_0 + \int_0^t A(s, u(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t B(s, u(s))\,\mathrm{d}W(s) \qquad (t \in [0, T])\,.$$

Ein erstes Ziel dieser Arbeit liegt darin die einzelnen Komponenten einer solchen Gleichung detailliert zu erklären. Dass es sich dabei um kein triviales Problem handelt, sollen folgende Überlegungen zeigen. Betrachten wir eine Operatorgleichung der Form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t) &= Au(t) \qquad (t \in [0, T])\,, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

wobei $A\colon V \to V^*$ ein linearer und beschränkter Operator auf einem (reflexiven) Banachraum V ist und Werte in dessen Dualraum V^* annimmt. Setzen wir z.B. anstelle von A den (auf dem Sobolevraum $W_2^1(\mathbb{R}^d)$ eindeutig fortgesetzten) Laplace-Operator

$$\Delta := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

ein, so ergibt sich das Paradebeispiel parabolischer (deterministischer) Differentialgleichungen, die sog. Wärmeleitungsgleichung (vgl. [16, S. 62 ff.]). Gehen wir nun davon aus, dass die durch die Lösung dieser Gleichung beschriebene Entwicklung stochastischen Störfaktoren unterliegt. Dies würden wir gerne in unserem Modell berücksichtigen. Wir führen dafür einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein und wollen für $\omega \in \Omega$ die folgende Gleichung betrachten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, \omega) &= Au(t, \omega) + \frac{\partial}{\partial t} W(t, \omega) \qquad (t \in [0, T])\,, \\ u(0, \omega) &= u_0(\omega), \end{aligned}$$

wobei $(W(t))_{t \in [0,T]}$ eine Brown'sche Bewegung bezeichnet. Wie sollen wir aber den neu hinzugenommenen Summanden „$\frac{\partial}{\partial t} W$“ verstehen? Denn, wenn wir die obige Gleichung „ω für ω“ betrachten wollen, wissen wir, dass das hier auftretende Differential überhaupt nicht existiert, und zwar für $\mathbb{P}$-f.s. alle $\omega \in \Omega$ nicht. Versuchen wir es durch einen Übergang auf die entsprechende Integralgleichung:

$$u(t,\omega) = u_0(\omega) + \int_0^t Au(s,\omega)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{d}W(s,\omega) \qquad (t \in [0,T])\,.$$

Beim ersten Integral soll es sich um ein Bochner-Integral handeln, eine Verallgemeinerung des Lebesgue'schen Integralbegriffs für Abbildungen mit Werten in beliebigen (separablen) Banachräumen. Es wäre naheliegend den letzten Summanden für jedes feste $\omega \in \Omega$ als Lebesgue-Stieltjes-Integral zu verstehen – bzgl. des „Maßes" $\mathrm{d}W(.,\omega)$. Dies ist allerdings nicht möglich, denn für $\mathbb{P}$-f.s. jedes $\omega \in \Omega$ weist der Pfad $t \mapsto W(t,\omega)$ unserer Brown'schen Bewegung unendliche Variation auf, so dass eine Konstruktion des Integrals im Sinne von Lebesgue nicht möglich ist. Es war Itô Kiyosi, der einen neuen, stochastischen Integralbegriff vorschlug und damit dem Term

$$\int_0^{\cdot} \Phi(s)\,\mathrm{d}W(s)$$

eine neue Bedeutung gab. Eingeschränkt auf den Fall, dass der Integrator W ein sog. Q-Wiener Prozess ist, können wir dessen Konstruktion in fünf Schritten nachvollziehen (siehe [16, Chapter 2.3]).

Schritt 1: Wir beginnen damit, dass wir das stochastische Integral als lineare Abbildung auf einer Menge $\mathscr{E}_T$ elementarer Prozesse (einer Klasse einfach gestrickter Prozesse) in Analogie zum Stieltjes-Integral definieren. Da eine Erweiterung im Sinne eines pfadweisen Lebesgue-Stieltjes-Integrals nicht möglich ist (siehe auch die obigen Überlegungen), müssen wir einen anderen Weg einschlagen. Dafür benutzen wir vor allem die Tatsache, dass das soeben definierte Integral eines elementaren Prozesses ein quadratisch integrierbares Martingal mit $\mathbb{P}$-f.s. stetigen Pfaden ist (siehe Satz 2.31). Damit haben wir eine lineare Abbildung

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{int}^W\colon \quad \mathscr{E}_T &\to \left(\mathscr{M}_T^2, \|.\|_{\mathscr{M}_T^2}\right) \\ \Phi &\mapsto \mathrm{int}^W(\Phi) =: \int_0^{\cdot} \Phi(s)\,\mathrm{d}W(s) \end{aligned}$$

definiert.

Schritt 2: Wir führen eine Norm $\|.\|_T$ auf dem Vektorraum $\mathscr{E}_T$ der elementaren Prozesse ein, so dass die obige Abbildung int^W aus (1) zu einer linearen Isometrie wird.

Schritt 3: Wir geben einen Banachraum $(E_1, \|.\|_{E_1})$ an, in dem sich der normierte Raum $(\mathscr{E}_T, \|.\|_T)$ linear und isometrisch einbetten lässt.

Schritt 4: Wir zeigen, dass die Einbettung aus Schritt 3 dicht ist. Damit lässt sich die Abbildung int^W aus (1) auf genau eine Weise linear und isometrisch auf dem Banachraum $(E_1, \|.\|_{E_1})$ fortsetzen, d.h., es existiert genau eine lineare Isometrie

$$\begin{aligned} \mathrm{Int}^W\colon \quad (E_1, \|.\|_{E_1}) &\to \left(\mathscr{M}_T^2, \|.\|_{\mathscr{M}_T^2}\right) \\ \Phi &\mapsto \mathrm{Int}^W(\Phi) =: \int_0^{\cdot} \Phi(s)\,\mathrm{d}W(s), \end{aligned}$$

so dass $\mathrm{Int}^W\big|_{\mathscr{E}_T} = \mathrm{int}^W$. Wir nennen $\mathrm{Int}^W(\Phi) = \int_0^{\cdot} \Phi(s)\,\mathrm{d}W(s)$ für jedes $\Phi \in E_1$ stochastisches (Itô-)Integral von Φ bzgl. des Q-Wiener Prozesses W.

Schritt 5: Wir erweitern noch einmal die Menge möglicher Integranden. Diesmal benutzen wir jedoch kein funktionalanalytisches Argument, sondern greifen auf ein stochastisches Lokalisationsargument zurück.

Das zweite Ziel dieser Arbeit liegt darin ein in der aktuellen Literatur beschriebenes Schema zur numerischen Approximation der Lösung einer Gleichung der Form (•) vorzustellen und auf ihre Konvergenzrate hin zu analysieren. Denn, obwohl sich in der Theorie stochastischer partieller Differentialgleichungen zahlreiche Lösungsansätze etabliert haben und unter bestimmten Bedingungen die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung garantiert werden kann, ist deren direkte Angabe oft nicht möglich. Umso wichtiger wird damit die numerische Behandlung solcher Gleichungen.

Um diese beiden Ziele zu erreichen, gehen wir wie folgt vor. Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen, deren Wichtigkeit im späteren Verlauf der Arbeit deutlich wird (Kapitel 1). Zunächst betrachten wir drei Klassen von Operatoren: nukleare Operatoren, Hilbert-Schmidt-Operatoren sowie die Klasse $\mathrm{Tr}(U)$ der positiven und symmetrischen Spurklassenoperatoren. Anschließend gehen wir auf den Begriff der Pseudo-Inversen eines linearen Operators T auf einem separablen Hilbertraum U ein. Damit lässt sich ein Skalarprodukt definieren, welches den Bildraum dieses Operators zu einem separablen Hilbertraum werden lässt. Nach diesem funktionalanalytischen Exkurs werden einige wenige Resultate der Maßtheorie präsentiert. In dem darauf folgenden Abschnitt, welcher der Wahrscheinlichkeitstheorie gewidmet ist, werden zunächst Begriffe aus dem Kontext stochastischer Prozesse eingeführt und die σ-Algebra der vorhersagbaren Ereignisse im Detail analysiert (siehe Definition 1.41 und die nachfolgenden Sätze). Anschließend werden Begriffe aus der Theorie reellwertiger Zufallsvariablen und Prozesse wie „Bedingte Erwartung“ und „Martingale“ auf natürliche Weise für Zufallsvariablen und stochastische Prozesse mit Werten in unendlich-dimensionalen separablen Banachräumen verallgemeinert. Wichtige Zusammenhänge und Ungleichungen werden ebenfalls übertragen. Dabei steht vor allem der Raum $\mathcal{M}_T^2$ der quadratisch integrierbaren Martingale mit $\mathbb{P}$-f.s. stetigen Pfaden, auf den sich eine Norm $\|.\|_{\mathcal{M}_T^2}$ definieren lässt, im Mittelpunkt.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir den Begriff des stochastischen Itô-Integrals erläutern und einige Eigenschaften aufzeigen (Kapitel 2). Da wir im unendlich-dimensionalen Kontext operieren wollen, soll es sich bei $(W(t))_{t\in[0,T]}$ um einen unendlich-dimensionalen Prozess handeln, und zwar speziell um die Verallgemeinerung dessen, was wir im reellen Kontext unter einer (Standard-)Brown'schen Bewegung verstehen. Einen solchen Prozess nennen wir Q-Wiener Prozess (siehe Definition 2.15). Dessen Existenz sowie wichtige Eigenschaften werden in Abschnitt 2.1 hergeleitet. Dabei wird auch deutlich, was unter „Q“ zu verstehen ist. Im Anschluss widmen wir uns der Konstruktion des stochastischen Itô-Integrals bzgl. eines Q-Wiener Prozesses und führen die oben aufgeführten fünf Schritte detailliert aus. Im Anschluss präsentieren wir zwei wichtige Eigenschaften dieses Integrals (Abschnitt 2.2.2).

Nachdem wir die Komponenten der Gleichung (•) erklärt haben (das Bochner-Integral wird im Anhang B erläutert), wollen wir uns der Approximation der Lösung einer solchen Gleichung widmen (Kapitel 3). Wir verfolgen dabei einen an die (aus dem deterministischen Kontext bekannten) Variationsformulierung angelehnten Ansatz (*engl.*: variational approach) und beschreiben zunächst eine Klasse stochastischer partieller Differentialgleichungen, indem wir bestimmte Bedingungen an die Abbildungen A und B in (•) stellen ([A1]–[A4]). Ein entsprechender Lösungsbegriff wird eingeführt und eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für die beschriebene Situation präsentiert. Im Hinblick auf eine spätere Abschätzung der Konvergenzrate eines Approximationsschemas werden weitere Regularitätsbedingungen an die Lösung von (•) sowie an A und B gestellt ([R1]–[R4]). In einem letzten Abschnitt soll ein in der aktuellen Literatur diskutiertes implizites Approximationsschema für die Lösung einer stochastischen partiellen Differentialgleichung vorgestellt werden (siehe [10]). Unter bestimmten Konsistenz-

bedingungen ([Cnτ]) lässt sich eine Abschätzung der Konvergenzrate dieses Schemas beweisen (siehe Satz 3.11).
Im Anhang wird zunächst auf die Eindeutigkeit der Fourier-Transformation für Wahrscheinlichkeitsmaße auf separablen Hilberträumen eingegangen, ein Resultat, das eine wichtige Rolle in Kapitel 2.1.1 einnimmt (Anhang A). Weiter wird der Begriff des Bochner-Integrals im Anhang B detailliert konstruiert. Für die Variationsformulierung sind Skalen von Vektorräumen wichtig, insbesondere spielt der Begriff des Gelfand-Dreiers (*engl.*: normal triplet) eine bedeutende Rolle. Dieser wird in Anhang C eingeführt. Schließlich wird in Anhang D eine diskrete Version des Gronwall'schen Lemmas präsentiert.

Kapitel 1

Vorbereitungen

In diesem Kapitel wollen wir einige Begriffe, Resultate und Techniken aus den drei Gebieten Funktionalanalysis, Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie aufführen, auf die wir im späteren Verlauf der Arbeit immer wieder zurückgreifen werden. Grundlegende Kenntnisse aus den drei Bereichen werden vorausgesetzt.

1.1 Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis

Wir wollen in diesem Paragraphen auf bestimmte Klassen von Operatoren eingehen, die in unseren späteren Konstruktionen eine wichtige Rolle spielen werden. Zudem wollen wir den Begriff der Pseudo-Inversen eines Operators einführen und damit einen für diese Arbeit wichtigen Hilbertraum definieren. Die Resultate stammen vorwiegend aus [16, Anhang B und C; S. 109 ff.] bzw. [8, Appendix B und C; S. 153 ff.] und der dort angegebenen Literatur.
Im Folgenden seien $(U, \langle ., . \rangle_U)$ und $(H, \langle ., . \rangle_H)$ zwei separable Hilberträume über $\mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $L(U, H)$ die Menge aller linearen und stetigen (bzw. beschränkten) Operatoren von U nach H. Ist $U = H$, so schreiben wir kurz $L(U)$ anstatt $L(U, U)$. Für $T \in L(U, H)$ bezeichne

$$\|T\|_{L(U,H)} := \sup_{\substack{u \in U \\ u \neq 0}} \frac{\|Tu\|_H}{\|u\|_U} \in [0, \infty)$$

die Operatornorm von T. (Wir benutzen im Folgenden diese Bezeichnungen auch für den Fall, dass es sich bei U und H lediglich um normierte Räume handelt.) Mit $T^* \in L(H, U)$ bezeichnen wir den (Hilbertraum-)adjungierten Operator von $T \in L(U, H)$, d.h. T^* ist der eindeutig bestimmte lineare und beschränkte Operator von H nach U, so dass

$$\langle Tu, h \rangle_H = \langle u, T^* h \rangle_U \text{ für alle } u \in U \text{ und } h \in H.$$

1.1.1 Nukleare Operatoren

Wir beginnen mit den sog. nuklearen Operatoren.

Definition 1.1 (Nuklearer Operator)**:** Ein Operator $T \in L(U, H)$ heisst *nuklear*, wenn es zwei Folgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq H$ sowie $(b_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq U$ gibt, so dass

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \langle b_i, x \rangle_U \text{ für alle } x \in U$$

und gleichzeitig
$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \|a_i\|_H \cdot \|b_i\|_U < \infty$$
gilt.

Notation: Den Raum der nuklearen Operatoren von U nach H bezeichnen wir mit $L_1(U,H)$. Ist $U = H$, so schreiben wir kurz $L_1(U)$ anstatt $L_1(U,H)$.

Definition 1.2 (Spur)**:** Es sei $T \in L_1(U)$ sowie $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von U. Dann heisst

$$\operatorname{tr} T := \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle Te_k, e_k\rangle_U \tag{1.1}$$

Spur von T.

Bemerkung 1.3: Es sei $T \in L_1(U)$. Dann ist die Spur von T wohldefiniert, d.h. die Reihe in (1.1) ist für jede beliebige Orthonormalbasis $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ von U (absolut) konvergent und der Reihenwert hängt nicht von der Wahl der Orthonormalbasis ab (vgl. [16, Remark B.0.4; S. 110]).

Satz 1.4: *Der Raum $L_1(U,H)$ ist, versehen mit der Norm*

$$\|T\|_{L_1(U,H)} := \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \|a_i\|_H \cdot \|b_i\|_U \,\Big|\, Tx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\langle b_i, x\rangle_U \text{ für alle } x \in U\Big\}, \tag{1.2}$$

ein Banachraum.

Beweis: [siehe [14, Corollar 16.25; S. 154]] □

1.1.2 Hilbert-Schmidt-Operatoren

Eine weitere wichtige Klasse sind die sog. Hilbert-Schmidt-Operatoren. Um diese zu definieren, benötigen wir zunächst einige Resultate, die uns deren Wohldefiniertheit garantieren sollen.

Satz 1.5: *Es sei $T \in L(U,H)$ sowie $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von U und $\{f_l : l \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von H. Dann gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|_H^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \|T^* f_l\|_U^2. \tag{1.3}$$

Bemerkung 1.6: Die Gleichung (1.3) ist wie folgt zu verstehen: Die linke Seite konvergiert genau dann wenn die Rechte konvergiert und falls eine der beiden Seiten einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ besitzt, so sind die Reihenwerte gleich.

Beweis von Satz 1.5: Mit Hilfe der Parseval'schen Identität (vgl. [20, Theorem 21.11; S. 240]) und dem Umordnungssatz für Reihen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|_H^2 &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{l=1}^{\infty}\langle Te_k, f_l\rangle_H^2\Big) = \sum_{l=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\langle Te_k, f_l\rangle_H^2\Big)\\ &= \sum_{l=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\langle e_k, T^* f_l\rangle_U^2\Big) = \sum_{l=1}^{\infty}\|T^* f_l\|_U^2.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.7: Es sei $T \in L(U, H)$. Der obige Satz 1.5 impliziert, dass wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|_H^2$$

für eine bestimmte Orthonormalbasis $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ von U konvergiert,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|Te'_j\|_H^2.$$

für jede beliebige Orthonormalbasis $\{e'_j : j \in \mathbb{N}\}$ von U gilt. Die jetzt folgende Definition ist also sinnvoll.

Definition 1.8 (Hilbert-Schmidt-Operator)**:** Es sei $T \in L(U, H)$ sowie $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von U. T heisst *Hilbert-Schmidt-Operator*, falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|_H^2 < \infty \tag{1.4}$$

gilt.
Notation: Die Menge der Hilbert-Schmidt-Operatoren bezeichnen wir mit $L_2(U, H)$. Ist $U = H$, so schreiben wir kurz $L_2(U)$ anstatt $L_2(U, H)$.

Der Raum $L(U, H)$ ist im Allgemeinen kein separabler Hilbertraum, auch dann nicht wenn U und H separable Hilberträume sind. Wir können aber zeigen, dass die Menge der Hilbert-Schmidt-Operatoren unter diesen Umständen ein separabler Hilbertraum ist – dies wird unser nächstes Ziel sein. Wir benötigen dafür zunächst eine geeignete „Geometrie“, d.h. ein geeignetes Skalarprodukt.

Satz 1.9: *Es seien $S, T \in L_2(U, H)$ zwei Hilbert-Schmidt-Operatoren, $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von U. Dann gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle Se_k, Te_k\rangle_H\right| < \infty. \tag{1.5}$$

Ist $\{e'_j : j \in \mathbb{N}\}$ eine weitere Orthonormalbasis von U, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Se_k, Te_k\rangle_H = \sum_{j=1}^{\infty} \langle Se'_j, Te'_j\rangle_H. \tag{1.6}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Gültigkeit von (1.5). Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle Se_k, Te_k\rangle_H\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|Se_k\|_H \cdot \|Te_k\|_H \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|Se_k\|_H^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|_H^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Bei der ersten Abschätzung haben wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf dem Hilbertraum $(H, \langle ., .\rangle_H)$ benutzt, während wir bei der Zweiten auf die Hölder-Ungleichung auf dem Maßraum $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k)$ zurückgegriffen haben.

Sei nun $\{e'_j : j \in \mathbb{N}\}$ eine weitere Orthonormalbasis von U sowie $\{f_l : l \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von H. Die zweimalige Anwendung der eben benutzten Hölder-Ungleichung liefert dann:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left|\langle S e_k, f_l\rangle_H \, \langle T e_k, f_l\rangle_H\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\Big(\sum_{l=1}^{\infty}\left|\langle S e_k, f_l\rangle_H\right|^2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\sum_{l=1}^{\infty}\left|\langle T e_k, f_l\rangle_H\right|^2\Big)^{1/2}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\|S e_k\|_H \cdot \|T e_k\|_H\\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\|S e_k\|_H^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|T e_k\|_H^2\right)^{1/2} < \infty.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten dann mit Hilfe des Umordnungssatzes:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\langle S e_k, T e_k\rangle_H &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\langle S e_k, f_l\rangle_H \, \langle T e_k, f_l\rangle_H\right)\\
&= \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\langle S e_k, f_l\rangle_H \, \langle T e_k, f_l\rangle_H\right)\\
&= \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\langle e_k, S^* f_l\rangle_U \, \langle e_k, T^* f_l\rangle_U\right)\\
&= \sum_{l=1}^{\infty}\langle S^* f_l, T^* f_l\rangle_U.
\end{aligned}
$$

Dasselbe Argument mit der Orthonormalbasis $\{e'_j : j \in \mathbb{N}\}$ anstatt $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ liefert:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle S e_k, T e_k\rangle_H = \sum_{j=1}^{\infty}\langle S e'_j, T e'_j\rangle_H.$$

□

Satz 1.10: *i.) Die Menge $L_2(U,H)$ der Hilbert-Schmidt-Operatoren ist ein Untervektorraum von $L(U,H)$.*

ii.) Bei der Abbildung

$$
\text{(1.7)}\qquad
\begin{aligned}
\langle .,. \rangle_{L_2(U,H)} :\quad L_2(U,H)\times L_2(U,H) &\to \mathbb{R}\\
(S,T) &\mapsto \langle S,T\rangle_{L_2(U,H)} := \sum_{k=1}^{\infty}\langle S e_k, T e_k\rangle_H,
\end{aligned}
$$

wobei $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine beliebige Orthonormalbasis von U ist, handelt es sich um ein Skalarprodukt auf $L_2(U,H)$.

Beweis: ad i.): Aus der Definition der Hilbert-Schmidt-Operatoren folgt $L_2(U,H) \subseteq L(U,H)$ und man sieht leicht, dass der Nulloperator $T \equiv 0$ in $L_2(U,H)$ liegt. Mit Hilfe von Satz 1.9

erhalten wir für $S, T \in L_2(U, H)$ und $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \|(S+T)e_k\|_H^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle (S+T)e_k, (S+T)e_k\rangle_H \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle S e_k, S e_k\rangle_H + 2\langle S e_k, T e_k\rangle_H + \langle T e_k, T e_k\rangle_H\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|S e_k\|_H^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle S e_k, T e_k\rangle_H\right| + \sum_{k=1}^{\infty} \|T e_k\|_H^2 < \infty,\end{aligned}$$

da S und T Hilbert-Schmidt-Operatoren sind. Gleichzeitig gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a \cdot S e_k\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a^2 \cdot \|S e_k\|_H^2 = a^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|S e_k\|_H^2 < \infty$$

und es folgt insgesamt, dass $L_2(U, H)$ ein Untervektorraum von $L(U, H)$ ist.
ad ii.): Wir merken an, dass die in (1.7) definierte Abbildung, aufgrund des Satzes 1.9 wohldefiniert ist, d.h. die Reihe auf der rechten Seite konvergiert und ist von der Wahl der Orthonormalbasis $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ von U unabhängig. Die Tatsache, dass es sich bei $\langle .,. \rangle_{L_2(U,H)}$ um ein Skalarprodukt, d.h. um eine positiv definite, symmetrische Bilinearform, handelt, lässt sich leicht nachrechnen. □

Definition 1.11 (Hilbert-Schmidt-Norm)**:** Die vom Skalarprodukt $\langle .,. \rangle_{L_2(U,H)}$ aus (1.7) auf dem Vektorraum $L_2(U, H)$ induzierte Norm

$$\|T\|_{L_2(U,H)} := \sqrt{\langle T, T\rangle_{L_2(U,H)}} \qquad (T \in L_2(U, H))$$

heisst *Hilbert-Schmidt-Norm*.
Notation: Falls bekannt ist um welche Räume es sich handelt, verzichten wir sowohl bei $\langle .,. \rangle_{L_2(U,H)}$ als auch bei $\|.\|_{L_2(U,H)}$ auf deren Angabe und schreiben kurz $\langle .,. \rangle_{L_2}$ bzw. $\|.\|_{L_2}$.

Für den Nachweis der Separabilität und der Vollständigkeit des Raumes $(L_2, \|.\|_{L_2})$ benötigen wir noch einige Ungleichungen. Diese werden im späteren Verlauf der Arbeit auch als eigenständige Resultate von Bedeutung sein.

Satz 1.12: *Es sei $T \in L_2(U, H)$. Dann ist der adjungierte Operator T^* ebenfalls ein Hilbert-Schmidt-Operator, d.h. $T^* \in L_2(H, U)$, und es gilt:*

(1.8) $$\|T\|_{L_2(U,H)} = \|T^*\|_{L_2(H,U)}$$

sowie

(1.9) $$\|T\|_{L(U,H)} \leq \|T\|_{L_2(U,H)}.$$

Beweis: Dass der adjungierte Operator T^* in $L_2(H, U)$ liegt sowie die Gleichheit (1.8) haben wir bereits in Satz 1.5 gezeigt. Um die Ungleichung (1.9) nachzuweisen, wählen wir eine beliebige

Orthonormalbasis $\{f_l : l \in \mathbb{N}\}$ von H. Dann gilt für $x \in U$ beliebig:

$$\begin{aligned}\|Tx\|_H^2 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left|\langle Tx, f_l\rangle_H\right|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \left|\langle x, T^* f_l\rangle_U\right|^2 \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \|x\|_U^2 \cdot \|T^* f_l\|_U^2 = \|x\|_U^2 \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \|T^* f_l\|_U^2 \\ &= \|x\|_U^2 \cdot \|T^*\|_{L_2(H,U)}^2 = \|x\|_U^2 \cdot \|T\|_{L_2(U,H)}^2.\end{aligned}$$

Aus der Definition der Operatornorm, folgt dann unmittelbar auch (1.9). □

Satz 1.13: *Es sei* $(G, \langle ., .\rangle_G)$ *ein weiterer separabler Hilbertraum,* $S_1 \in L(H,G)$*,* $S_2 \in L(G,U)$ *sowie* $T \in L_2(U,H)$*. Dann gilt:*

i.) $S_1 \circ T \in L_2(U,G)$ *und*

$$\|S_1 \circ T\|_{L_2(U,G)} \leq \|S_1\|_{L(H,G)} \cdot \|T\|_{L_2(U,H)} \tag{1.10}$$

sowie

ii.) $T \circ S_2 \in L_2(G,H)$ *und*

$$\|T \circ S_2\|_{L_2(G,H)} \leq \|S_2\|_{L(G,U)} \cdot \|T\|_{L_2(U,H)}. \tag{1.11}$$

Beweis: ad i.): Es sei $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von U. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|S_1 T e_k\|_G^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|S_1\|_{L(H,G)}^2 \cdot \|Te_k\|_H^2 = \|S_1\|_{L(H,G)}^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|_H^2 = \|S_1\|_{L(H,G)}^2 \cdot \|T\|_{L_2(U,H)}^2,$$

woraus sich $S_1 \circ T \in L_2(U,G)$ und durch Wurzelziehen die Abschätzung (1.10) ergibt.
ad ii.): Es gilt $S_2^* \in L(U,G)$ und wegen Satz 1.12 auch $T^* \in L_2(H,U)$. Aus Teil *i.)* können wir schließen, dass $S_2^* \circ T^* \in L_2(H,G)$ und unter erneuter Anwendung des Satzes 1.12 folgt:

$$T \circ S_2 = (S_2^* \circ T^*)^* \in L_2(G,H).$$

Weiter folgt:

$$\|T \circ S_2\|_{L_2(G,H)} = \|\,(T \circ S_2)^*\,\|_{L_2(H,G)} = \|S_2^* \circ T^*\|_{L_2(H,G)}.$$

Wegen Teil *i.)* ergibt sich:

$$\|T \circ S_2\|_{L_2(G,H)} \leq \|S_2^*\|_{L(U,G)} \cdot \|T^*\|_{L_2(H,U)} = \|S_2\|_{L(G,U)} \cdot \|T\|_{L_2(U,H)},$$

wobei wir auf die bereits bewiesene Gleichheit (1.8) zurückgegriffen haben. □

Mit Hilfe all dieser Resultate, können wir nachweisen, dass es sich bei $L_2(U,H)$ um einen separablen Hilbertraum handelt.

Satz 1.14: *Es sei* $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ *eine Orthonormalbasis von U sowie* $\{f_l : l \in \mathbb{N}\}$ *eine Orthonormalbasis von H. Dann gilt:*

i.) Der normierte Raum $(L_2(U,H), \|.\|_{L_2(U,H)})$ *ist vollständig.*

ii.) Die Menge $\{f_l \otimes e_k := f_l \cdot \langle e_k, .\rangle_U \, : \, (l,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ *ist eine Orthonormalbasis des Raumes* $(L_2(U,H), \langle .,. \rangle_{L_2(U,H)})$.

Der Raum der Hilbert-Schmidt-Operatoren $L_2(U,H)$ *ist also, versehen mit dem Skalarprodukt* $\langle .,. \rangle_{L_2(U,H)}$*, ein separabler Hilbertraum.*

Beweis: ad i.): Es sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L_2(U,H)$ eine Cauchy-Folge (bzlg. der Hilbert-Schmidt-Norm $\|.\|_{L_2(U,H)}$). Da jede Cauchy-Folge beschränkt ist, existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{L_2(U,H)} \leq C.$$

Wegen der Abschätzung (1.9), ist $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(U,H)$ auch eine $\|.\|_{L(U,H)}$-Cauchy-Folge und da der Raum der linearen und beschränkten Operatoren vollständig ist, existiert ein $T \in L(U,H)$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\|_{L(U,H)} = 0.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ folgt damit

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n e_k\|_H = \|T e_k\|_H,$$

denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\Big| \|T_n e_k\|_H - \|T e_k\|_H \Big| \leq \|(T_n - T)\, e_k\|_H \leq \|T - T_n\|_{L(U,H)}.$$

Das Lemma von Fatou – angewandt auf dem Maßraum $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k)$ – liefert dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|T e_k\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \|T_n e_k\|_H^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|T_n e_k\|_H^2 = \liminf_{n\to\infty} \|T_n e_k\|_{L_2(U,H)}^2 \leq C,$$

und das bedeutet, dass T ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, $T \in L_2(U,H)$. Weiter gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{m\to\infty} \Big| \|(T - T_n)\, e_k\|_H - \|(T_m - T_n)\, e_k\|_H \Big| \leq \lim_{m\to\infty} \|(T - T_m)\, e_k\|_H \leq \lim_{m\to\infty} \|T - T_m\|_{L(U,H)} = 0.$$

Fixieren wir $\varepsilon > 0$, so folgt daraus die Existenz eines $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\begin{aligned} \|T - T_n\|_{L_2(U,H)}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \|(T - T_n)\, e_k\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \|(T_m - T_n)\, e_k\|_H^2 \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|(T_m - T_n)\, e_k\|_H^2 = \liminf_{m\to\infty} \|T_m - T_n\|_{L_2(U,H)}^2 \leq \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0, \end{aligned}$$

wobei wir erneut auf das Lemma von Fatou zurückgegriffen und die Tatsache benutzt haben, dass es sich um eine Cauchy-Folge handelt. Insgesamt folgt die Vollständigkeit von $L_2(U,H)$.
ad ii.): Fixieren wir zunächst $(l,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dann ist die Abbildung

$$f_l \otimes e_k : \begin{array}{ccc} U & \to & H \\ u & \mapsto & f_l \cdot \langle e_k, u \rangle_U \end{array} \tag{1.12}$$

linear (aufgrund der Bilinearität des Skalarproduktes $\langle .,. \rangle_U$) und wegen

$$\|f_l \cdot \langle e_k, u \rangle_U\|_H = |\langle e_k, u \rangle_U| \cdot \|f_l\|_H \leq \|u\|_U \cdot \|f_l\|_H$$

beschränkt. Weiter gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_l \otimes e_k(e_i)\|_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|f_l \cdot \langle e_k, e_i \rangle_U\|_H^2 = \|f_l\|_H^2 < \infty.$$

Also ist $f_l \otimes e_k$ insgesamt ein Hilbert-Schmidt-Operator, $f_l \otimes e_k \in L_2(U, H)$. Für jeden weiteren Hilbert-Schmidt-Operator $T \in L_2(U, H)$ gilt:

$$\langle f_l \otimes e_k, T \rangle_{L_2(U,H)} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f_l \cdot \langle e_k, e_i \rangle_U, Te_i \rangle_H = \langle f_l, Te_k \rangle_H$$

und damit ergibt sich für $(l, k), (l', k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \langle f_l \otimes e_k, f_{l'} \otimes e_{k'} \rangle_{L_2(U,H)} &= \langle f_l, f_{l'} \langle e_{k'}, e_k \rangle_U \rangle_H \\ &= \langle e_{k'}, e_k \rangle_U \cdot \langle f_l, f_{l'} \rangle_H = \begin{cases} 0 & (l, k) \neq (l', k') \\ 1 & (l, k) = (l', k'), \end{cases} \end{aligned}$$

womit nachgewiesen wäre, dass $\{f_l \otimes e_k := f_l \cdot \langle e_k, . \rangle_U : (l, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} \subseteq L_2(U, H)$ ein Orthonormalsystem ist. Abschließend weisen wir dessen Vollständigkeit nach. Dafür wählen wir ein beliebiges $T \in L_2(U, H)$, welches

$$\langle f_l \otimes e_k, T \rangle_{L_2(U,H)} = 0 \text{ für alle } (l, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

erfüllt. Für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ ist dann

$$\langle f_l \otimes e_k, T \rangle_{L_2(U,H)} = \langle f_l, Te_k \rangle_H = 0 \text{ für alle } l \in \mathbb{N}.$$

Da $\{f_l : l \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von H ist, folgt, dass es sich bei $\langle ., Te_k \rangle_H$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ um den Nulloperator handelt und damit – aufgrund des Darstellungssatzes von Fréchet-Riesz:

$$Te_k = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Also ist $T \equiv 0$ und die Behauptung folgt. □

Der folgende Satz zeigt eine Verbindung zwischen den nuklearen und den Hilbert-Schmidt-Operatoren.

Satz 1.15: *Es sei $(G, \langle .,. \rangle_G)$ ein weiterer separabler Hilbertraum, $T \in L_2(U, H)$ sowie $S \in L_2(H, G)$. Dann gilt:*

$$S \circ T \in L_1(U, G) \qquad \textit{und} \qquad \|S \circ T\|_{L_1(U,G)} \leq \|T\|_{L_2(U,H)} \cdot \|S\|_{L_2(H,G)}. \tag{1.13}$$

Beweis: Es sei $\{f_l : l \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von H. Dann ist

$$STx = S\Big(\sum_{l=1}^{\infty} \langle Tx, f_l \rangle_H \cdot f_l\Big)$$

Wegen der Linearität und Stetigkeit von S gilt dann:

$$STx = \sum_{l=1}^{\infty} \langle Tx, f_l \rangle_H \cdot S f_l = \sum_{l=1}^{\infty} \langle x, \underbrace{T^* f_l}_{\in U} \rangle_U \cdot \underbrace{S f_l}_{\in G} \text{ für alle } x \in U.$$

Der lineare und beschränkte Operator $ST \in L(U, G)$ lässt sich also schreiben als

$$STx = \sum_{l=1}^{\infty} \langle x, a_l \rangle_H \cdot b_l \qquad (x \in U),$$

mit

$$(a_l)_{l \in \mathbb{N}} := (T^* f_l)_{l \in \mathbb{N}} \subseteq U \qquad \text{sowie} \qquad (b_l)_{l \in \mathbb{N}} := (S f_l)_{l \in \mathbb{N}} \subseteq G.$$

Weiter folgt, unter Zuhilfenahme der Hölder-Ungleichung,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \|a_l\|_U \cdot \|b_l\|_G &= \sum_{l=1}^{\infty} \|T^* f_l\|_U \cdot \|S f_l\|_G \\ &\leq \left(\sum_{l=1}^{\infty} \|T^* f_l\|_U^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{l=1}^{\infty} \|S f_l\|_G^2 \right)^{1/2} \\ &= \|T^*\|_{L_2(H,U)} \cdot \|S\|_{L_2(H,G)} = \|T\|_{L_2(U,H)} \cdot \|S\|_{L_2(H,G)} < \infty, \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Mit den gleichen Techniken wie bisher, lässt sich auch das folgende Resultat beweisen.

Satz 1.16: *Es sei $L \in L(H)$ sowie $B \in L_2(U, H)$. Dann gilt:*

- $L \circ B \circ B^* \in L_1(H)$ *sowie*
- $B^* \circ L \circ B \in L_1(U)$, *und*
- $\operatorname{tr} LBB^* = \operatorname{tr} B^* LB$.

Beweis: [siehe [16, Proposition B.0.10; S. 113]] □

1.1.3 Die Klasse Tr(U)

Bei der Konstruktion unendlich dimensionaler Gauß'schen Maße im späteren Verlauf dieser Arbeit, werden vor allem positive, symmetrische Operatoren mit endlicher Spur eine Rolle spielen. Was wir genau darunter verstehen, sehen wir jetzt.

Definition 1.17: Ein Operator $T \in L(U)$ heisst

i.) *positiv*, falls $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in U$ gilt.

i.) *symmetrisch*, falls $T^* = T$ gilt.

Notation: Wir bezeichnen die Menge aller positiven und symmetrischen Operatoren auf U mit $L^+(U)$.

Wir erinnern an das grundlegende funktionalanalytische Resultat, dass uns eine Art Wurzelziehen bei positiven, symmetrischen Operatoren erlaubt.

Satz 1.18: *Ist $T \in L^+(U)$ ein positiver, symmetrischer Operator, so existiert genau ein positiver, symmetrischer Operator $T^{1/2} \in L(U)$, so dass*

$$T^{1/2} \circ T^{1/2} = T.$$

Beweis: [siehe [17, Theorem VI.9; S. 196]] □

Satz 1.19: *Es sei $\mathrm{Q} \in L^+(U)$ ein positiver, symmetrischer Operator auf U, so dass*

$$\text{(T)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathrm{Q}\, e_k, e_k \rangle_U < \infty$$

für eine Orthonormalbasis $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ von U. Dann gilt:

- $\mathrm{Q} \in L_1(U)$,
- $\mathrm{Q}^{1/2} \in L_2(U)$ *und* $\| \mathrm{Q}^{1/2} \|_{L_2(U)} = \mathrm{tr}\, \mathrm{Q}$ *sowie*
- $\Phi \circ \mathrm{Q}^{1/2} \in L_2(U, H)$ *für* $\Phi \in L(U, H)$ *beliebig.*

Beweis: Gegeben sei also eine Orthonormalbasis $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ von U, so dass (T) erfüllt ist. Dann folgt mit Hilfe von Satz 1.18

$$\text{(1.14)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathrm{Q}^{1/2}\, e_k, \mathrm{Q}^{1/2}\, e_k \rangle_U = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathrm{Q}\, e_k, e_k \rangle_U < \infty,$$

also ist $\mathrm{Q}^{1/2}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator auf U, $\mathrm{Q}^{1/2} \in L_2(U)$. Aus Satz 1.15 folgt dann, dass $\mathrm{Q} \in L_1(U)$. Die Gleichheit $\| \mathrm{Q}^{1/2} \|_{L_2(U)} = \mathrm{tr}\, \mathrm{Q}$ ergibt sich sofort aus (1.14). Für $\Phi \in L(U, H)$, folgt $\Phi \circ \mathrm{Q}^{1/2} \in L_2(U, H)$ aus dem ersten Teil des Satzes 1.13. □

Notation: Die Menge aller positiven, symmetrischen Operatoren auf U mit endlicher Spur, d.h. welche (T) für eine Orthonormalbasis $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ von U erfüllen, bezeichnen wir im Folgenden mit $\mathrm{Tr}(U)$.

Bemerkung 1.20: Für $\mathrm{Q} \in L^+(U)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i.) $\mathrm{Q} \in \mathrm{Tr}(U)$.

ii.) $\mathrm{Q} \in L_1(U)$.

iii.) Q ist ein *Spurklassenoperator*, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle |\mathrm{Q}|\, e_k, e_k \rangle_U < \infty$$

für eine Orthonormalbasis $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ von U. Dabei bezeichnet $|\mathrm{Q}|$ den eindeutig bestimmten positiven Operator

$$|\mathrm{Q}| := (\, \mathrm{Q}^* \circ \mathrm{Q}\,)^{1/2}.$$

Das folgende Resultat wird bei der Konstruktion Gauß'scher Maße eine große Rolle spielen.

Satz 1.21: *Es sei* $\mathrm{Q} \in \mathrm{Tr}(U)$*. Dann existiert eine Orthonormalbasis* $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ *von* U *sowie eine Folge* $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$*, so dass*

$$\mathrm{Q}\, e_k = \lambda_k e_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \tag{1.15}$$

sowie

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0. \tag{1.16}$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus dem Hilbert-Schmidt-Theorem, vgl. [17, Theorem VI.16; S.203], unter Zuhilfenahme von [17, Theorem VI.21; S.209] sowie von Bemerkung 1.20. □

1.1.4 Die Pseudo-Inverse eines linearen Operators

Zum Schluss dieser funktionalanalytischen Betrachtungen, wollen wir noch daran erinnern, was wir unter der Pseudo-Inversen eines Operators verstehen. Für einen linearen, stetigen Operator $T \in L(U,H)$ bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Ker}(T) := \{x \in U : Tx = 0\}$$

den *Kern* von T und mit

$$\mathrm{Ker}(T)^{\perp} := \{v \in U : \langle v, x\rangle_U = 0 \text{ für alle } x \in \mathrm{Ker}(T)\}$$

dessen orthogonales Komplement. Da $\mathrm{Ker}(T)$ ein abgeschlossener Untervektorraum von U ist, gilt

$$U = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T)^{\perp},$$

d.h. zu jedem Element $u \in U$ existiert genau ein $x \in \mathrm{Ker}(T)$ und genau ein $v \in \mathrm{Ker}(T)^{\perp}$, so dass $u = x + v$ (vgl. [21, Theorem V.3.4; S. 220]). Der auf $\mathrm{Ker}(T)^{\perp}$ eingeschränkte Operator

$$\begin{aligned} T\big|_{\mathrm{Ker}(T)^{\perp}} :\ \mathrm{Ker}(T)^{\perp} &\to T(U) \\ v &\mapsto T\big|_{\mathrm{Ker}(T)^{\perp}}(v) = T(v) \end{aligned}$$

ist bijektiv und wir definieren:

Definition 1.22: Es sei $T \in L(U,H)$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} T^{-1} :\ T(U) &\to \mathrm{Ker}(T)^{\perp} \\ y &\mapsto T^{-1}(y) := \left(T\big|_{\mathrm{Ker}(T)^{\perp}}\right)^{-1}(y) \end{aligned} \tag{1.17}$$

heisst *Pseudo-Inverse* des Operators T.

Mit Hilfe dieser Pseudo-Inversen lässt sich ein Skalarprodukt auf dem Bildraum $T(U)$ von T definieren, uzw. so, dass dieser Raum zu einem separablen Hilbertraum wird.

Satz 1.23: *Es sei* $T \in L(U)$ *sowie* T^{-1} *die Pseudo-Inverse von* T*. Dann gilt:*

i.) *Der Vektorraum* $\mathrm{Ker}(T)^\perp$ *ist, versehen mit dem darauf eingeschränkten Skalarprodukt* $\langle .,. \rangle_U\big|_{\mathrm{Ker}(T)^\perp\times\mathrm{Ker}(T)^\perp}$, *ein separabler Hilbertraum.*

Notation: *Da aus dem Kontext immer deutlich wird was gemeint ist, schreiben wir im Folgenden* $\langle .,. \rangle_U$ *anstatt* $\langle .,. \rangle_U\big|_{\mathrm{Ker}(T)^\perp\times\mathrm{Ker}(T)^\perp}$ *sowie* $\|.\|_U$ *anstatt* $\|.\|_U\big|_{\mathrm{Ker}(T)^\perp}$.

ii.) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle_{T(U)}: \quad T(U)\times T(U) &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \langle x,y\rangle_{T(U)} := \langle T^{-1}(x), T^{-1}(y)\rangle_U \end{aligned} \tag{1.18}$$

ist ein Skalarprodukt. Damit ist $\|.\|_{T(U)} := \sqrt{\langle .,. \rangle_{T(U)}}$ *eine Norm auf dem Bildraum* $T(U)$ *des Operators* T.

iii.) $(T(U), \langle .,. \rangle_{T(U)})$ *ist ein Hilbertraum.*

iv.) *Ist* $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ *eine Orthonormalbasis von* $(\mathrm{Ker}(T)^\perp, \langle .,. \rangle_U)$, *so ist* $\{Te_k : k \in \mathbb{N}\}$ *eine Orthonormalbasis von* $(T(U), \langle .,. \rangle_{T(U)})$.

Der Raum $(T(U), \langle .,. \rangle_{T(U)})$ *ist demnach ein separabler Hilbertraum.*

Beweis: ad i.): Um zu zeigen, dass $(\mathrm{Ker}(T)^\perp, \langle .,. \rangle_U\big|_{\mathrm{Ker}(T)^\perp\times\mathrm{Ker}(T)^\perp})$ ein separabler Hilbertraum ist, reicht es zu zeigen, dass $\mathrm{Ker}(T)^\perp$ eine abgeschlossene Teilmenge von U ist (bzgl. der Norm $\|.\|_U$). Nunmehr, betrachten wir dafür eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Ker}(T)^\perp$, welche gegen ein $y \in U$ konvergiert. Für jedes $u \in \mathrm{Ker}(T)$ gilt dann:

$$\langle y_n, u\rangle_U = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist auch

$$\langle y, u\rangle_U = \lim_{n\to\infty} \langle y_n, u\rangle_U = 0 \text{ für alle } u \in \mathrm{Ker}(T).$$

Dies hat aber gerade zur Folge, dass $y \in \mathrm{Ker}(T)^\perp$.
ad ii.): Da T^{-1} linear ist und $\langle .,. \rangle_U$ ein Skalarprodukt, folgt durch leichtes Nachrechnen, dass $\langle .,. \rangle_{T(U)}$ ebenfalls eine positiv definite, symmetrische Bilinearform ist.
ad iii.): Wir müssen lediglich nachweisen, dass der normierte Raum $(T(U), \|.\|_{T(U)})$ vollständig ist. Wir wählen dafür eine $\|.\|_{T(U)}$-Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(U)$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Ker}(T)^\perp$, so dass $Tu_n = x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da für $m,n \in \mathbb{N}$

$$\|u_n - u_m\|_U = \|T^{-1}x_n - T^{-1}x_m\|_U = \|T^{-1}(x_n - x_m)\|_U = \|x_n - x_m\|_{T(U)},$$

ist diese Folge eine $\|.\|_U$-Cauchy-Folge und aufgrund der Vollständigkeit von $\mathrm{Ker}(T)^\perp$ existiert ein $u \in \mathrm{Ker}(T)^\perp$, so dass $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_U = 0$. Setzen wir $x := Tu$, so folgt die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x und damit die gewünschte Vollständigkeit.
ad iv.): Es sei $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $(\mathrm{Ker}(T)^\perp, \langle .,. \rangle_U)$ – aufgrund von Teil *i.)* ist dies wohldefiniert. Dann gilt für $(l,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$$\langle Te_l, Te_k\rangle_{T(U)} = \langle e_l, e_k\rangle_U,$$

woraus ersichtlich wird, dass es sich bei $\{Te_k : k \in \mathbb{N}\}$ um ein Orthonormalsystem in $T(U)$ handelt. Da T stetig und linear ist, folgt für beliebiges $x \in \mathrm{Ker}(T)^\perp$:

$$Tx = T\left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle_U e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle_U Te_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Tx, Te_k\rangle_{T(U)} Te_k.$$

Also lässt sich jedes $y \in T(U) = T(\mathrm{Ker}(T)^{\perp})$ schreiben als

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y, Te_k \rangle_{T(U)} Te_k.$$

Dies ist äquivalent zur Vollständigkeit des Orthonormalsystems (vgl. [20, Theorem 21.13; S. 243]) und die Behauptung folgt. □

1.2 Hilfsmittel aus der Maßtheorie

Es sei $(E, \|.\|_E)$ ein normierter Raum. Wir bezeichnen mit $K_\varepsilon(x) := \{y \in E : \|y - x\|_E < \varepsilon\}$ die *offene Kugel* um den Punkt $x \in E$ mit Radius $\varepsilon > 0$. Eine Teilmenge $U \subseteq E$ heisst dann *offen*, falls wir um jeden Punkt $x \in U$ eine offene Kugel $K_\varepsilon(y)$ legen können, so dass diese vollständig in U liegt; d.h., wenn ein $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ sowie ein $y = y(x) \in U$ existieren, so dass $x \in K_\varepsilon(y)$ und $K_\varepsilon(y) \subseteq U$. Das Mengensystem der offenen Kugeln bildet eine Topologie auf E. Diese wollen wir fortan mit $\mathscr{O}_E \subseteq \mathscr{P}(E)$ bezeichnen und *Standardtopologie* des normierten Raumes $(E, \|.\|_E)$ nennen. In der Maßtheorie (und damit insb. in der Wahrscheinlichkeitstheorie) stehen allerdings nicht die Topologien, sondern σ-Algebren im Mittelpunkt der Betrachtungen. Eine Besondere ist die sog. *Borel'sche* oder *topologische* σ-Algebra. Dabei handelt es sich um die von der Standardtopologie erzeugte σ-Algebra:

$$\mathscr{B}(E) := \sigma(\mathscr{O}_E).$$

Wir schreiben im Folgenden auch kurz $\mathscr{B}$ anstatt $\mathscr{B}(E)$, falls aus dem Kontext klar wird welcher Raum E gemeint ist. Unter bestimmten Voraussetzungen – wie z.B. Separabilität und/oder Vollständigkeit des Raumes E – lässt sich diese Borel'scheσ-Algebra schöner beschreiben, wie die folgenden Sätze zeigen. Auf Beweise verzichten wir an dieser Stelle, verweisen aber auf die passende Literatur.
Als erstes erinnern wir an eine unmittelbare Konsequenz aus dem Satz von Hahn-Banach.

Satz 1.24: *Es sei $(E, \|.\|_E)$ ein separabler normierter Raum, $E^* = L(E, \mathbb{R})$ der Dualraum von E. Dann existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E^*$, so dass sich die Norm eines jeden Elements $x \in E$ wie folgt schreiben lässt:*

$$\|x\|_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)|.$$

Beweis: [siehe [3, Appendix E.10; S. 355]] □

Mit Hilfe dieses Resultats, lässt sich dann Folgendes zeigen.

Satz 1.25: *Es sei $(E, \|.\|_E)$ ein separabler Banachraum, $E^* = L(E, \mathbb{R})$ der Dualraum von E. Dann gilt für die Borel'sche σ-Albgebra:*

$$\mathscr{B}(E) = \sigma\Big(\varphi : \varphi \in E^*\Big).$$

Beweis: [siehe [6, 1.3; S. 17]] □

Wir erinnern nun noch an das folgende maßtheoretische Resultat, welches immer wieder zur Anwendung kommt.

Satz 1.26: *Es sei I eine beliebige nichtleere Menge, $(T_i)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen $T_i\colon \Omega \to \Omega_i$ einer Menge Ω in Messräume $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$, $i \in I$. Ferner sei $S : \tilde{\Omega} \to \Omega$ eine weitere Abbildung von einem Messraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{A}})$ nach Ω. Dann gilt:*
S ist genau dann $\tilde{\mathscr{A}}/\sigma(T_i : \ i \in I)$-messbar, wenn für jedes $i \in I$ die Abbildung $T_i \circ S$ $\tilde{\mathscr{A}}/\mathscr{A}_i$-messbar ist.

Beweis: [siehe [1, Satz 7.4; S. 42]] □

Korollar 1.27: *Es sei $(E, \|.\|_E)$ ein separabler Banachraum, $E^* = L(E, \mathbb{R})$ der Dualraum von E sowie $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum.*
Eine Abbildung $X\colon \Omega \to E$ ist genau dan $\mathscr{A}/\mathscr{B}(E)$-messbar, wenn für jedes $\varphi \in E^*$ die Abbildung $\varphi \circ X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{A}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbar ist.

Beweis: Die Behauptung folgt sofort als Kombination der Sätze 1.25 und 1.26. □

Es sei nun $T > 0$ eine positive Zahl. Wir wissen, dass der Raum der reelwertigen, stetigen Funktionen auf $[0, T]$, $\mathscr{C}([0, T], \mathbb{R})$, versehen mit der Supremumsnorm, ein Banachraum ist. Zudem wissen wir aus dem Weierstrass'schen Approximationssatz um dessen Separabilität. Der folgende Satz zeigt, dass sich diese Resultate übertragen lassen, wenn wir $\mathbb{R}$ durch einen separablen Banachraum $(E, \|.\|_E)$ ersetzen.

Satz 1.28: *Es sei $(E, \|.\|_E)$ ein Banachraum, $T > 0$ ein positive Zahl. Wir bezeichnen mit $\|.\|_{\infty,E}$ die Supremumsnorm:*

$$\mathscr{C}([0, T], E) \ni u \mapsto \|u\|_{\infty,E} := \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_E.$$

Dann gilt:

i.) $(\mathscr{C}([0, T], E), \|.\|_{\infty,E})$ *ist ein Banachraum.*

ii.) *Ist $(E, \|.\|_E)$ separabel, so ist es auch $(\mathscr{C}([0, T], E), \|.\|_{\infty,E})$.*

Notation: Falls klar ist welcher Banachraum E gemeint ist, schreiben wir auch $\|.\|_\infty$ anstatt $\|.\|_{\infty,E}$.

Beweis: ad i.): Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (\mathscr{C}([0, T], E))$ eine $\|.\|_\infty$-Cauchy-Folge, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ und $m \geq n_0$ gilt:

$$\varepsilon \geq \sup_{t\in[0,T]} \|f_n(t) - f_m(t)\|_E.$$

Dann ist $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ für jedes feste $t \in [0, T]$ eine $\|.\|_E$-Cauchyfolge, und da E vollständig ist, existiert eine Funktion $f\colon\ [0, T] \to E$, so dass für jedes $t \in [0, T]$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t).$$

Damit ist aber für alle $n \geq n_0$:

$$\varepsilon \geq \sup_{t\in[0,T]} \Big(\lim_{m\to\infty} \|f_n(t) - f_m(t)\|_E\Big) = \sup_{t\in[0,T]} \|f(t) - f_n(t)\|_E.$$

Also insgesamt:
$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$
Gleichzeitig ist die Funktion f stetig. Das sehen wir wie folgt: Wir fixieren ein $t_0 \in [0, T]$ sowie ein $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N_0 = N_0(t_0, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass
$$\|f(t) - f_{N_0}(t)\|_E \leq \varepsilon/3 \text{ für alle } t \in [0, T].$$
Da f_{N_0} stetig ist, existiert auch ein entsprechendes $\delta = \delta(\varepsilon, N_0, t_0) > 0$, so dass
$$\|f_{N_0}(t) - f_{N_0}(t_0)\|_E \leq \varepsilon/3 \text{ für alle } t \in K_\delta(t_0).$$
Damit erhalten wir
$$\|f(t) - f(t_0)\|_E \leq \|f(t) - f_{N_0}(t)\|_E + \|f_{N_0}(t) - f_{N_0}(t_0)\|_E + \|f_{N_0}(t_0) - f(t_0)\|_E \leq \varepsilon$$
für alle $t \in K_\delta(t_0)$. Die Behauptung folgt.
ad ii.): Wir bezeichnen mit $D_{\mathscr{C}} := (f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $D_E := (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare und dichte Teilmenge von $\mathscr{C}([0, T], \mathbb{R})$ bzw. E – diese existieren, aufgrund des Weierstrass'schen Approximationssatzes und der Separabilität von E. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass die Menge
$$\begin{aligned} D_{\mathbb{Q}} &:= \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \left\{ f \cdot x \,\middle|\, f \in D_{\mathscr{C}}, x \in D_E \right\} \\ &:= \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot f_j \cdot x_j \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, \lambda_j \in \mathbb{Q}, f_j \in D_{\mathscr{C}}, x_j \in D_E \right\} \subseteq \mathscr{C}([0, T], E) \end{aligned}$$
abzählbar ist und dicht in $\mathscr{C}([0, T], E)$ liegt. Das machen wir in drei Schritten.
Schritt 1: Wir zeigen, dass $D_{\mathbb{Q}}$ abzählbar ist.
Das sehen wir wie folgt: Die Menge $A := \mathbb{Q} \times D_{\mathscr{C}} \times D_E$ ist als endliches kartesisches Produkt abzählbarer Mengen wieder abzählbar, $A = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Wir können $D_{\mathbb{Q}}$ dann wie folgt schreiben:
$$D_{\mathbb{Q}} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{j=1}^{n_0} b_j \,\middle|\, n_0 \leq N; b_1, \ldots, b_{n_0} \in \{a_1, \ldots, a_N\} \right\},$$
also als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen. Damit ist $D_{\mathbb{Q}}$ abzählbar.
Schritt 2: Wir zeigen, dass $D_{\mathbb{Q}}$ eine dichte Teilmenge von
$$D := \operatorname{span} \left\{ f \cdot x \,\middle|\, f \in \mathscr{C}([0, T], \mathbb{R}); x \in E \right\}$$
ist. Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}([0, T], \mathbb{R})$ sowie $x \in E$ beliebig, betrachten wir die Funktion
$$\begin{aligned} g_{\lambda,f,x}\colon \quad [0, T] &\to E \\ t &\mapsto g_{\lambda,f,x}(t) := \lambda \cdot f(t) \cdot x. \end{aligned}$$
Dann exitieren Folgen $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$, $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq D_{\mathscr{C}}$ sowie $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq D_E$, so dass
$$\lim_{i\to\infty} |\lambda_i - \lambda| = 0, \quad \lim_{i\to\infty} \|f_i - f\|_\infty = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{i\to\infty} \|x_i - x\|_E = 0.$$

Da die Konvergenz von Folgen deren Beschränktheit nach sich zieht, existieren Konstanten $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$, so dass $\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,T]} |f_i(t)| \leq C_1 < \infty$ sowie $\sup_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|_E \leq C_2 < \infty$ gilt. Damit erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]} \|\lambda f(t)x - \lambda_i f_i(t)x_i\|_E \\
&\qquad \leq \sup_{t\in[0,T]} \|\lambda f(t)x - \lambda f_i(t)x\|_E + \sup_{t\in[0,T]} \|\lambda f_i(t)x - \lambda_i f_i(t)x_i\|_E \\
&\qquad = \sup_{t\in[0,T]} \left(|f(t) - f_i(t)| \cdot \|\lambda x\|_E\right) + \sup_{t\in[0,T]} \left(|f_i(t)| \cdot \|\lambda x - \lambda_i x_i\|_E\right) \\
&\qquad = |\lambda| \cdot \|x\|_E \cdot \sup_{t\in[0,T]} |f(t) - f_i(t)| + \|\lambda x - \lambda_i x_i\|_E \cdot \sup_{t\in[0,T]} |f_i(t)| \\
&\qquad \leq |\lambda| \cdot \|x\|_E \cdot \sup_{t\in[0,T]} |f(t) - f_i(t)| + \left(\|\lambda x - \lambda x_i\|_E + \|\lambda x_i - \lambda_i x_i\|_E\right) \cdot \sup_{t\in[0,T]} |f_i(t)| \\
&\qquad = |\lambda| \cdot \|x\|_E \cdot \sup_{t\in[0,T]} |f(t) - f_i(t)| + \left(|\lambda| \cdot \|x - x_i\|_E + |\lambda - \lambda_i| \|x_i\|_E\right) \cdot \sup_{t\in[0,T]} |f_i(t)| \\
&\qquad \leq |\lambda| \cdot \|x\|_E \cdot \sup_{t\in[0,T]} |f(t) - f_i(t)| + \left(|\lambda| \cdot \|x - x_i\|_E + |\lambda - \lambda_i| \cdot C_2\right) \cdot C_1 \longrightarrow 0 \qquad (i \to \infty).
\end{aligned}
$$

Wir haben also gezeigt, dass die Folge $(\lambda_i f_i x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq D_{\mathbb{Q}}$, die Funktion $g_{\lambda,f,x}$ approximiert. Es folgt unmittelbar, dass $D_{\mathbb{Q}} \subseteq D$ dicht.

Schritt 3: D ist eine dichte Teilmenge von $\mathscr{C}([0,T], E)$. Für diesen Teil des Beweises verweisen wir auf den Beweis von Lemma 2.11 in [8, S. 54].

Aus den letzten beiden Schritten, folgt, dass $D_{\mathbb{Q}}$ eine dichte Teilmenge von $\mathscr{C}([0,T], E)$ ist und wegen Schritt 1 folgt dann auch die Separabilität von $\mathscr{C}([0,T], E)$. □

1.3 Hilfsmittel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

In diesem Paragraphen wollen wir für den weiteren Verlauf der Arbeit wichtige Begriffe und Resultate aus der Stochastik präsentieren.

Mit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ bezeichnen wir in dieser Arbeit stets einen Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. Ω ist eine beliebige Menge, $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{A}$.

1.3.1 Stochastische Prozesse

Zur mathematischen Modellierung sich mit der Zeit zufällig entwickelnder Phänomene werden sog. stochastische Prozesse herangezogen. Wir nehmen im Folgenden an $(E, \mathscr{G})$ sei ein Messraum sowie I eine beliebige (vollständig) geordnete Indexmenge und definieren:

Definition 1.29 (Stochastischer Prozess)**:** Ein *stochastischer Prozess X* auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum $(E, \mathscr{G})$ und Zeit- oder Indexmenge I ist eine Funktion

$$
X\colon \begin{array}{rcl} I \times \Omega & \to & E \\ (t,\omega) & \mapsto & X(t,\omega), \end{array} \tag{1.19}
$$

so dass für jedes feste $t \in I$ die Abbildung

$$
X_t\colon \begin{array}{rcl} \Omega & \to & E \\ \omega & \mapsto & X_t(\omega) := X(t,\omega) \end{array} \tag{1.20}
$$

eine $\mathscr{A}/\mathscr{G}$-messbare Zufallsvariable ist.
Für jedes $\omega \in \Omega$ heisst die Funktion

$$X(.,\omega):\ \begin{array}{ccc} I & \to & E \\ t & \mapsto & X(t,\omega) \end{array} \tag{1.21}$$

Pfad oder *Trajektorie* des Prozesses X.
Notation: Wir schreiben auch $(X(t))_{t\in I}$ oder $(X_t)_{t\in I}$ oder $\{X(t):\ t \in I\}$ oder $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}, X_t, t \in I, E, \mathscr{G})$ für den stochastischen Prozess X.

Konvention 1.30: *i.)* In dieser Arbeit werden wir – falls nichts anderes erwähnt wird – stets die Menge der positiven reellen Zahlen $I = \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ oder aber das kompakte Intervall $I = [0,T]$, für eine positive reelle Zahl $T > 0$, als Zeitmenge unserer Prozesse wählen. Wir schreiben dann auch $(X_t)_{t\geq 0}$ statt $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$.

ii.) Falls nichts anderes erwähnt wird, ist der Zustandsraum E der in dieser Arbeit betrachteten Prozesse stets ein polnischer Raum (d.h. ein vollständiger metrischer Raum, der eine abzählbare, dichte Teilmenge enthält), versehen mit der Borel'schen σ-Algebra $\mathscr{G} = \mathscr{B}(E)$.

Um zu spezifizieren, was damit gemeint ist, wenn man sagt zwei Prozesse seien gleich, greift man auf die folgenden beiden Begriffe zurück.

Definition 1.31 (Modifikation; Ununterscheidbarkeit)**:** Es seien $(X_t)_{t\in I}$ und $(Y_t)_{t\in I}$ zwei stochastische Prozesse mit gleichem Zustandsraum und identischer Zeitmenge auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

i.) $(X_t)_{t\in I}$ heisst *Modifikation* von $(Y_t)_{t\in I}$, wenn

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1 \text{ für alle } t \in I. \tag{1.22}$$

i.) $(X_t)_{t\in I}$ und $(Y_t)_{t\in I}$ heissen *ununterscheidbar*, wenn

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t \text{ für alle } t \in I) = 1 \tag{1.23}$$

Wie bei Mengensystemen oder bei Zufallsvariablen, lässt sich auch für stochastische Prozesse der folgende stochastische Unabhängigkeitsbegriff einführen.

Definition 1.32 (Unabhängige Prozesse)**:** Es sei J eine beliebige nichtleere Menge. Eine Familie $\{(X_t^{(j)})_{t\in I}:\ j \in J\}$ stochastischer Prozesse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum $(E, \mathscr{B}(E))$ heisst *(stochastisch) unabhängig*, falls die Familie $\{\sigma(X_t^{(j)}:\ t \in I) | j \in J\}$ von σ-Algebren (stochastisch) unabhängig ist.
Sprechweise: Wir sagen auch die Prozesse $(X_t^{(j)})_{t\in I}$, $j \in J$, seien unabhängig und meinen damit, dass die Familie $\{(X_t^{(j)})_{t\in I}:\ j \in J\}$ unabhängig ist.

Bemerkung 1.33: Es sei $\{(X_t^{(k)})_{t\in I}:\ k \in \mathbb{N}\}$ eine Familie stochastischer Prozesse auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum $(E, \mathscr{B}(E))$. Diese ist definitionsgemäß genau dann unabhängig, wenn die σ-Algebren

$$\sigma\Big(X_t^{(k_j)}:\ t \in I\Big),\ j = 1,\dots,n,$$

für jede beliebige Wahl von $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedener $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, unabhängig sind. Da für jedes $k \in \mathbb{N}$ das $\cap$-stabile Mengensystem

$$\mathscr{G}^{(k)} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{m} \{X_{t_i}^{(k)} \in B_i\} \,\middle|\, m \in \mathbb{N}; t_i \in I \text{ und } B_i \in \mathscr{B}(E), i = 1, \ldots, m \right\}$$

ein Erzeuger der σ-Algebra $\sigma\Big(X_t^{(k)} : t \in I\Big)$ ist, reicht es für den Nachweis der Unabhängigkeit zu zeigen, dass für jede beliebige Wahl von $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedener $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ sowie endlich vieler Zeitpunkte $t_1, \ldots, t_m$, $m \in \mathbb{N}$, die σ-Algebren:

$$\sigma(X_{t_1}^{k_j}, \ldots, X_{t_m}^{k_j}), j = 1, \ldots, n,$$

unabhängig sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Mengen:

$$\bigcap_{i=1}^{m} \{X_{t_i}^{k_1} \in B_{i1}\}, \ldots, \bigcap_{i=1}^{m} \{X_{t_i}^{k_n} \in B_{in}\}$$

für jede beliebige Wahl von $B_{ij} \in \mathscr{B}(E)$, für $j = 1, \ldots, n$ und $i = 1, \ldots, m$, unabhängig sind. Es sei an dieser Stelle noch angemerkt, dass die Wahl der Zeitpunkte $t_1, \ldots, t_m$ eigentlich von $j \in \{1, \ldots, n\}$ abhängen sollte, d.h. $t_i(k_j) : i \in \{1, \ldots, m(j)\}$. Da allerdings für $t \in I$ und $k \in \mathbb{N}$, $\{X_t^k \in E\} = \Omega$, gilt, können wir für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gemeinsame Zeitpunkte betrachten und ggf. mit Ω „auffüllen“ (vgl. auch [2, S.336]).

Zu einem Zeitpunkt $t \in I$ ist für die Beschreibung der vom Prozess X stammenden Zufallsvariable X_t nicht die Kenntnis der gesamten σ-Algebra $\mathscr{A}$ nötig. I.Allg. reicht eine gröbere σ-Algebra $\mathscr{F}_t$, welche mit der Zeit immer feiner wird. Um dies zu beschreiben führen wir den folgenden Begriff ein.

Definition 1.34 (Filtration)**:** Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

i.) Eine Menge $(\mathscr{F}_t)_{t \in I}$ von σ-Algebren heisst *Filtration* in $\mathscr{A}$, falls für jede beliebige Wahl von $s, t \in I$ mit $s \leq t$ gilt:
$$\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{A}.$$

ii.) Eine Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \in I}$ heisst *rechtsstetig*, falls für alle $t \in I$ gilt
$$\mathscr{F}_{t+} := \bigcap_{s > t} \mathscr{F}_s = \mathscr{F}_t.$$

iii.) Eine Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \in I}$ heisst *normal*, falls sie rechtsstetig ist und
$$N \in \mathscr{F}_0 \text{ für alle } N \in \mathscr{A} \text{ mit } \mathbb{P}(N) = 0.$$

Ein mit dem Begriff der Filtration eng gekoppeltes Konzept, ist das der Stoppzeiten.

Definition 1.35 (Stoppzeit; strikte Stoppzeit)**:** Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sowie eine Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ in $\mathscr{A}$. Eine Abbildung

$$\tau \colon \Omega \to [0, \infty]$$

heisst

i.) *Stoppzeit*, falls für jedes $t \in [0, \infty)$ gilt: $\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}$.

ii.) *strikte Stoppzeit*, falls für jedes $t \in [0, \infty)$ gilt: $\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$.

Falls $\tau(\Omega) \subseteq [0, T]$ für ein $T > 0$, so sprechen wir von einer *(strikten)* $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$*-Stoppzeit*.

Das folgende Hilfsresultat zeigt, wie sich jede (strikte) Stoppzeit durch eine Folge monoton fallender strikter Stoppzeiten punktweise approximieren lässt.

Lemma 1.36: *Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$*, eine Filtration* $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ *in* $\mathscr{A}$ *sowie eine positive Zahl* $T > 0$*. Dann existiert zu jeder beliebigen (strikten)* $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$*-Stoppzeit* $\tau\colon \Omega \to [0, T]$*, eine Folge* $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *strikter* $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$*-Stoppzeiten, so dass*

- τ_i *für jedes* $i \in \mathbb{N}$ *nur endlich viele Werte annimmt,*
- $\tau_{i+1}(\omega) \geq \tau_i(\omega) \geq \tau(\omega)$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$ *und* $\omega \in \Omega$*, und*
- $\lim_{i\to\infty} \tau_i(\omega) = \tau(\omega)$ *für alle* $\omega \in \Omega$.

Beweis: Für $i \in \mathbb{N}$ beliebig, definieren wir dieAbbildung

$$\tau_i(\omega) := \begin{cases} T & \omega \in \{\tau = T\} \\ \frac{k}{2^i}T & \omega \in \{\frac{k-1}{2^i}T \leq \tau < \frac{k}{2^i}T\}, k = 1, \ldots, 2^i \end{cases}$$

und zeigen, dass es sich dabei um eine strikte Stoppzeit handelt. Fixieren wir dafür zunächst $t \in [0, T)$. Dann existiert ein $k_0 = k_0(t) \in \{1, \ldots, 2^i\}$, so dass

$$\frac{k_0 - 1}{2^i}T \leq t < \frac{k_0}{2^i}T$$

gilt. Es folgt:

$$\begin{aligned} \{\tau_i \leq t\} &= \{\omega \in \Omega :\ \tau_i(\omega) \leq t\} \\ &= \Big\{\omega \in \Omega :\ \tau_i(\omega) \leq \frac{k_0 - 1}{2^i}T\Big\} \\ &= \Big\{\omega \in \Omega :\ \tau(\omega) < \frac{k_0 - 1}{2^i}T\Big\} \in \mathscr{F}_{\frac{k_0-1}{2^i}T} \subseteq \mathscr{F}_t, \end{aligned}$$

da τ eine Stoppzeit ist. Wählen wir nun ein $t \geq T$, so gilt $\{\tau_i \leq t\} = \Omega \in \mathscr{F}_t$. Insgesamt, haben wir gezeigt, dass τ_i für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine strikte $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeit ist. Die restlichen Eigenschaften sind sofort ersichtlich. □

Konvention 1.37: Sprechen wir in dieser Arbeit von einer Filtration so nehmen wir sie – falls nichts anderes erwähnt wird – stets als normal an. Man beachte, dass in diesem Fall die Begriffe *Stoppzeit* und *strikte Stoppzeit* zusammenfallen.

Wir führen nun drei wichtige Messbarkeitsbegriffe für stochastische Prozesse ein.

Definition 1.38 (adaptiert; messbar; progressiv-messbar)**:** Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sowie eine Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ in $\mathscr{A}$. Ein stochastischer Prozess

$$\begin{array}{rccl} X\colon & I \times \Omega & \to & E \\ & (t, \omega) & \mapsto & X(t, \omega) \end{array}$$

heisst

i.) *adaptiert* an die Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ [oder $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$-*adaptiert*], wenn für jedes beliebige $t \in I$ die Zufallsvariable

$$\begin{array}{rccl} X_t\colon & \Omega & \to & E \\ & \omega & \mapsto & X_t(\omega) := X(t,\omega) \end{array}$$

$\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(E)$-messbar ist.

ii.) *messbar*, wenn er $\mathscr{B}(I)\otimes\mathscr{A}/\mathscr{B}(E)$-messbar ist.

iii.) *progressiv-messbar* bzgl. der Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$, wenn für jedes $t \in I$ der auf $[0,t]$ eingeschränkte Prozess

$$\begin{array}{rccccl} X^{(t)}\colon & (I\cap[0,t]) & \times & \Omega & \to & E \\ & (s & , & \omega) & \mapsto & X^{(t)}(s,\omega) := X\big|_{[0,t]}(s,\omega)\,, \end{array}$$

$\mathscr{B}(I\cap[0,t])\otimes\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(E)$-messbar ist.

Jeder Prozess bringt eine „natürliche“ Filtration mit sich, die häufig als der mit dem Prozess einhergehende Informationsfluss interpretiert wird.

Definition 1.39 (Natürliche Filtration)**:** Es sei $X\colon I\times(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P}) \to (E,\mathscr{B}(E))$ ein stochastischer Prozess. Für $t \in I$ bezeichnen wir mit:

$$\mathscr{F}_t^X := \sigma(X_s :\ s \le t).$$

Dann heisst $(\mathscr{F}_t^X)_{t\in I}$ *natürliche Filtration des Prozesses* X.

Bemerkung 1.40: Es sei $X\colon I\times(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P}) \to (E,\mathscr{B}(E))$ ein stochastischer Prozess.

i.) Man sieht leicht, dass es sich bei $(\mathscr{F}_t^X)_{t\in I}$ um eine Filtration im Sinne von Definiton 1.34 handelt.

ii.) X ist $(\mathscr{F}_t^X)_{t\in I}$-adaptiert.

iii.) Sei $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ eine Filtration in $\mathscr{A}$. X ist genau dann $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$-adaptiert, wenn $\mathscr{F}_t^X \subseteq \mathscr{F}_t$ für alle $t \in I$ gilt.

Neben den drei bereits aufgeführten Messbarkeitsbegriffen werden in dieser Arbeit sog. vorhersagbare Prozesse eine besondere Rolle einnehmen. Wir wollen klären was wir darunter verstehen und führen dafür zunächst den folgenden Begriff ein.

Definition 1.41 (vorhersagbare σ-Algebra)**:** Es sei $T > 0$ ein positive Zahl, $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ eine Filtration in $\mathscr{A}$. Die σ-Algebra

$$\mathscr{P}_T := \sigma\Big(\Big\{ (s,t]\times F_s :\ 0 \le s < t \le T, F_s \in \mathscr{F}_s\Big\} \cup \Big\{\{0\}\times F_0 :\ F_0 \in \mathscr{F}_0\Big\}\Big) \subseteq \mathscr{B}([0,T])\otimes\mathscr{A}$$

heisst *σ-Algebra der vorhersagbaren Ereignisse* oder *vorhersagbare σ-Algebra* in $[0,T]\times\Omega$.

Bevor wir uns diese σ-Algebra näher anschauen, wollen wir einige Notationen, die wir in dieser Arbeit häufiger benutzen werden, einführen.

Notation: Ist $T > 0$ eine positive Zahl und $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so schreiben wir

$$\Omega_T := [0,T]\times\Omega.$$

Wir bezeichnen ferner das Lebesgue'sche Maß auf der reellen Achse mit λ^1 und mit λ^1_T dessen Einschränkung auf $\mathscr{B}([0,T]) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \cap [0,T] = \{B \cap [0,T] : B \in \mathscr{B}(E)\}$. Wir schreiben gelegentlich auch einfach λ^1 für λ^1_T. Mit $\lambda^1_T \otimes \mathbb{P}$ bezeichnen wir das Produktmaß von λ^1_T und $\mathbb{P}$ auf der Produkt-σ-Algebra $\mathscr{B}([0,T]) \otimes \mathscr{A}$, d.h. das eindeutig bestimmte Maß auf dieser σ-Algebra, für das gilt:

$$\lambda^1_T \otimes \mathbb{P}(B \times A) = \lambda^1_T(B) \cdot \mathbb{P}(A) \text{ für } B \in \mathscr{B}([0,T]) \text{ und } A \in \mathscr{A}.$$

Die Einschränkung dieses Maßes auf der vorhersagbaren σ-Algebra $\mathscr{P}_T$ bezeichnen wir mit $\mathbb{P}_T$, d.h.

$$\mathbb{P}_T = \lambda^1_T \otimes \mathbb{P}\big|_{\mathscr{P}_T}.$$

Schließlich bezeichnen wir mit

$$\mathscr{G}_T := \Big\{(s,t] \times F_s :\ 0 \le s < t \le T, F_s \in \mathscr{F}_s\Big\} \cup \Big\{\{0\} \times F_0 :\ F_0 \in \mathscr{F}_0\Big\} \tag{1.24}$$

den Erzeuger der σ-Algebra der vorhersagbaren Ereignisse aus Definition 1.41.
Kommen wir zur Analyse von $\mathscr{P}_T$. Um zu verstehen warum diese σ-Algebra *vorhersagbar* heisst, beweisen wir das folgende Resultat.

Satz 1.42: *In der Situation von Definition 1.41 gilt:*

$$\mathscr{P}_T = \sigma\Big(\Big\{Y\colon\ [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R} \,|\, Y \text{ hat linksstetige Pfade und ist } (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}\text{-adaptiert}\Big\}\Big). \tag{1.25}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass „$\subseteq$" in (1.25) gilt. Wir fixieren dazu $0 \le s < t \le T$ sowie $F_s \in \mathscr{F}_s$ und definieren den rellwertigen Prozess

$$\begin{array}{rccl} Z_{s,t,F_s}\colon & [0,T] \times \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & (u,\omega) & \mapsto & Z_{s,t,F_s}(u,\omega) := \mathbb{1}_{(s,t]}(u) \cdot \mathbb{1}_{F_s}(\omega). \end{array} \tag{1.26}$$

Man sieht dann leicht, dass Z_{s,t,F_s} ein $(\mathscr{F}_u)_{u\in[0,T]}$-adaptierter Prozess ist mit überall linksseitig stetigen Pfaden und es gilt:

$$Z^{-1}_{s,t,F_s}(\{1\}) = (s,t] \times F_s.$$

Ferner ist für beliebiges $F_0 \in \mathscr{F}_0$:

$$\{0\} \times F_0 = Z^{-1}_{0,F_0}(\{1\}),$$

wobei wir mit Z_{0,F_0} den offensichtlich ebenfalls $(\mathscr{F}_u)_{u\in[0,T]}$-adaptierten Prozess

$$Z_{0,F_0}(u,\omega) := \mathbb{1}_{\{0\}\times F_0}(u,\omega) \qquad ((u,\omega) \in [0,T] \times \Omega)$$

bezeichnen. Die Linksstetigkeit der Pfade dieses Prozesses ist trivial und wir erhalten insgesamt:

$$\mathscr{P}_T \subseteq \sigma\Big(\Big\{Y\colon\ [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R} \,|\, Y \text{ hat linsstetige Pfade und ist } (\mathscr{F}_u)_{u\in[0,T]}\text{-adaptiert}\Big\}\Big).$$

Widmen wir uns der Rückrichtung, „$\supseteq$", und fixieren dafür einen beliebigen $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-adaptierten, reellwertigen Prozess Y, dessen Pfade linksseitig stetig sind. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Prozess:

$$Y^{(n)}(s,\omega) := \begin{cases} Y(\frac{k}{2^n}T, \omega) & s \in (\frac{k}{2^n}T, \frac{k+1}{2^n}T]; k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1 \\ Y(0,\omega) & s = 0 \end{cases} \qquad ((s,\omega) \in [0,T] \times \Omega).$$

Für $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ gilt dann:

$$\begin{aligned}(Y^{(n)})^{-1}(B) &= \Big\{(s,\omega) \in [0,T] \times \Omega : \ Y^{(n)}(s,\omega) \in B\Big\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \underbrace{\Big(\frac{k}{2^n}T, \frac{k+1}{2^n}T\Big] \times \Big\{Y(\frac{k}{2^n}T,.) \in B\Big\}}_{\in \mathscr{P}_T, \text{ da } Y \text{ adaptiert}} \cup \underbrace{\{0\} \times \Big\{Y(0,.) \in B\Big\}}_{\in \mathscr{P}_T, \text{ da } Y \text{ adaptiert}} \in \mathscr{P}_T.\end{aligned}$$

Also ist $Y^{(n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\mathscr{P}_T/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbarer Prozess. Wegen der Linksstetigket der Pfade des Prozesses Y können wir diesen als punktweise Limes der Folge $(Y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ schreiben, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} Y^{(n)}(s,\omega) = Y(s,\omega), \text{ für alle } (s,\omega) \in [0,T] \times \Omega,$$

woraus die $\mathscr{P}_T/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-Messbarkeit von Y folgt. □

Wir weisen nun eine weitere schöne und nützliche Eigenschaft der vorhersagbaren σ-Algebra nach, und zwar, dass sich jede Menge aus $\mathscr{P}_T$ bis auf $\mathbb{P}_T$-Maß $\varepsilon > 0$ durch eine endliche Vereinigung disjunkter Mengen aus dem Erzeuger $\mathscr{G}_T$ approximieren lässt.

Satz 1.43: *Gegeben sei die Situation aus Definition 1.41. Wir bezeichnen mit:*

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_T &:= \Big\{\bigcup_{j\in J} A_j \,\Big|\, \#J < \infty, A_j \in \mathscr{G}_T \text{ für } j \in J\Big\} \\ &= \Big\{\bigcup_{j\in J} A_j \,\Big|\, \#J < \infty, A_j \in \mathscr{G}_T \ \text{ für } j \in J \text{ und } A_i \cap A_k = \emptyset \text{ für alle } i,k \in J \text{ mit } i \neq k\Big\}\end{aligned}$$

sowie mit:

$$\mathscr{A}_T := \Big\{A \in \mathscr{P}_T \,\Big|\, \text{Zu } \varepsilon > 0 \ \text{ bel. ex. } \Lambda_\varepsilon \in \mathscr{K}_T, \ \text{ so dass } \mathbb{P}_T\big((A \backslash \Lambda_\varepsilon) \cup (\Lambda_\varepsilon \backslash A)\big) < \varepsilon\Big\}.$$

Dann gilt:

i.) $\mathscr{K}_T$ ist eine Algebra.

ii.) $\mathscr{A}_T$ ist ein Dynkin-System.

iii.) Die σ-Algebra der vorhersagbarere Ereignisse ist identisch mit $\mathscr{A}_T$, d.h.

$$\mathscr{P}_T = \mathscr{A}_T.$$

Beweis: Wir weisen zunächst nach, dass $\mathscr{G}_T$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem ist. Dafür betrachten wir $0 \leq s_1 < t_1 \leq T$ sowie $0 \leq s_2 < t_2 \leq T$ und entsprechend $F_{s_1} \in \mathscr{F}_{s_1}$ sowie $F_{s_2} \in \mathscr{F}_{s_2}$. Dann gilt:

$$(s_1,t_1] \times F_{s_1} \ \cap \ (s_2,t_2] \times F_{s_2} = \underbrace{\big((s_1,t_1] \cap (s_2,t_2]\big)}_{=(s_1 \vee s_2, t_1 \wedge t_2]} \times \underbrace{(F_{s_1} \cap F_{s_2})}_{\in \mathscr{F}_{s_1 \vee s_2}} \in \mathscr{G}_T.$$

Sind ferner $F_0^{(1)}, F_0^{(2)} \in \mathscr{F}_0$, so gilt:

$$(s_1,t_1] \times F_{s_1} \ \cap \ \{0\} \times F_0^{(1)} = \emptyset \in \mathscr{G}_T,$$

und

$$\{0\} \times F_0^{(1)} \cap \{0\} \times F_0^{(2)} = \{0\} \times \underbrace{(F_0^{(1)} \cap F_0^{(2)})}_{\in \mathscr{F}_0} \in \mathscr{G}_T.$$

Insgesamt erhalten wir die $\cap$-Stabilität unseres Erzeugers $\mathscr{G}_T$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\big((s_1, t_1] \times F_{s_1}\big)^c &= \big((s_1, t_1]^c \times \Omega\big) \cup \big((s_1, t_1] \times F_{s_1}^c\big) \\ &= (\{0\} \times \Omega) \cup \big((0, s_1] \times \Omega\big) \cup \big((t_1, T] \times \Omega\big) \cup \big((s_1, t_1] \times F_{s_1}^c\big) \in \mathscr{K}_T\end{aligned}$$

sowie

$$(\{0\} \times F_0^{(1)})^c = \{0\} \times \left(F_0^{(1)}\right)^c \cup (0, T] \times F_0^{(1)} \in \mathscr{K}_T,$$

und damit

$$A^c \in \mathscr{K}_T \text{ für alle } A \in \mathscr{G}_T. \tag{1.27}$$

ad i.): Der Gesamtraum Ω_T lässt sich wie folgt schreiben:

$$\Omega_T = (\{0\} \times \Omega) \cup \big((0, T] \times \Omega\big).$$

Damit ist dessen Zugehörigkeit zu $\mathscr{K}_T$ nachgewiesen. Es seien nun $A, B \in \mathscr{K}_T$. D.h. es existieren $A_1, \ldots, A_N \in \mathscr{G}_T$ sowie $B_1, \ldots, B_M \in \mathscr{G}_T$ für ein $N \in \mathbb{N}$ sowie ein $M \in \mathbb{N}$, so dass

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i \text{ und } B = \bigcup_{k=1}^{M} B_k.$$

Dann gilt:

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{N} A_i \cap \bigcup_{k=1}^{M} B_k = \bigcup_{i=1}^{N} \Big(A_i \cap \bigcup_{k=1}^{M} B_k\Big) = \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{k=1}^{M} \underbrace{(A_i \cap B_k)}_{\in \mathscr{G}_T}.$$

Der Schnitt zweier Mengen $A, B \in \mathscr{K}_T$ lässt sich demnach als Vereinigung endlich vieler Mengen aus $\mathscr{G}_T$ schreiben, womit

$$A \cap B \in \mathscr{K}_T$$

folgt. Schauen wir auf das Komplement von $A \in \mathscr{K}_T$, so gilt (siehe (1.27)):

$$A^c = \Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\Big)^c = \bigcap_{i=1}^{N} \underbrace{A_i^c}_{\in \mathscr{K}_T}.$$

Wegen der bereits gezeigten $\cap$-Stabilität von $\mathscr{K}_T$ folgt:

$$A^c \in \mathscr{K}_T.$$

Insgesamt haben wir nachgewiesen, dass das Mengensystem $\mathscr{K}_T$ eine Algebra in Ω_T ist.

ad ii.): Wegen dem gerade Bewiesenen, sehen wir sofort, dass $\Omega_T \in \mathscr{A}_T$ gilt – man setze $\Lambda_\varepsilon := \Omega_T \in \mathscr{K}_T$ für jedes $\varepsilon > 0$. Betrachten wir eine beliebige Menge $D \in \mathscr{A}_T$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $\Lambda_{\varepsilon,D} \in \mathscr{K}_T$, so dass

$$\mathbb{P}_T\big((D\backslash\Lambda_{\varepsilon,D}) \cup (\Lambda_{\varepsilon,D}\backslash D)\big) < \varepsilon.$$

Dann ist $\Lambda^c_{\varepsilon,D} \in \mathscr{K}_T$ (vgl. Teil *i.)*) und es gilt:

$$\mathbb{P}_T\big((D^c\backslash\Lambda^c_{\varepsilon,D}) \cup (\Lambda^c_{\varepsilon,D}\backslash D^c)\big) = \mathbb{P}_T\big((\Lambda_{\varepsilon,D}\backslash D) \cup (D\backslash\Lambda_{\varepsilon,D})\big) < \varepsilon,$$

woraus $D^c \in \mathscr{A}_T$ folgt. Schließlich betrachten wir eine Familie $(D_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}_T$ abzählbar vieler, paarweise disjunkter Mengen aus $\mathscr{A}_T$ und bezeichnen deren Vereinigung mit

$$\tilde{D} := \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j.$$

Fixieren wir $\varepsilon > 0$, so existiert für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine Menge $\Lambda^{(j)}_\varepsilon \in \mathscr{K}_T$, so dass

$$\mathbb{P}_T\big((D_j\backslash\Lambda^{(j)}_\varepsilon) \cup (\Lambda^{(j)}_\varepsilon\backslash D_j)\big) < 2^{-j} \cdot \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da die Mengen D_j für $j \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt sind und $\mathbb{P}_T$ ein endliches Maß ist, folgt zudem die Existenz einer natürlichen Zahl $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\mathbb{P}_T\Big(\bigcup_{j=N_0}^{\infty} D_j\Big) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da das Mengensystem $\mathscr{K}_T$ eine Algebra ist, wissen wir auch, dass

$$\tilde{\Lambda}_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{N_0} \Lambda^{(i)}_\varepsilon \in \mathscr{K}_T.$$

Mit diesen Überlegungen erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_T(\tilde{D}\backslash\tilde{\Lambda}_\varepsilon) &= \mathbb{P}_T\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \setminus \bigcup_{i=1}^{N_0} \Lambda^{(i)}_\varepsilon\Big) = \mathbb{P}_T\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\Big(D_j \setminus \bigcup_{i=1}^{N_0} \Lambda^{(i)}_\varepsilon\Big)\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{N_0-1} \mathbb{P}_T\underbrace{\Big(D_j \setminus \bigcup_{i=1}^{N_0} \Lambda^{(i)}_\varepsilon\Big)}_{\subseteq D_j \setminus \Lambda^{(j)}_\varepsilon} + \mathbb{P}_T\Big(\bigcup_{j=N_0}^{\infty}\underbrace{\Big(D_j \setminus \bigcup_{i=1}^{N_0} \Lambda^{(i)}_\varepsilon\Big)}_{\subseteq D_j}\Big) \\
&\le \sum_{j=1}^{N_0-1} \underbrace{\mathbb{P}_T\big(D_j \setminus \Lambda^{(j)}_\varepsilon\big)}_{\le 2^{-j}\cdot\varepsilon/3} + \underbrace{\mathbb{P}_T\Big(\bigcup_{j=N_0}^{\infty} D_j\Big)}_{<\varepsilon/3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_T(\tilde{\Lambda}_\varepsilon\backslash\tilde{D}) &= \mathbb{P}_T\Big(\bigcup_{i=1}^{N_0} \Lambda^{(i)}_\varepsilon \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j\Big) \le \mathbb{P}_T\Big(\bigcup_{i=1}^{N_0} \Lambda^{(i)}_\varepsilon \setminus \bigcup_{j=1}^{N_0} D_j\Big) \\
&\le \sum_{i=1}^{N_0} \underbrace{\mathbb{P}_T\big(\Lambda^{(i)}_\varepsilon \setminus D_i\big)}_{\le 2^{-i}\cdot\varepsilon/3} \le \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt:

$$\mathbb{P}_T((\tilde{D}\backslash\tilde{\Lambda}_\varepsilon) \cup (\tilde{\Lambda}_\varepsilon\backslash\tilde{D})) < \varepsilon$$

mit $\tilde{\Lambda}_\varepsilon \in \mathscr{K}_T$, also $\tilde{D} \in \mathscr{A}_T$. Mit dem davor Gezeigten folgt dann auch, dass $\mathscr{A}_T$ ein Dynkin-System ist.
ad iii.): Die $\cap$-Stabilität von $\mathscr{K}_T$ garantiert uns, dass die von diesem Mengensystem erzeugte σ-Algebra dem davon erzeugten Dynkin-System, $\delta(\mathscr{K}_T)$, gleicht. Zudem ist offenbar $\mathscr{K}_T \subseteq \mathscr{A}_T$, so dass wir insgesamt die Inklusionskette

$$\mathscr{P}_T = \sigma\Big(\mathscr{G}_T\Big) = \sigma\Big(\mathscr{K}_T\Big) = \delta\Big(\mathscr{K}_T\Big) \subseteq \mathscr{A}_T \subseteq \mathscr{P}_T$$

erhalten. Da sowohl am Anfang als auch am Ende das gleiche Mengensystem steht, wird diese zu einer Gleichheitskette und wir erhalten insbesondere: $\mathscr{P}_T = \mathscr{A}_T$. □

Nachdem wir uns detailliert mit der σ-Algebra der vorhersagbaren Ereignisse beschäftigt haben, wollen wir auch denjenigen Prozessen einen Namen geben, die bzgl. dieser σ-Algebra messbar sind.

Definition 1.44 (vorhersagbarer Prozess)**:** Es sei E ein Banachraum, versehen mit der Borel'schen σ-Algebra $\mathscr{B}(E)$. Ferner sei $T > 0$ eine positive Zahl, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ eine Filtration in $\mathscr{A}$.
Ein stochastischer Prozess

$$Y\colon\ [0,T]\times\Omega \to E$$

heisst *vorhersagbar*, wenn er $\mathscr{P}_T/\mathscr{B}(E)$-messbar ist.

Bemerkung 1.45: Gegeben sei die Situation aus obiger Definition 1.44.

i.) Wie man leicht sieht, ist jeder vorhersagabe Prozess auch progressiv-messbar.

ii.) Ist E separabel, so ist ein stochastischer Prozess $Y\colon\ [0,T]\times\Omega \to E$ genau dann vorhersagbar, wenn für jedes duale Element $\varphi \in E^*$ der Prozess $\varphi \circ Y\colon\ [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$ vorhersagbar ist. Dies folgt sofort mit Hilfe des Korollars 1.27. Insbesondere ist dann jeder $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-adaptierte Prozess mit überall (linksseitig) stetigen Pfaden vorhersagbar.

1.3.2 Bedingte Erwartung in separablen Banachräumen

Im Folgenden sei $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ stets eine Filtration in $\mathscr{A}$. Mit E bezeichnen wir einen separablen Banachraum und mit $\mathscr{B} = \mathscr{B}(E)$ die Borel'sche σ-Algebra in E.
Unter den reellwertigen stochastischen Prozessen spielen Martingale eine besondere Rolle. Ihre schönen Eigenschaften machen sie für Konstruktionen und Beweise sehr nützlich. Es handelt sich dabei um adaptierte Prozesse $(X_t)_{t\geq 0}$, so dass X_t für jedes $t \geq 0$ integrierbar ist und für jede beliebige Wahl von $0 \leq s \leq t < \infty$ gilt:

$$\mathbb{E}(X_t|\mathscr{F}_s) = X_s \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.}).$$

Wir wollen dieses Konzept auf Banachraum-wertige Prozesse erweitern. Dafür benötigen wir neben einem Integralbegriff für Banachraum-wertige Abbildungen eine entsprechende Erweiterung der für reelle Zufallsvariablen bekannten bedingten Erwartung. Bei Ersterem greifen wir auf die natürliche Erweiterung des Lebesgue'schen Integrals, das sog. Bochner-Integral, zurück (siehe Anhang B). Dann lässt sich analog zum reellen Fall der Begriff der bedingten Erwartung wie folgt einführen.

Satz 1.46: *Es sei* $(E, \|.\|_E)$ *ein separabler Banachraum. Ferner sei* X *eine* E*-wertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *und* $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{A}$ *eine beliebige Unter-*σ*-Algebra von* $\mathscr{A}$*. Dann existiert eine* E*-wertige Zufallsvariable* Z*, welche die beiden Bedingungen:*

[B1] Z *ist* $\mathscr{G}$*-messbar,*

und

[B2] $\int_G X \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_G Z \,\mathrm{d}\mathbb{P}$, *für alle* $G \in \mathscr{G}$*,*

simultan erfüllt. Sie ist $\mathbb{P}$*-f.s. eindeutig bestimmt, d.h., falls* Y *eine weitere* E*-wertige Zufallsvariable ist, welche* [B1] *und* [B2] *gleichzeitig erfüllt, so gilt:*

$$\mathbb{P}(X = Y) = 1.$$

Wir bezeichnen diese Zufallsvariable – bzw. jeden Repräsentanten ihrer $L^1(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P}; E)$*-Äquivalenzklasse – mit:*

$$\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) := Z,$$

und nennen sie Bedingte Erwartung von X *unter* $\mathscr{G}$*.*
Es gilt:

$$\left\|\mathbb{E}(X|\mathscr{G})\right\|_E \leq \mathbb{E}(\|X\|_E|\mathscr{G}) \qquad (\mathbb{P}\text{-}f.s.)\,. \tag{1.28}$$

Beweis: Wir widmen uns zunächst der Eindeutigkeitsaussage und nehmen an Z und Y seien zwei E-wertige, $\mathscr{G}/\mathscr{B}(E)$-messbare Zufallsvariablen, so dass

$$\int_G X \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_G Z \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_G Y \,\mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad \text{für alle } G \in \mathscr{G}.$$

Da E ein separabler Banachraum ist, existieren abzählbar viele Elemente $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E^*$ des Dualraumes von E, so dass sich die Norm eines jeden Elements $x \in E$ wie folgt schreiben lässt (vgl. Satz 1.24):

$$\|x\|_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)|\,.$$

Nehmen wir nun diese Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dualer Elemente von E, so erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Menge $G \in \mathscr{G}$, mit Hilfe des Satzes B.21:

$$0 = \varphi_n\left(\int_G Z - Y \,\mathrm{d}\mathbb{P}\right) = \int_G \varphi_n(Z - Y) \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_G \varphi_n(Z) - \varphi_n(Y) \,\mathrm{d}\mathbb{P}. \tag{1.29}$$

Gleichzeitig gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$G_1^{(n)} := \{\omega \in \Omega : \ \varphi_n(Z(\omega)) > \varphi_n(Y(\omega))\} \in \mathscr{G}$$

und

$$G_2^{(n)} := \{\omega \in \Omega : \ \varphi_n(Z(\omega)) < \varphi_n(Y(\omega))\} \in \mathscr{G},$$

denn die Zufallsvariablen Y und Z sind $\mathscr{G}/\mathscr{B}(E)$-messbar und φ_n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig und damit $\mathscr{B}(E)/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbar. Einsetzen in (1.29) liefert:

$$\mathbb{P}(G_1^{(n)}) = \mathbb{P}(G_2^{(n)}) = 0, \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt aber auch:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega :\ Z(\omega) - Y(\omega) = 0\}\Big) &= \mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega :\ \|Z(\omega) - Y(\omega)\|_E = 0\}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega :\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(Z(\omega) - Y(\omega))| = 0\}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega :\ \varphi_n(Z(\omega)) = \varphi_n(Y(\omega))\}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (G_1^{(n)} \cup G_2^{(n)})^c\Big) = 1,
\end{aligned}$$

da der Schnitt abzählbar vieler Mengen mit Maß 1 wieder volles Maß besitzt. Kommen wir jetzt zum Nachweis der Existenzaussage und betrachten zunächst einfache Funktionen. Sei also

$$X(\omega) := \sum_{i=1}^{N} e_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega) \qquad (\omega \in \Omega),$$

wobei $e_1, \dots, e_N \in E$ sowie $A_1, \dots, A_N \in \mathscr{A}$, paarweise disjunkt, für ein $N \in \mathbb{N}$. Wir definieren:

$$Z(\omega) := \sum_{i=1}^{N} e_i \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}|\mathscr{G})(\omega) \qquad (\omega \in \Omega).$$

Die $\mathscr{G}$-Messbarkeit der (reellwertigen) Zufallsvariablen $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}|\mathscr{G})$, für $i = 1, \dots, N$, implizieren die $\mathscr{G}$-Messbarkeit von Z. Wir fixieren $G \in \mathscr{G}$ beliebig und erhalten unter Anwendung des Satzes B.21:

$$\begin{aligned}
\int_G X \,\mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_G \Big(\sum_{i=1}^{N} e_i \mathbb{1}_{A_i}\Big) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{N} e_i \mathbb{1}_{A_i\cap G}\Big) \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \sum_{i=1}^{N} e_i \left(\int_\Omega \mathbb{1}_{A_i\cap G} \,\mathrm{d}\mathbb{P}\right) = \sum_{i=1}^{N} e_i \left(\int_\Omega \mathbb{1}_G \,\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}|\mathscr{G}) \,\mathrm{d}\mathbb{P}\right) \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{N} e_i \mathbb{1}_G \,\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}|\mathscr{G})\right) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_G \left(\sum_{i=1}^{N} e_i \,\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}|\mathscr{G})\right) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_G Z \,\mathrm{d}\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Demnach ist $Z = \mathbb{E}(X|\mathscr{G})$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
\big\|\mathbb{E}(X|\mathscr{G})\big\|_E = \|Z\|_E &= \Big\|\sum_{i=1}^{N} e_i \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}|\mathscr{G})\Big\|_E \\
&\le \sum_{i=1}^{N} \big\|e_i \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}|\mathscr{G})\big\|_E = \sum_{i=1}^{N} \|e_i\|_E \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}|\mathscr{G}) \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{N} \|e_i\|_E \cdot \mathbb{1}_{A_i}\Big|\mathscr{G}\Big) = \mathbb{E}(\|X\|_E|\mathscr{G}) \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.}).
\end{aligned}$$

Also folgt für einfache und messbare Zufallsvariablen auch die Gültigkeit von (1.28). Da für jede beliebige relle, integrierbare Zufallsvariable u stets

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(u|\mathscr{G})\right] = \mathbb{E}\left[u\right]$$

gilt (sog. *tower-property*), folgt zudem:

$$\mathbb{E}(\|Z\|_E) \leq \mathbb{E}(\|X\|_E). \tag{1.30}$$

Wir wählen nun eine beliebige integrierbare Zufallsvariable $X \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; E)$. Dann existiert eine Folge einfacher Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{E}$, so dass:

$$X = \lim_{n\to\infty} X_n \qquad \text{und} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\|_E \leq \|X\|_E \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.})$$

(siehe Anhang B.17). Aufgrund des Lebesgue'schen Satzes über dominierte Konvergenz folgt mit Hilfe der Dreiecksungeleichung für Bochner-Integrale:

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \int_\Omega X_n - X \,\mathrm{d}\mathbb{P} \Big\|_E \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|X_n - X\|_E \,\mathrm{d}\mathbb{P} = 0. \tag{1.31}$$

Wir setzen:

$$Z_n := \mathbb{E}(X_n|\mathscr{G}) \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

(Die Existenz dieser $\mathscr{G}$-messbaren, integrierbaren Zufallsvariablen haben wir vorhin bewiesen.) Dann gilt, wegen (1.30):

$$\mathbb{E}(\|Z_n - Z_m\|_E) \leq \mathbb{E}(\|X_n - X_m\|_E) \qquad (n, m \in \mathbb{N})\,,$$

und aufgrund der Vollständigkeit des Raumes $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; E)$ folgt die Existenz einer Bochner-integrierbaren Zufallsvariable Z, so dass:

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \int_\Omega Z_n - Z \,\mathrm{d}\mathbb{P} \Big\|_E \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|Z_n - Z\|_E \,\mathrm{d}\mathbb{P} = 0. \tag{1.32}$$

Für $G \in \mathscr{G}$ beliebig ergibt sich dann mit Hilfe von (1.31):

$$\int_G X \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_G X_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_G Z_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_G Z \,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Die Tatsache, dass die Z_n, $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{G}$-messbar sind, erlaubt uns die Zufallsvariable Z ebenfalls $\mathscr{G}$-messbar zu wählen (siehe auch Korollar B.15). Insgesamt folgt $Z = \mathbb{E}(X|\mathscr{G})$. Ferner erhalten wir mit Hilfe von (1.30):

$$\big\|\mathbb{E}(X|\mathscr{G})\big\|_E = \big\|Z\big\|_E = \big(L^1(\mathbb{R})-\big) \lim_{n\to\infty} \|Z_n\|_E \leq \big(L^1(\mathbb{R})-\big) \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\|X_n\|_E|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(\|X\|_E|\mathscr{G}),$$

wobei wir die Monotoie der $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; \mathbb{R})$-Grenzwertbildung sowie den Lebesgue'schen Satz über bedingte dominierte Konvergenz (vgl. z.B. [2, (15.14); S. 121]) benutzt haben. Die Behauptung folgt. □

Im späteren Verlauf dieser Arbeit, werden wir noch das folgende Resultat benötigen, welches einen Zusammenhang zwischen der bedingten Erwartung und der Unabhängigkeit – zwei wichtige Konzepte der Wahrscheinlichkeitstheorie – herstellt.

Lemma 1.47: *Es seien $(S_1, \mathscr{S}_1)$ und $(S_2, \mathscr{S}_2)$ zwei Messräume sowie $\Psi \colon S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ eine $\mathscr{S}_1 \otimes \mathscr{S}_1 / \mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbare, beschränkte Funktion. Ferner sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, eine Unter-$\sigma$-Algebra $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{A}$, sowie zwei Zufallsvariablen gegeben: $X_1 \colon \Omega \to S_1$ sei $\mathscr{G} / \mathscr{S}_1$-messbar, während $X_2 \colon \Omega \to S_2$ $\mathscr{A} / \mathscr{S}_2$-messbar und von $\mathscr{G}$ unabhängig sei. Dann gilt:*

$$\mathbb{E}(\Psi(X_1, X_2) | \mathscr{G}) = \tilde{\Psi}(X_1) \qquad (\mathbb{P}\text{-}f.s),$$

wobei

$$\tilde{\Psi}(x_1) := \int_\Omega \Psi(x_1, X_2(\tilde{\omega}))\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\tilde{\omega}) \qquad (x_1 \in S_1).$$

Das bedeutet, dass die Abbildung:

$$\Omega \ni \omega \mapsto \int_\Omega \Psi(X_1(\omega), X_2(\tilde{\omega}))\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\tilde{\omega}) \in \mathbb{R}$$

eine $\mathscr{G} / \mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbare Zufallsvariable ist und, dass für alle $G \in \mathscr{G}$ gilt:

$$\int_G \Psi(X_1(\omega), X_2(\omega))\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_G \left(\int_\Omega \Psi(X_1(\omega), X_2(\tilde{\omega}))\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\tilde{\omega}) \right) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

Beweis: (Skizze) Die Aussage lässt sich durch sog. „Hochhangeln“ bzgl. der messbaren Abbildung Ψ beweisen. Diese habe zunächst die folgende Gestalt:

$$\Psi = \mathbb{1}_{A_1 \times A_2}, \text{ mit } A_1 \in \mathscr{S}_1 \text{ und } A_2 \in \mathscr{S}_2.$$

Dann gilt für $\mathbb{P}$-f.s. alle $\omega \in \Omega$:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_1 \times A_2}(X_1, X_2) | \mathscr{G})(\omega) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_1}(X_1) \cdot \mathbb{1}_{A_2}(X_2) | \mathscr{G})(\omega)$$

und da X_1 $\mathscr{G}$-messbar ist:

$$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_2}(X_2) | \mathscr{G})(\omega) \cdot \mathbb{1}_{A_1}(X_1(\omega))$$

sowie wegen der Unabhängigkeit von X_2 und $\mathscr{G}$:

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_2}(X_2)) \cdot \mathbb{1}_{A_1}(X_1(\omega)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_2}(X_2) \cdot \mathbb{1}_{A_1}(X_1(\omega))) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_1 \times A_2}(X_1(\omega), X_2)). \end{aligned}$$

In einem zweiten Schritt lässt sich zeigen, dass das Mengensystem:

$$\mathscr{D} := \left\{ D \subseteq \mathscr{S}_1 \otimes \mathscr{S}_1 :\ \mathbb{E}(\mathbb{1}_D(X_1, X_2) | \mathscr{G})(\omega) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_D(X_1(\omega), X_2))\ (\mathbb{P}\text{-f.s.}) \right\}$$

ein Dynkin-System ist, welches wegen dem oben gezeigten das $\cap$-stabile Mengensystem $\mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2$ enthält. Dies impliziert:

$$\mathscr{S}_1 \otimes \mathscr{S}_2 = \sigma(\mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2) = \delta(\mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2) \subseteq \mathscr{D} \subseteq \mathscr{S}_1 \otimes \mathscr{S}_2$$

und somit folgt die Behauptung für alle Funktionen Ψ von der Form:

$$\Psi = \mathbb{1}_S, \qquad S \in \mathscr{S}_1 \otimes \mathscr{S}_2.$$

Den Übergang zu allen beschränkten $\mathscr{S}_1 \otimes \mathscr{S}_2$-messbaren Funktionen erhält man durch das sog. Somberero-Lemma (vgl. z.B. [20, Theorem 8.8; S. 61]), dem Satz von Beppo Levi (vgl. z.B. [20, Theorem 9.6; S. 70]) sowie dem Lebesgue'schen Satz über dominierte Konvergenz (vgl. z.B. [2, Satz 12.6; S. 95]), welche sich auch auf bedingte Erwartungen übertragen lassen (vgl. z.B. [2, S. 121]). □

Bemerkung 1.48: Anstelle der Beschränktheit von Ψ im obigen Satz, können wir die Positivität von Ψ und, dass $\Psi \circ (X_1, X_2) \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; \mathbb{R})$ gilt, fordern. Wir hören dann im Beweis einfach eher auf (– nach der Anwendung des Sombrero-Lemmas und der bedingten Version des Satzes von Beppo Levi).

1.3.3 Banachraum-wertige Martingale

Im Folgenden sei $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ stets eine normale Filtration in $\mathscr{A}$. Mit $T > 0$ bezeichnen wir eine beliebige positive reelle Zahl. Wir haben nun das Rüstzeug, Banachraum-wertige Martingale zu definieren.

Definition 1.49 (Martingal)**:** Ein stochastischer Prozess $M\colon\ [0,\infty) \times (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) \to (E, \mathscr{B}(E))$ heisst $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$*-Martingal*, wenn die folgenden drei Bedingungen simultan erfüllt sind:

[M1] $M(t) \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; E)$ für alle $t \in [0,\infty)$;

[M2] $M(t)$ ist $\mathscr{F}_t$-messbar für alle $t \in [0,\infty)$;

[M3] Für beliebige $s, t \in [0,\infty)$, mit $s \leq t$, gilt:

$$\mathbb{E}(M(t)\,|\mathscr{F}_s) = M(s) \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.})\,.$$

Bemerkung 1.50: Wir werden im weiteren Verlauf der Arbeit unter einem $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal $(M_t)_{t\geq 0}$ gleichzeitig den Äquivalenzklassenfamilie $(M_t)_{t\geq 0} \subseteq L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; E)$ verstehen. Dies können wir aufgrund folgender Überlegungen machen: Es sei $(\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$ eine Modifikation von M. Da wir von einer normalen Filtration ausgehen, ist $\tilde{M}$ an derselben Filtration adaptiert, erfüllt damit [M2]. Natürlich ist $\tilde{M}_t$ für jedes $t \geq 0$ integrierbar und für jede beliebige Wahl von $0 \geq s \geq t < \infty$ gilt:

$$\mathbb{E}(\tilde{M}(t)\,|\mathscr{F}_s) = \tilde{M}(s) \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.})\,,$$

also sind [M1] und [M3] ebenfalls efüllt. Damit ist jede Modifikation eines Martingals wieder ein Martingal – bzgl. der gleichen Filtration (sofern diese normal ist!).

Konvention 1.51: Für jede beliebige vollständig geordnete Indexmenge I, lassen sich Martingale auf analoge Weise mit I anstatt $[0,\infty)$ definieren. In dieser Arbeit betrachten wir allerdings nur Martingale mit Zeitmenge $[0,\infty)$ oder $[0,T]$, für eine positive Zahl $T > 0$, sowie abzählbare Teilmengen davon.

Der folgende Satz beschreibt den Zusammenhang zwischen Banachraum- und reellwertigen Martingalen.

Satz 1.52: *Es sei* $M\colon\ [0,\infty) \times (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) \to (E, \mathscr{B}(E))$ *ein stochastischer Prozess,* $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ *eine Filtration in* $\mathscr{A}$ *und* M *erfülle* [M1] *aus obiger Definition 1.49.*
Genau dann ist M *ein* $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$*-Martingal, wenn* $\{\varphi(M(t)) : t \in [0,\infty)\}$ *für alle* $\varphi \in E^*$ *ein reellwertiges* $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$*-Martingal ist.*

Beweis: Wir nehmen zunächst an, M sei ein $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal und fixieren ein belieibiges Element $\varphi \in E^*$ sowie $s, t \in [0,\infty)$, mit $s \leq t$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}(\,|\varphi(M(t))|\,) = \int_\Omega |\varphi(M(t,\omega))|\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \leq \int_\Omega \|\varphi\|_{L(E,\mathbb{R})}\, \|M(t,\omega)\|_E\, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) < \infty,$$

da $M(t) \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; E)$. Ferner ist $\varphi \circ (M(t)) \in \mathscr{F}_t$, da φ stetig ist und $M(t) \in \mathscr{F}_t$ gilt. Wir fixieren nun $F \in \mathscr{F}_s$. Da M ein Martingal ist folgt aufgrund der Invarianz des Bochner-Integrals unter linearen Abbildungen (siehe Anhang B.21):

$$\int_F \varphi \circ M(t)\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \varphi\left(\int_F M(t)\, \mathrm{d}\mathbb{P}\right) = \varphi\left(\int_F M(s)\, \mathrm{d}\mathbb{P}\right) = \int_F \varphi \circ M(s)\, \mathrm{d}\mathbb{P},$$

also:

$$\mathbb{E}(\varphi(M(t))\,|\mathscr{F}_s) = \varphi(M(s)) \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.})$$

und damit ist $\{\varphi(M(t)) \,:\, t \in [0,\infty)\}$ ein Martingal. Umgekehrt, sei $(\varphi \circ M(t))_{t\geq 0}$ für jedes $\varphi \in E^*$ ein $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal und es gelte $\mathbb{E}(\|M(t)\|_E) < \infty$ für alle $t \in [0,\infty)$. Für jedes $t \geq 0$ ist dann aufgrund von Korollar 1.27 die $\mathscr{F}_t$-Messbarkeit von $M(t)$ garantiert. Fixieren wir $0 \leq s \leq t < \infty$ sowie $F \in \mathscr{F}_s$, so erhalten wir, dass für alle $\varphi \in E^*$:

$$\varphi\left(\int_F M(t)\, \mathrm{d}\mathbb{P}\right) = \int_F \varphi \circ M(t)\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F \varphi \circ M(s)\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \varphi\left(\int_F M(s)\, \mathrm{d}\mathbb{P}\right),$$

woraus mit dem Satz von Hahn-Banach (vgl. [21, Theorem III.1.5 sowie Korollar III.1.6; S. 97])

$$\int_F M(t)\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F M(s)\, \mathrm{d}\mathbb{P} \text{ für alle } F \in \mathscr{F}_s,$$

folgt, also:

$$\mathbb{E}(M(t)|\mathscr{F}_s) = M(s) \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.}),$$

und das Behauptete folgt. □

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir auf die folgende vereinfachte Variante des sog. *optional stopping* Theorems zurückgreifen.

Satz 1.53: *Es sei* $(M_t)_{t\in[0,T]}$ *ein* E*-wertiges* $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$*-Martingal auf* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *mit Zeitmenge* $[0,T]$*,* $T > 0$*. Dann gilt für jedes* $\tau \in [0,T]$*:*

i.) $(M_{t\wedge\tau})_{t\in[0,T]}$ *ist ein* $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$*-Martingal.*

ii.) Für beliebige $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T$*,* $k \in \mathbb{N}$*, ist* $(M_{t_m\wedge\tau})_{m=0,1,\dots,k}$ *ein* $(\mathscr{F}_{t_m})_{m=0,1,\dots,k}$*-Martingal.*

Beweis: Sei $\tau \in [0,T]$. Fixieren wir $t \in [0,T]$, so ist $M_{t\wedge\tau}$ offensichtlich $\mathscr{F}_t$-messbar und es gilt

$$\|M_{t\wedge\tau}\|_E \leq \|M_t\|_E + \|M_\tau\|_E,$$

woraus $M_{t\wedge\tau} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; E)$ folgt. Wir wählen nun $0 \leq s \leq t \leq T$ sowie $F \in \mathscr{F}_s$ und unterscheiden die drei möglichen Fälle:
Fall 1: $\tau \leq s \leq t$. Dann ist $\tau \wedge t = \tau \wedge s = \tau$ und es gilt:

$$\int_F M_{t\wedge\tau}\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F M_\tau\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F M_{s\wedge\tau}\, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Fall 2: $s \leq \tau \leq t$. Dann ist $\mathbb{E}(M_\tau|\mathscr{F}_s) = M_s$ ($\mathbb{P}$-f.s.) und damit:

$$\int_F M_{t\wedge\tau}\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F M_\tau\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F M_s\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F M_{s\wedge\tau}\, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Fall 3: $s \leq t \leq \tau$. Dann gilt, wegen $\mathbb{E}(M_t|\mathscr{F}_s) = M_s$ ($\mathbb{P}$-f.s.):

$$\int_F M_{t\wedge\tau}\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F M_t\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F M_s\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F M_{s\wedge\tau}\,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Da $F \in \mathscr{F}_s$ beliebig gewählt wurde folgt insgesamt $\mathbb{E}(M_{t\wedge\tau}|\mathscr{F}_s) = M_{s\wedge\tau}$ ($\mathbb{P}$-f.s.) und damit die Behauptung. Die Aussage *ii.)* lässt sich analog zeigen. □

Für unsere Zwecke werden vor allem solche Martingale eine besondere Rolle spielen, die zu jedem Zeitpunkt quadratisch integrierbar sind. Wir definieren (etwas allgemeiner) was wir darunter verstehen wollen.

Definition 1.54: *i.)* Es sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal, $p \in [1,\infty)$. M heisst $L^p(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P};E)$ - *Martingal* (kurz: *L^p-Martingal*), falls gilt:

[MP] $M(t) \in L^p(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P};E)$ für alle $t \in [0,\infty)$.

Ist $p = 2$ so sprechen wir auch von *quadratisch integrierbaren Martingalen*.

ii.) Ein Martingal $(M_t)_{t\geq 0}$ heisst *stetig*, falls es $\mathbb{P}$-f.s. stetige Pfade besitzt, d.h., wenn es eine $\mathbb{P}$-Nullmenge $N \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(N) = 0$, gibt, so dass $t \mapsto M(t,\omega)$ für alle $\omega \in \Omega\backslash N$ stetig ist.

Notation: Wir bezeichnen mit

$$\mathscr{M}_T^2\left(\Omega,\mathscr{A},(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]},\mathbb{P};E\right)$$

die Menge aller E-wertigen, quadratisch integrierbaren, stetigen $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-Martingale auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ mit Zeitmenge $[0,T]$, $T > 0$. Ist der Kontext klar, so schreiben wir auch kurz $\mathscr{M}_T^2$ oder $\mathscr{M}_T^2(E)$ oder $\mathscr{M}_T^2\left((\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}\,;E\right)$.

Der folgende Zusammenhang wird uns behilflich sein, wenn wir wichtige Martingalungleichungen, die aus der reellen Theorie bekannt sind, übertragen wollen.

Satz 1.55: *Es sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein $L^p(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P};E)$-Martingal bzgl. der Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, $p \in [1,\infty)$. Dann ist $(\|M_t\|_E^p)_{t\geq 0}$ ein reellwertiges $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-Submartingal.*

Beweis: Wir bemerken zunächst, dass die Betragsfunktion konvex ist und, dass damit der reellwertige stochastische Prozess $(\,|\varphi\circ M_t|\,)_{t\geq 0}$ für jedes $\varphi \in E^*$ ein Submartingal ist (siehe auch Satz 1.52). Weiter betrachten wir die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E^*$ aus Satz 1.24, d.h. die Norm eines jeden Elementes $x \in E$ lässt sich schreiben als:

$$\|x\|_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)|\,.$$

Fixieren wir nun $0 \leq s \leq t < \infty$ so folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}\Big(\|M_t\|_E\Big|\mathscr{F}_s\Big) = \mathbb{E}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}}|\varphi_n(M_t)|\,\Big|\mathscr{F}_s\Big) \geq \mathbb{E}\Big(\,|\varphi_n(M_t)|\,\Big|\mathscr{F}_s\Big) \geq |\varphi_n(M_t)| \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.})\,,$$

denn für zwei beliebige rellwertige integrierbare Zufallsvariablen u und v mit $\mathbb{P}(\{u \leq v\}) = 1$ und eine beliebige Unter-σ-Algebra $\mathscr{G}$ von $\mathscr{A}$ gilt:

$$\mathbb{E}(u|\mathscr{G}) \leq \mathbb{E}(v|\mathscr{G})$$

(sog. *Monotonie* der bedingten Erwartung). Durch Supremumsbildung folgt:

$$\mathbb{E}\Big(\|M_t\|_E \Big| \mathscr{F}_s\Big) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(M_t)| = \|M_s\|_E \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.}).$$

Es ist zudem offensichtlich, dass für jedes $t \geq 0$ die Abbildung $\|M_t\|_E$ als Verknüpfung messbarer Abbildungen $\mathscr{F}_t$-messbar ist, woraus insgesamt die Behauptung für den Fall $p = 1$ insgesamt folgt. Für $p \in (1, \infty)$ wenden wir die sog. bedingte Jensen-Ungleichung (vgl. [2, Satz 15.3, S. 121]) an und erhalten unter Benutzung des Falles $p = 1$:

$$\mathbb{E}\Big(\|M_t\|_E^p \Big| \mathscr{F}_s\Big) \geq \Big|\mathbb{E}\Big(\|M_t\|_E \Big| \mathscr{F}_s\Big)\Big|^p \geq \big|\|M_s\|_E\big|^p = \|M_s\|_E^p \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.}).$$

Die Messbarkeitsaussage bleibt natürlich erhalten und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 1.56 (vgl. [2], S. 411 f.)**:** Angenommen wir haben einen E-wertigen Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ mit Zeitmenge $[0, T]$, $T > 0$. Wir wollen dann z.B. die numerische Abbildung

$$Y := \sup_{t\in[0,T]} \|X_t\|_E$$

betrachten. Da wir aber das Supermum über eine überabzählbare Menge bilden, ist Y i.Allg. keine Zufallsvariable. Sind die Pfade unseres Prozesses überall rechtsstetig, d.h. für alle $\omega \in \Omega$, so ist

$$Y = \sup_{t\in(\mathbb{Q}\cap[0,T])\cup\{T\}} \|X_t\|_E$$

und daraus ergibt sich die Messbarkeit von Y. Hat unser Prozess allerdings nur $\mathbb{P}$-f.s. rechtsstetige Pfade, so ist dies nicht garantiert. Allerdings existiert dann eine $\mathbb{P}$-Nullmenge $N \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(N) = 0$, und die Abbildung

$$Y^* := \sup_{t\in[0,T]} \|X_t \cdot \mathbb{1}_{\Omega\setminus N}\|_E$$

ist eine Zufallsvariable. Wenn wir von nun an für solche Prozesse $\sup_{t\in[0,T]} \|X_t\|_E$ schreiben, so meinen wir stets die Zufallsvariable Y^*.

Mit Hilfe des obigen Satzes, können wir die Doob'sche Maximalungleichung (vgl. z.B. [12, Theorem 3.8(iv); S. 14]) direkt auf Banachraum-wertige Martingale übertragen.

Satz 1.57 (Doob'sche Maximalungleichung)**:** *Es sei $p \in (1, \infty)$. Ist $(M_t)_{t\in[0,T]}$ ein $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-Martingal mit $\mathbb{P}$-f.s. rechtsseitig stetigen Pfaden, so gilt:*

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} \|M(t)\|_E^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[\|M(t)\|_E^p] = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[\|M(T)\|_E^p].$$

Beweis: Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem vorherigen Satz und der Doob'schen Maximalungleichung für reellwertige, rechtsseitig stetige Submartingale. □

Der Raum $\mathscr{M}_T^2(E)$ wird bei der Konstruktion des stochastischen Integrals eine wichtige Rolle spielen. Insbesonderes ist das folgende Resultat von zentraler Bedeutung.

Satz 1.58: *i.) Der Raum $\mathscr{M}_T^2(E)$ ist ein Untervektorraum von $\mathscr{C}\big([0, T], L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; E)\big)$, dem Raum der $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; E)$-wertigen, stetigen Abbildungen auf $[0, T]$.*

ii.) Die Abbildung

$$(1.33)\qquad \begin{array}{rcl} \|.\|_{\mathscr{M}_T^2}: \ \mathscr{M}_T^2(E) & \to & [0,\infty) \\ M & \mapsto & \|u\|_{\mathscr{M}_T^2} := \sup_{t\in[0,T]} \left(\mathbb{E}\left[\|M(t)\|_E^2\right]\right)^{1/2} = \left(\mathbb{E}\left[\|M(T)\|_E^2\right]\right)^{1/2} \end{array}$$

ist ein Norm auf $\mathscr{M}_T^2(E)$.

iii.) $\left(\mathscr{M}_T^2(E), \|.\|_{\mathscr{M}_T^2(E)}\right)$ *ist ein Banachraum.*

Beweis: ad i.): Es sei $M \in \mathscr{M}_T^2\left(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}; E\right)$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass die Abbildung

$$[0,T] \ni t \mapsto M(t) \in L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; E)$$

stetig ist. Dazu fixieren wir $t \in [0,T]$ sowie eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,T]$, welche gegen t konvergiert und zeigen, dass

$$(1.34)\qquad \lim_{n\to\infty} \|M(t_n) - M(t)\|_{L^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{E}\left[\|M(t_n) - M(t)\|_E^2\right]\right)^{1/2} = 0.$$

Da M ein stetiges Martingal ist, gilt:

$$(1.35)\qquad \lim_{n\to\infty} \|M(t_n)\|_E^2 = \|M(t)\|_E^2 \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.}).$$

Ferner gilt wegen Satz 1.55:

$$\|M(t_n)\|_E^2 \le \mathbb{E}\left(\|M(T)\|_E^2 \middle| \mathscr{F}_{t_n}\right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.}).$$

Da auf der rechten Seite dieser Ungleichung eine Familie gleichgradig integrierbarer Zufallsvariablen steht, ist $(\|M(t_n)\|_E^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gleichgradig integrierbar und aus dem Satz von Vitali folgt unter Zuhilfenahme von (1.35):

$$(1.36)\qquad \lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{E}\left[\|M(t_n)\|_E^2\right]\right)^{1/2} = \left(\mathbb{E}\left[\|M(t)\|_E^2\right]\right)^{1/2}$$

(Zu dieser Argumentation vgl. [20, Chapter 16; S. 163 ff.]). Die Konvergenz der L^2-Normen in (1.36) und die $\mathbb{P}$-f.s. Konvergenz implizieren die L^2-Konvergenz, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{E}\left[\|M(t_n) - M(t))\|_E^2\right]\right)^{1/2} = 0.$$

Dieses aus dem reellen Fall bekannte Argument (vgl. z.B. [1, Satz 15.4; S. 94]) lässt sich nämlich auf Zufallsvariablen mit Werten in separablen Banachräumen übertragen. Damit hätten wir die Stetigkeit nachgewiesen. Da sowohl die Summe stetiger Martingale als auch die Multiplikation eines stetigen Martingals mit einem Skalar wieder ein stetiges Martingal ist und der überall verschwindende Prozess $M \equiv 0$ ein stetiges Martingal ist, folgt insgesamt, dass $\mathscr{M}_T^2$ ein Untervektorraum von $\mathscr{C}\left([0,T], L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; E)\right)$ ist.
ad ii.): Der Satz von Riesz-Fischer, garantiert, dass $(L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; E), \|.\|_{L^2})$ ein Banachraum ist (siehe Anhang B.14). Dann ist

$$(1.37)\qquad \begin{array}{rcl} \|.\|_{\infty,L^2}: \ \mathscr{C}\left([0,T], L^2(E)\right) & \to & [0,\infty) \\ u & \mapsto & \|u\|_{\infty,L^2} := \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{L^2} \end{array}$$

nach Satz 1.28 eine Norm. Bei der Abbildung $\|.\|_{\mathscr{M}_T^2}$ handelt es sich um die Einschränkung dieser Norm auf dem Untervektorraum $\mathscr{M}_T^2$, also um eine Norm auf diesem Raum.
ad iii.): Satz 1.28 liefert sogar die Vollständigkeit des Raumes $\mathscr{C}\left([0,T], L^2(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P};E)\right)$ bzgl. der Norm $\|.\|_{\infty,L^2}$. Wegen Teil *i.)* und *ii.)* brauchen wir nur noch zu zeigen, dass $\mathscr{M}_T^2$ bzgl. dieser Norm eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathscr{C}([0,T], L^2(E))$ ist. Wir wählen dazu eine beliebige Folge $(M^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{M}_T^2$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \|M^{(n)} - M\|_{\infty,L^2} = \lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{t\in[0,T]} \|M^{(n)}(t) - M(t)\|_{L^2} \Big) = 0$$

für ein $M \in \mathscr{C}([0,T], L^2(E))$ und zeigen, dass $M \in \mathscr{M}_T^2$. Da $(M^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, existiert eine Teilfolge $(M^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (M^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[\|M^{(n_{k+1})}(t) - M^{(n_k)}(t)\|_E^2\right] \le 2^{-3k} \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{1.38}$$

Die Tschebytschev'sche sowie die obige Doob'sche Ungleichung liefern dann für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega : \sup_{t\in[0,T]} \|M^{(n_{k+1})}(t,\omega) - M^{(n_k)}(t,\omega)\|_E \ge \frac{1}{2^k}\right\}\right) \\
&\qquad \le (2^k)^2 \cdot \mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]} \|M^{(n_{k+1})}(t) - M^{(n_k)}(t)\|_E\right)^2\right] \\
&\qquad = (2^{2k}) \cdot \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|M^{(n_{k+1})}(t) - M^{(n_k)}(t)\|_E^2\right] \\
&\qquad \le (2^{2k}) \cdot 2^2 \cdot \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[\|M^{(n_{k+1})}(t) - M^{(n_k)}(t)\|_E^2\right] \le \frac{4}{2^k},
\end{aligned}$$

und mit Hilfe des Lemmas von Borel-Cantelli, erhalten wir:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega : \sup_{t\in[0,T]} \|M^{(n_{k+1})}(t,\omega) - M^{(n_k)}(t,\omega)\|_E \le \frac{1}{2^k} \text{ für alle bis auf endlich viele } k\in\mathbb{N}\right\}\right) = 1.$$

Also ist $M(.,\omega)$ für $\mathbb{P}$-f.s. alle $\omega \in \Omega$ der gleichmäßige Grenzwert von $\left(M^{(n_k)}(.,\omega)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und damit stetig. Die Adaptiertheit folgt auch unmittelbar. Fixieren wir schließlich $0 \le s \le t < \infty$ sowie eine beliebige Menge $F \in \mathscr{F}_s$ so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_F M(t)\,\mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_F \lim_{n\to\infty} M^n(t)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_F M^n(t)\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_F M^n(s)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F \lim_{n\to\infty} M^n(s)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F M(s)\,\mathrm{d}\mathbb{P},
\end{aligned}$$

denn die $L^2(E)$-Konvergenz in jedem Zeitpunkt impliziert aufgrund der Endlichkeit des Maßes $\mathbb{P}$ die $L^1(E)$-Konvergenz und damit auch die Konvergenz der Integrale in jedem Punkt. Insgesamt folgt die Behauptung. □

Kapitel 2

Stochastische Integration

Um stochastische partielle Differentialgleichungen vom Evolutionstyp zu behandeln, fassen wir diese als (gewöhnliche) stochastische Differentialgleichungen in geeigneten Funktionenräumen auf. In Integralform sehen diese dann wie folgt aus:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t A(s, u(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t B(s, u(s))\,\mathrm{d}W(s).$$

Ein erstes Ziel dieser Arbeit ist es, die letzte Komponente – den sog. Rausch- oder Störterm – dieser Gleichung detailliert zu erklären. Es handelt sich dabei um ein nach Itô Kiyosi benanntes stochastisches Integral bzgl. einer (unendlich-dimensionalen) Brown'schen Bewegung. Was wir darunter verstehen wollen ist der Inhalt dieses Kapitels. Wird keine andere Quelle anggegeben, so stammen die Resultate aus [16, Kapitel 2] bzw. [8, Chapter 1].

2.1 Unendlich-dimensionale Wiener Prozesse

Die wohl bekanntesten $\mathbb{R}^d$-wertigen stochastischen Prozesse ($d \in \mathbb{N}$) sind die sog. Wiener Prozesse, besser bekannt als d-dimensionale Brown'sche Bewegungen. Die Zuwächse dieser Prozesse sind zentriert, unabhängig und normalverteilt, mit linear mit der Zeit wachsender Varianz. Zudem haben sie $\mathbb{P}$-f.s. im Nullpunkt startende, stetige Trajektorien. Brown'sche Bewegungen sollen bei der Entwicklung des stochastischen Integrals nun auch die Rolle des Integrators einnehmen. Allerdings benötigen wir eine Verallgemeinerung dieses Begriffes auf unendlich-dimensionale Räume. Wir beginnen damit, dass wir klären, was wir auf allgemeinen Hilberträumen unter einer Normalverteilung bzw. unter einem Gauß'schen Maß verstehen wollen.
Im Folgenden sei $(U, \langle ., . \rangle_U)$ ein separabler Hilbertraum. Mit $\|.\|_U := \langle ., . \rangle_U^{1/2}$ bezeichnen wir die von dem Skalarprodukt induzierte Norm. Wird aus dem Kontext deutlich um welchen Skalarprodukt es sich handelt, so schreiben wir auch $\langle ., . \rangle$ anstatt $\langle ., . \rangle_U$ sowie $\|.\|$ anstatt $\|.\|_U$.

2.1.1 Gauß'sche Maße in allgemeinen separablen Hilberträumen

Bevor wir uns der Erweiterung Gauß'scher Maße auf $(U, \mathscr{B}(U))$ widmen, erinnern wir daran, was wir auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ darunter verstehen.

Definition 2.1 (Gauß'sches Maß; Normalverteilung (reell))**:** Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ heisst *Gauß'sch* oder *Normalverteilung* mit Parametern m und σ^2, falls es ein $m \in \mathbb{R}$ sowie ein $\sigma \geq 0$ gibt, so dass

$$\mu = \nu_{m,\sigma^2} = \begin{cases} g_{m,\sigma^2}\,\lambda^1 & \text{, falls } \sigma > 0 \\ \delta_m & \text{, falls } \sigma = 0 \end{cases}$$

gilt. Dabei bezeichnet g_{m,σ^2} die Lebesgue-Dichte:

$$g_{m,\sigma^2}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

und δ_m das Dirac-Maß in m:

$$\delta_m(B) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } m \in B \\ 0 & \text{, falls } m \notin B \end{cases}, \qquad B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}). \tag{2.2}$$

Eine reelle Zufallsvariable $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heisst *normalverteilt* oder *Gauß'sch*, falls das Bidlmaß von $\mathbb{P}$ unter X, $X(\mathbb{P})$, Gauß'sch ist.
Notation: Wir schreiben gelegentlich $\nu(m, \sigma^2)$ anstatt ν_{m,σ^2} und bezeichnen im Folgenden mit $\mathscr{N}_1$ die Menge aller Normalverteilungen auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$,

$$\mathscr{N}_1 := \{\, \nu_{m,\sigma^2} : m \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0 \,\}.$$

Die Bedeutung der beiden Parameter m und σ^2 wird aus dem folgenden Satz ersichtlich.

Satz 2.2: *Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine normalverteilte Zufallsvariable, d.h. es existieren $m \in \mathbb{R}$ sowie $\sigma \geq 0$, so dass $X(\mathbb{P}) = \nu_{m,\sigma^2} \in \mathscr{N}_1$. Dann ist $X \in L^p(\mathbb{P})$ für alle $p \in [1, \infty)$ und es gilt:*

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x\, \nu_{m,\sigma^2}(\mathrm{d}x) = m$$

sowie

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_\mathbb{R} (x-m)^2\, \nu_{m,\sigma^2}(\mathrm{d}x) = \sigma^2.$$

Für die Fourier-Transformierte gilt:

$$\widehat{\mathbb{P}_X}(\xi) = \hat{\nu}_{m,\sigma^2}(\xi) = \int_\mathbb{R} e^{i\xi x} \nu_{m,\sigma^2}(\mathrm{d}x) = e^{im\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2}.$$

Kommen wir nun zurück zum allgemeinen Fall und betrachten den separablen Hilbertraum $(U, \langle .,. \rangle_U)$. Eine Möglichkeit Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathscr{B}(U)$ zu definieren, wäre, indem wir für jedes duale Element $u^* \in U^*$ angeben, was für das Bildmaß $u^*(\mu) = \mu \circ (u^*)^{-1}$ gelten soll. Dies wird durch folgenden Satz gerechtfertigt.

Satz 2.3: *Seien μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Messraum $(U, \mathscr{B}(U))$. Falls $u^*(\mu) = u^*(\nu)$ für alle $u^* \in U^*$ gilt, so folgt: $\mu = \nu$.*

Bemerkung 2.4: *i.)* Für den Beweis dieses Satzes werden wir auf die *Fourier-Transformation* von Wahrscheinlichkeitsmaßen zurückgreifen. Im Allgemeinen auf endlichdimensionalen (Hilbert-)Räumen definiert, lässt sich diese auf natürliche Weise auf unendlichdimen-sionale Hilberträume $(U, \langle .,. \rangle_U)$ erweitern: Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf dem Messraum $(U, \mathscr{B}(U))$ heisst die Funktion

$$\begin{array}{rccl} \hat{\mu}\colon & U & \to & \mathbb{C} \\ & \xi & \mapsto & \hat{\mu}(\xi) := \int_U e^{i\langle \xi, x\rangle_U} \mu(\mathrm{d}x) \end{array}$$

Fourier-Transformation des Maßes μ. Ist der Hilbertraum U separabel, so können wir die Eindeutigkeit der Fourier-Transformation auch im Unendlichdimensionalen nachweisen (siehe dazu Anhang A). Dies ist wesentlich, da wir die Fourier-Transformation zur (eindeutigen) Charakterisierung unseres Maßes wählen wollen.

ii.) Nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz, wissen wir, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \Phi\colon & U & \to & U^* \\ & u & \mapsto & \langle u, . \rangle \end{array}$$

bijektiv, linear und isometrisch ist. D.h. zu jedem $u^* \in U^*$ existiert genau ein $u \in U$, so dass $u^*(x) = \langle u, x\rangle_U$, für alle $x \in U$, und es gilt $\|u\|_U = \|u^*\|_{U^*}$.

Notation: Für jedes $u^* \in U^*$ schreiben wir $u \in U$ für dasjenige Element, für das gilt: $\Phi(u) = u^*$.

Beweis des Satzes 2.3: Es gelte also $u^*(\mu) = u^*(\nu)$ für alle $u^* \in U^*$. Daraus folgt mit Hilfe des Transformationssatzes:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(u) &= \int_U e^{i\langle u,x\rangle} \mu(\mathrm{d}x) = \int_U e^{it}\, u^*(\mu)(\mathrm{d}t) \\ &= \int_U e^{it}\, u^*(\nu)(\mathrm{d}t) = \int_U e^{i\langle u,x\rangle} \nu(\mathrm{d}x) = \hat{\nu}(u), \end{aligned}$$

für alle $u \in U$. Die Eindeutigkeit der Fourier-Transformation liefert dann: $\mu = \nu$. □

Nach diesen Vorüberlegungen, definieren wir Gauß'sche Maße wie folgt:

Definition 2.5 (Gauß'sches Maß; Normalverteilung)**:** Ein Maß μ auf dem Borel'schen Messraum $(U, \mathscr{B}(U))$ heisst *Gauß'sch*, wenn

$$\mu \circ (u^*)^{-1} = \mu \circ \langle u, . \rangle_U^{-1} \in \mathscr{N}_1 \text{ für alle } u^* \in U^*.$$

Eine Zufallsvariable $X\colon \Omega \to U$ heisst *Gauß'sch* oder *normalverteilt*, falls ihre Verteilung, $X(\mathbb{P})$, Gauß'sch ist.

Wir wollen als nächstes Gauß'sche Maße über ihre Fourier-Transformation charakterisieren.

Satz 2.6: *Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(U, \mathscr{B}(U))$. Falls es ein $m_\mu \in U$ sowie einen positiven, symmetrischen Operator $\mathrm{Q}_\mu \in L^+(U)$ gibt, so dass*

$$\hat{\mu}(u) = e^{i\langle m_\mu, u\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathrm{Q}_\mu u, u\rangle} \qquad (u \in U) \tag{2.3}$$

gilt, so ist μ ein Gauß'sches Maß. Es gilt:

$$\mu \circ \langle u, . \rangle^{-1} = \nu(\langle m_\mu, u\rangle, \langle \mathrm{Q}_\mu u, u\rangle) \qquad (u \in U)\,.$$

Beweis: Wir fixieren $v^* \in U^*$ und betrachten die Fourier-Transformation des Wahrscheinlichkeitsmaßes $v^*(\mu)$:

$$\widehat{v^*(\mu)}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x}\, v^*(\mu)(\mathrm{d}x) = \int_U e^{i\lambda v^*(\xi)}\, \mu(\mathrm{d}\xi) = \int_U e^{i\langle \lambda v, \xi\rangle}\, \mu(\mathrm{d}\xi)$$
$$= \hat{\mu}(\lambda v) = e^{i\langle m_\mu, \lambda v\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathrm{Q}_\mu \lambda v, \lambda v\rangle} = e^{i\langle m_\mu, v\rangle\lambda - \frac{1}{2}\langle \mathrm{Q}_\mu v, v\rangle \lambda^2} = \hat{\nu}_{\langle m_\mu, v\rangle, \langle \mathrm{Q}_\mu v, v\rangle}(\lambda).$$

Aus der Eindeutigkeit der Fourier-Transformation folgt die Behauptung mit Hilfe des Satzes 2.2. □

Bemerkung 2.7: Es stellt sich die Frage, welche $m \in U$ und $\mathrm{Q} \in L^+(U)$ wir in (2.3) einsetzen können, so dass es sich bei der dort angegebenen Funktion tatsächlich um die Fourier-Transformation eines Wahrscheinlichkeitsmaßes (und damit auch eines Gauß'schen Maßes) handelt. Gerne würden wir z.B. $m = 0$ und $\mathrm{Q} = \mathrm{Id}$ setzen, wobei Id die Identitätsabbildung bezeichnet. Dann würden wir, umgangssprachlich ausgedrückt, in alle Richtungen gleich stark messen. Um zu überprüfen ob das möglich ist, nehmen wir an, es existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(U, \mathscr{B}(U))$ mit

$$\hat{\mu}(u) = e^{-\frac{1}{2}\langle \mathrm{Id}\, u, u\rangle} = e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2}, \quad \text{für alle } u \in U.$$

Betrachten wir eine beliebige Orthonormalbasis $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ von U, so sind die reellwertigen Zufallsvariablen $\langle f_k, .\rangle$, $k \in \mathbb{N}$, unabhängig und nach Satz 2.6 gilt:

$$\mu \circ \langle f_k, .\rangle^{-1} = \nu_{0,1} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

(Für den Nachweis der Unabhängigkeit verweisen wir an dieser Stelle auf den später ausgeführten Beweis des Satzes 2.12.) Als endliches Maß, ist μ von oben stetig, d.h. für jede Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}$ messbarer Mengen, mit $A_{i+1} \subseteq A_i$, für $i \in \mathbb{N}$, gilt:

$$\mu\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \inf_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Für das Maß des unendlich-dimensionalen Quaders mit Kantenlänge $2r > 0$ um den Mittelpunkt Null gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\{u \in U : \sup_{k\in\mathbb{N}} |\langle f_k, u\rangle| \le r\}\Big) &= \mu\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{u \in U : |\langle f_k, u\rangle| \le r\}\Big)\\
&= \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=1}^{n} \{u \in U : |\langle f_k, u\rangle| \le r\}\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \{u \in U : |\langle f_k, u\rangle| \le r\}\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \mu\Big(\{u \in U : |\langle f_k, u\rangle| \le r\}\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \mu \circ \langle f_k, .\rangle^{-1}\Big(\{x \in \mathbb{R} : |x| \le r\}\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \underbrace{\nu_{0,1}\Big(\{x \in \mathbb{R} : |x| \le r\}\Big)}_{=:C\,\in\,(0,1)} = \lim_{n\to\infty} C^n = 0.
\end{aligned}$$

Da μ auch σ-subadditiv ist, folgt:

$$1 = \mu(U) = \mu\Big\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{u \in U : \sup_{k\in\mathbb{N}} |\langle f_k, u\rangle| \le n\}\Big\} \le \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mu\Big(\{u \in U : \sup_{k\in\mathbb{N}} |\langle f_k, u\rangle| \le n\}\Big)}_{=0} = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch und wir sehen, dass ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß nicht existieren kann.

Wir müssen nun klären ob wir zu jedem Gauß'schen Maß ein Element $m \in U$ und einen Operator $\mathrm{Q} \in L^{+}(U)$ finden, so dass sich die Fourier-Transformation wie in (2.3) schreiben lässt. Gleichzeitig interessieren wir uns dafür, welche Operatoren in Frage kommen – die obige Bemerkung zeigt nämlich, dass nicht jeder positive, symmetrische Operator zum Einsatz kommen kann.

Satz 2.8: *Es sei μ ein Gauß'sches Maß auf $(U, \mathscr{B}(U))$. Dann existiert genau ein $m_\mu \in U$ und genau ein $\mathrm{Q}_\mu \in L^{+}(U)$, so dass*

$$(2.4) \qquad \int_U \langle x, u\rangle\, \mu(\mathrm{d}x) = \langle m_\mu, u\rangle \text{ für alle } u \in U$$

sowie

$$(2.5) \qquad \int_U \langle x - m_\mu, u_1\rangle\langle x - m_\mu, u_2\rangle\, \mu(\mathrm{d}x) = \langle \mathrm{Q}_\mu\, u_1, u_2\rangle \text{ für alle } (u_1, u_2) \in U \times U$$

gilt, und damit auch:

$$(2.6) \qquad \hat{\mu}(u) = e^{i\langle m_\mu, u\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathrm{Q}_\mu u, u\rangle} \text{ für alle } u \in U.$$

Zudem gilt: $\mathrm{Q}_\mu \in \mathrm{Tr}(U)$.

Für den Beweis dieses Satzes, benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

Lemma 2.9: *Es sei ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(U, \mathscr{B}(U))$ und sei $k \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\int_U \big|\langle u, x\rangle\big|^k \nu(\mathrm{d}x) < \infty \text{ für alle } u \in U.$$

Dann existiert eine Konstante $C = C(k, \nu) > 0$, so dass für alle $u_1, \ldots, u_k \in U$ gilt:

$$\int_U \big|\langle u_1, x\rangle \cdot \ldots \cdot \langle u_k, x\rangle\big|\, \nu(\mathrm{d}x) \le C \cdot \|u_1\| \cdot \ldots \cdot \|u_k\|.$$

Insbesondere ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_k : \quad U^k &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} &\mapsto \int_U \langle u_1, x\rangle \cdot \ldots \cdot \langle u_k, x\rangle\, \nu(\mathrm{d}x) \end{aligned}$$

(bzgl. der Produkttopologie) stetig.

Beweis: Für einen Beweis dieses Lemmas, der im Wesentlichen auf dem Baire'schen Kategoriensatz (vgl. [21, S. 138 f.]) beruht, verweisen wir auf [16, Lemma 2.1.3, S. 6] sowie auf die dort angegebene Literatur. □

Beweis von Satz 2.8: Da μ Gauß'sch ist, folgt aus Satz 2.2 mit Hilfe des Transformationssatzes, dass für $k \in \mathbb{N}$ beliebig:

$$\int_U \left|\langle x, u\rangle\right|^k \mu(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} |t|^k \; u^*(\mu)(\mathrm{d}t) < \infty$$

gilt. Damit ist das Lemma 2.9 für jedes $k \in \mathbb{N}$ anwendbar. Ist $k = 1$ so bedeutet das, dass die Abbildung

$$u \mapsto \int_U \langle u, x\rangle \, \mu(\mathrm{d}x) \in \mathbb{R}$$

stetig ist. Diese Abbildung ist aber aufgrund der Linearität des Integrals auch linear, so dass der Darstellungssatz von Fréchet-Riesz die Existenz eines eindeutigen $m_\mu \in U$ liefert, so dass

$$\int_U \langle x, u\rangle \, \mu(\mathrm{d}x) = \langle m_\mu, u\rangle \text{ für alle } u \in U.$$

Setzen wir $k = 2$, so liefert dasselbe Lemma 2.9, dass zu der bilinearen Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \Lambda\colon & U \times U & \to & \mathbb{R} \\ & (u_1, u_2) & \mapsto & \int_U \langle x - m_\mu, u_1\rangle\langle x - m_\mu, u_2\rangle \, \mu(\mathrm{d}x) \end{array}$$

eine Konstante $C_1 > 0$ existiert, so dass

$$\Lambda(u_1, u_2) \leq C_1 \cdot \|u_1\| \cdot \|u_2\| \text{ für alle } (u_1, u_2) \in U \times U.$$

Aus dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz folgt dann die Existenz eines eindeutigen linearen und stetigen Operators $\mathrm{Q}_\mu \in L(U)$, so dass:

$$\Lambda(u_1, u_2) = \langle \mathrm{Q}_\mu \, u_1, u_2\rangle \qquad ((u_1, u_2) \in U \times U).$$

Die Symmetrie und Positivität von Q_μ ergeben sich sofort. Insgesamt folgt mit Hilfe des Satzes 2.2:

$$u^*(\mu) = \nu_{\langle m_\mu, u\rangle, \langle \mathrm{Q}_\mu \, u, u\rangle} \text{ für alle } u \in U,$$

und damit auch

$$\widehat{u^*(\mu)}(\xi) = e^{\,i\,\langle m_\mu, u\rangle\,\xi - \frac{1}{2}\,\langle \mathrm{Q}_\mu \, u, u\rangle\,\xi^2} \text{ für alle } u \in U \text{ und } \xi \in \mathbb{R}.$$

Hieraus ergibt sich, dass

$$\hat{\mu}(u) = \widehat{u^*(\mu)}(1) = e^{\,i\,\langle m_\mu, u\rangle - \frac{1}{2}\,\langle \mathrm{Q}_\mu \, u, u\rangle} \qquad (u \in U)\,.$$

Wir kommen nun zum Nachweis, dass $\mathrm{Q}_\mu \in \mathrm{T{\scriptsize R}}(U)$ gilt. Dafür wählen wir eine beliebige Orthonormalbasis $\{e_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ von U und beweisen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathrm{Q}_\mu \, e_k, e_k\rangle < \infty.$$

Wir nehmen zunächst an, dass $m_\mu = 0$. Dann gilt:

$$\hat{\mu}(u) = e^{-\frac{1}{2}\langle \mathrm{Q}_\mu u, u\rangle} = \int_U \cos\langle u, x\rangle \mu(\mathrm{d}x),$$

der Imaginärteil der Fourier-Transformation ist gleich Null. Fixieren wir $C > 0$, so gilt für $u \in U$:

$$\begin{aligned}
1 - e^{-\frac{1}{2}\langle \mathrm{Q}_\mu u,u\rangle} &= \int_U (1 - \cos\langle u, x\rangle)\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{\{x\in U:\, \|x\|\le C\}} (1 - \cos\langle u, x\rangle)\,\mu(\mathrm{d}x) + \int_{\{x\in U:\, \|x\|> C\}} (1 - \cos\langle u, x\rangle)\,\mu(\mathrm{d}x) \\
&\le \int_{\{x\in U:\, \|x\|\le C\}} (1 - \cos\langle u, x\rangle)\,\mu(\mathrm{d}x) + 2\cdot \mu\left(\{x \in U: \|x\| > C\}\right) \\
&\le \frac{1}{2}\cdot \int_{\{x\in U:\, \|x\|\le C\}} \langle u, x\rangle^2\,\mu(\mathrm{d}x) + 2\cdot \mu\left(\{x \in U: \|x\| > C\}\right), \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

wegen der Gültigkeit von $\cos(t) \ge -1$ und $1 - \cos(t) \le \frac{1}{2}t^2$ für $t \in \mathbb{R}$. Durch

$$\Lambda_C(u_1, u_2) := \int_{\{x\in U:\, \|x\|\le C\}} \langle u_1, x\rangle\langle u_2, x\rangle\,\mu(\mathrm{d}x) \qquad ((u_1, u_2) \in U \times U)$$

wird, wie man leicht sieht, eine symmetrische, positive Bilinearform auf U definiert. Aus der Cauchy-Schwartz'schen Ungleichung folgt, dass

$$\left|\Lambda_C(u_1, u_2)\right| \le C^2 \cdot \|u_1\| \cdot \|u_2\| \text{ für alle } (u_1, u_2) \in U \times U$$

gilt und daraus ergibt sich die Existenz eines symmetrischen, positiven Operators $\mathrm{Q}_{\mu,C} \in L^+(U)$, mit

$$\Lambda_C(u_1, u_2) = \langle \mathrm{Q}_{\mu,C}\, u_1, u_2\rangle \text{ für alle } (u_1, u_2) \in U \times U.$$

Für diesen Operator gilt, wegen dem Satz von Beppo Levi für Reihen und der Parseval'schen Identität:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\langle \mathrm{Q}_{\mu,C}\, e_k, e_k\rangle &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\{x\in U:\, \|x\|\le C\}} \langle e_k, x\rangle^2\,\mu(\mathrm{d}x) = \int_{\{x\in U:\, \|x\|\le C\}} \left(\sum_{k=1}^{\infty}\langle e_k, x\rangle^2\right)\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{\{x\in U:\, \|x\|\le C\}} \|x\|^2\,\mu(\mathrm{d}x) \le C^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{Q}_{\mu,C} \in \mathrm{Tr}(U)$ für alle $C > 0$. Da $\bigcap_{C\in(0,\infty)} \{x \in U: \|x\| > C\} = \emptyset$ gilt, folgt wegen der Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen bei der leeren Menge, dass wir ein $C_0 \in (0, \infty)$ wählen können, so dass

$$\mu(\{x \in U: \|x\| > C_0\}) \le \frac{1}{8}.$$

Wir wählen nun so ein C_0 und zeigen, dass

$$\langle \mathrm{Q}_\mu\, u, u\rangle \le 2\log 4\,\langle \mathrm{Q}_{\mu,C_0}\, u, u\rangle \text{ für alle } u \in U. \qquad (2.8)$$

Zunächst betrachten wir diejenigen Elemente $u \in U$, für die $\langle Q_{\mu,C_0}\, u, u\rangle \leq 1$ erfüllt ist. Dann erhalten wir aus der Abschätzung (2.7):

$$1 - e^{-\frac{1}{2}\langle Q_\mu\, u,u\rangle} \leq \frac{1}{2} \cdot \int_{\{x\in U:\ \|x\| \leq C_0\}} \langle u, x\rangle^2\, \mu(\mathrm{d}x) + 2 \cdot \mu\left(\{x \in U : \|x\| > C_0\}\right) \quad \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Nach Anwendung einiger Logarithmusgesetze ergibt sich:

$$\text{(2.9)} \qquad \langle Q_\mu\, u, u\rangle \leq 2 \log 4 \ \text{ für alle } u \in U \text{ mit } \langle Q_{\mu,C_0}\, u, u\rangle \leq 1.$$

Sei nun $u \in U$ beliebig, mit $\langle Q_{\mu,C_0} u, u\rangle \neq 0$. Für $\tilde{u} := u/\langle Q_{\mu,C_0} u, u\rangle^{1/2}$, gilt: $\langle Q_{\mu,C_0}\tilde{u}, \tilde{u}\rangle = 1$, und aus (2.9) folgt sofort:

$$\langle Q_\mu\, u, u\rangle \leq 2 \log 4\, \langle Q_{\mu,C_0} u, u\rangle \ \text{ für alle } u \in U \text{ mit } \langle Q_{\mu,C_0}\, u, u\rangle \neq 0.$$

Bleibt nur noch der Fall, dass $\langle Q_{\mu,C_0} u, u\rangle = 0$. Dann ist $\langle Q_{\mu,C_0} nu, nu\rangle = 0 \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen der gleichen Abschätzung (2.9) folgt:

$$\langle Q_\mu nu, nu\rangle \leq 2 \log 4 \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Damit erhalten wir:

$$0 \leq \langle Q_\mu u, u\rangle \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} 2 \log 4 = 0,$$

woraus insgesamt die Gültigkeit von (2.8) für beliebige $u \in U$ folgt. Insbesondere gilt die Abschätzung für die Basiselemente e_k, $k \in \mathbb{N}$, und damit auch:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Q_\mu\, e_k, e_k\rangle \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2 \log 4\, \langle Q_{\mu,C_0}\, e_k, e_k\rangle < \infty,$$

da $Q_{\mu,C} \in \mathrm{T{\scriptstyle R}}(U)$, für alle $C \in (0, \infty)$ gilt, also insb. für das gewählte C_0. Wir haben also $Q_\mu \in \mathrm{T{\scriptstyle R}}(U)$ für den Fall $m_\mu = 0$ gezeigt. Sei nun μ ein Gauß'sches Maß mit $m_\mu \neq 0$. Wir betrachten dazu den (offensichtlich Borel-messbaren) Verschiebungsoperator

$$\begin{array}{rccl} \tau_{m_\mu}: & U & \to & U \\ & u & \mapsto & \tau_{m_\mu}(u) := u - m_\mu. \end{array}$$

Für die Fourier-Transformation des Bildmaßes von μ unter τ_{m_μ} gilt:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu \circ \tau_{m_\mu}^{-1}}(u) &= \int_U e^{i\langle x,u\rangle}\, \mu \circ \tau_{m_\mu}^{-1}(\mathrm{d}x) = \int_U e^{i\langle y-m_\mu,u\rangle}\, \mu(\mathrm{d}y) = \int_U e^{i\langle y,u\rangle}\, \mu(\mathrm{d}y) \cdot e^{-i\langle m_\mu,u\rangle} \\ &= e^{i\langle m_\mu,u\rangle - \frac{1}{2}\langle Q_\mu\, u,u\rangle} \cdot e^{-i\langle m_\mu,u\rangle} = e^{-\frac{1}{2}\langle Q_\mu\, u,u\rangle}. \end{aligned}$$

Wegen Satz 2.6 handelt es sich also bei $\nu := \mu \circ \tau_{m_\mu}^{-1}$ um ein Gauß'sches Maß mit $m_\nu = 0$ und $Q_\nu = Q_\mu$. Wie bereits gezeigt, gilt dann $Q_\nu \in \mathrm{T{\scriptstyle R}}(U)$, also auch $Q_\mu \in \mathrm{T{\scriptstyle R}}(U)$. □

Die letzten beiden Sätze zeigen noch nicht die Existenz eines Gauß'schen Maßes. Sie erlauben aber eine bessere und handlichere Charakterisierung dieser Maße. Dies formulieren wir noch einmal kompakt als Korollar.

Korollar 2.10: *Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(U, \mathscr{B}(U))$. Genau dann ist μ Gauß'sch, wenn ein Element $m_\mu \in U$ sowie ein Spurklassenoperator $\mathrm{Q}_\mu \in \mathrm{T{\small R}}(U)$ existieren, so dass für die Fourier-Transformation gilt:*

$$\hat{\mu}(u) = e^{i\langle m_\mu, u\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathrm{Q}_\mu u, u\rangle} \qquad (u \in U)\,.$$

Die beiden Parameter $m_\mu \in U$ und $\mathrm{Q}_\mu \in \mathrm{T{\small R}}(U)$ sind eindeutig bestimmt. Wir schreiben:

$$\mu = N(m_\mu, \mathrm{Q}_\mu),$$

und sagen μ sei Gauß'sch mit Erwartungswert m_μ und Kovarianzoperator Q_μ.

Der folgende Satz folgt ebenfalls aus dem bereits Gezeigten.

Satz 2.11: *Es sei X eine U-wertige, Gauß'sche Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, es gelte also $X \sim N(m, \mathrm{Q})$ für ein $m \in U$ und ein $\mathrm{Q} \in \mathrm{T{\small R}}(U)$. Dann gilt:*

- $\int_\Omega \langle X, u\rangle \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \langle m, u\rangle$ *für alle $u \in U$,*
- $\int_\Omega \langle X - m, u\rangle\langle X - m, v\rangle \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \langle \mathrm{Q}\, u, v\rangle$ *für alle $(u, v) \in U \times U$ sowie*
- $\int_\Omega \|X - m\|_U^2 \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathrm{tr}\,(\mathrm{Q})$.

Wir kommen nun zum Beweis der Existenz Gauß'scher Maße. Der nächste Satz liefert sogar mehr, und zwar zeigt er wie sich eine Gauß'sche Zufallsvariable auf unendlich-dimensionalen separablen Hilberträumen als Summe abzählbar vieler unabhängiger, eindimensionaler Gauß'scher Zufallsvariablen darstellen lässt.

Satz 2.12: *Es sei $(U, \langle .,. \rangle_U)$ ein separabler Hilbertraum, $\mathrm{Q} \in \mathrm{T{\small R}}(U)$ sowie $m \in U$ beliebig. Ferner sei $\{e_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von U, so dass gilt:*

$$\mathrm{Q}\, e_k = \lambda_k e_k, \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N},$$

wobei $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \subseteq [0, \infty)$ eine monoton gegen null fallende Folge von Eigenwerten von Q ist (siehe auch Satz 1.21).

i.) *Es sei $(\beta_k)_{k=1}^\infty$ eine Familie unabhängiger, $\nu_{0,1}$-verteilter, reeller Zufallsvariablen. Dann ist die Reihe*

$$\sum_{k=1}^\infty \sqrt{\lambda_k}\,\beta_k\, e_k \tag{2.10}$$

f.s.- und $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; U)$-konvergent und die Zufallsvariable

$$X := \sum_{k=1}^\infty \sqrt{\lambda_k}\,\beta_k\, e_k + m$$

ist normalverteilt mit Parametern m und Q, d.h.

$$\mathbb{P} \circ X^{-1} = N(m, \mathrm{Q}).$$

ii.) Umgekehrt, sei $X\colon \Omega \to U$ eine Gauß'sche Zufallsvariable mit $\mathbb{P} \circ X^{-1} = N(m, \mathrm{Q})$. Dann sind die reellen Zufallsvariablen

$$\beta_k := \begin{cases} \frac{\langle X, e_k \rangle - \langle m, e_k \rangle}{\sqrt{\lambda_k}} & \text{, für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } \lambda_k > 0 \\ 0 & \text{, für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } \lambda_k = 0 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

unabhängig und normalverteilt, mit:

$$\beta_k \sim \begin{cases} \nu_{0,1} & \text{, für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } \lambda_k > 0 \\ \delta_0 & \text{, für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } \lambda_k = 0 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Die Zufallsvariable X lässt sich schreiben als

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \beta_k \, e_k + m \qquad (\mathbb{P}\text{-}f.s.),$$

wobei die Reihe auch $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; U)$-konvergent ist.

Beweis: ad i.): Seien $(\beta_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Familie unabhängiger, $\nu_{0,1}$-verteilter, reeller Zufallsvariablen. Wir zeigen zunächst die $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; U)$-Konvergenz der Reihe (2.10). Für $n, m \in \mathbb{N}$ bliebig gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\Big\| \sum_{k=m}^{n} \sqrt{\lambda_k} \cdot \beta_k \cdot e_k \Big\|_U^2 \right] &= \int_{\Omega} \Big\| \sum_{k=m}^{n} \sqrt{\lambda_k} \cdot \beta_k(\omega) \cdot e_k \Big\|_U^2 \, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=m}^{n} \lambda_k \cdot \beta_k(\omega)^2 \, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \\ &= \sum_{k=m}^{n} \lambda_k \cdot \underbrace{\int_{\Omega} \beta_k(\omega)^2 \, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)}_{=1, \text{ da } \beta_k \sim \nu_{0,1}} = \sum_{k=m}^{n} \lambda_k. \end{aligned}$$

Da $\mathrm{Q} \in \mathrm{T{\scriptsize R}}(U)$, konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathrm{Q}\, e_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle e_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$, also gilt:

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}\left[\Big\| \sum_{k=m}^{n} \sqrt{\lambda_k} \cdot \beta_k \cdot e_k \Big\|_U^2 \right] = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} \lambda_k = 0.$$

Die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k} \beta_k e_k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist demnach eine $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; U)$-Cauchy-Folge und wegen der Vollständigkeit dieses Raumes konvergent (vgl. Satz B.14). Dass die Konvergenz auch $\mathbb{P}$-f.s. gilt, lässt sich wie folgt zeigen. Wir betracten die monoton steigende Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \beta_k^2 \right)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Zufallsvariablen, wenden den Satz von Beppo Levi an und erhalten:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \beta_k(\omega)^2 \, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) &= \int_{\Omega} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \beta_k(\omega)^2 \, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \beta_k(\omega)^2 \, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\int_{\Omega} \beta_k(\omega)^2 \, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)}_{=1, \text{ da } \beta_k \sim \nu_{0,1}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty, \end{aligned}$$

wegen $Q \in \text{Tr}(U)$. Dies impliziert die Existenz einer Menge $\Omega_0 \in \mathscr{A}$ mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, so dass:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \beta_k(\omega)^2 < \infty \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega_0,$$

gilt. Aus der Parseval'schen Identität folgt, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, \beta_k(\omega)\, e_k$$

für alle $\omega \in \Omega_0$ gegen ein $Y(\omega) \in U$ konvergiert. Also existiert eine U-wertige Zufallsvariable $\tilde{Y}$ gegen die diese Reihe $\mathbb{P}$-f.s. konvergiert. Man beachte, dass die Reihe sowohl in $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; U)$ als auch $\mathbb{P}$-f.s. gegen dieselbe (bis auf eine $\mathbb{P}$-Nullmenge eindeutig bestimmte) Zufallsvariable konvergiert. Wir widmen uns nun der Verteilung der (jetzt auch erklärten) Zufallsvariable

$$X := \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, \beta_k\, e_k + m.$$

Dazu fixieren wir $u \in U$ und betrachten die Folge unabhängiger, reeller, normalverteilter Zufallsvariablen

$$\{Y_k^u := \sqrt{\lambda_k}\, \beta_k\, \langle e_k, u\rangle \big| \, k \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gilt für den Erwartungswert und die Varianz:

$$\mathbb{E}[Y_k^u] = 0 \qquad \text{sowie} \qquad \mathbb{V}[Y_k^u] = \lambda_k\, |\langle e_k, u\rangle|^2 \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Summieren wir über alle $k \in \mathbb{N}$, so erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y_k^u] = 0$$

sowie

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{V}[Y_k^u] &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, |\langle e_k, u\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Q\, e_k, u\rangle \langle e_k, u\rangle \\ &= \langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, u\rangle\, Q\, e_k, u\rangle = \langle Q \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, u\rangle e_k, u\rangle = \langle Q\, u, u\rangle < \infty.\end{aligned}$$

Also ist für jedes $u \in U$:

$$\begin{aligned}\langle X, u\rangle &= \langle \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, \beta_k\, e_k, u\rangle + \langle m, u\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, \beta_k\, \langle e_k, u\rangle + \langle m, u\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^u + \langle m, u\rangle \sim \nu_{\langle m,u\rangle, \langle Q\, u,u\rangle}.\end{aligned}$$

X ist demnach eine Gauß'sche Zufallsvariable mit Erwartungswert $m \in U$ und Kovarianzoperator $Q \in \text{Tr}(U)$.

ad ii.): Sei nun X eine U-wertige, normalverteilte Zufallsvariable mit $\mathbb{P} \circ X^{-1} = N(m, \mathrm{Q})$. Für jedes Baiselement e_k, mit $k \in \mathbb{N}$, gilt:

$$\langle X, e_k \rangle \sim \nu_{\langle m, e_k \rangle, \langle \mathrm{Q}\, e_k, e_k \rangle} = \nu_{\langle m, e_k \rangle, \lambda_k}.$$

Ist $\lambda_k > 0$, so folgt daraus, dass

$$\frac{\langle X, e_k \rangle - \langle m, e_k \rangle}{\sqrt{\lambda_k}} \sim \nu_{0,1},$$

während für $\lambda_k = 0$:

$$\langle X, e_k \rangle - \langle m, e_k \rangle \sim \nu_{0,0} = \delta_0 \tag{2.11}$$

folgt. Für $\mathbb{P}$-fast sicher alle $\omega \in \Omega$ gilt dann:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle X(\omega), e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle X(\omega), e_k \rangle e_k - \sum_{k=1}^{\infty} \langle m, e_k \rangle e_k + \sum_{k=1}^{\infty} \langle m, e_k \rangle e_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\langle X(\omega), e_k \rangle - \langle m, e_k \rangle \Big) e_k + m \end{aligned}$$

und wegen (2.11):

$$\begin{aligned} &= \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k > 0}}^{\infty} \Big(\langle X(\omega), e_k \rangle - \langle m, e_k \rangle \Big) e_k + m = \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k > 0}}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, \frac{\langle X(\omega), e_k \rangle - \langle m, e_k \rangle}{\sqrt{\lambda_k}}\, e_k \;+\; m \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, \beta_k(\omega)\, e_k \;+\; m. \end{aligned}$$

Also lässt sich unsere Zufallsvariable wie gewünscht durch die Folge normalverteilter reeler Zufallsvariablen ($\mathbb{P}$-f.s.) beschreiben. Dass die Reihe auch $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; U)$-konvergent ist, sieht man wie im Beweis von Teil *i.)*. Wir müssen noch die Unabhängigkeit der Zufallsvariablenfolge $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nachweisen. Nach der Definition der Unabhängigkeit unendlich vieler Zufallsvariablen, reicht es zu zeigen, dass die ersten n Zufallsvariablen $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ unabhängig sind. Fixieren wir also $n \in \mathbb{N}$ und betrachten die $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable:

$$\begin{aligned} X^{(n)} \colon \quad \Omega \quad &\to \quad \mathbb{R}^n \\ \omega \quad &\mapsto \quad X^{(n)}(\omega) := \begin{pmatrix} \beta_1(\omega) \\ \vdots \\ \beta_n(\omega) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In einem ersten Schritt zeigen wir, dass diese Zufallsvariable Gauß'sch ist, was gleichbedeutend ist mit der Tatsache, dass für beliebige $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ die reelle Zufallsvariable $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k$ normalverteilt ist. Wir fixieren dafür $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $\mathbb{P}$-f.s. alle $\omega \in \Omega$:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k(\omega) = \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k > 0}}^{n} \alpha_k\, \frac{\langle X(\omega), e_k \rangle - \langle m, e_k \rangle}{\sqrt{\lambda_k}} = \langle X(\omega), \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k > 0}}^{n} \frac{\alpha_k}{\sqrt{\lambda_k}}\, e_k}_{=: u \in U} \rangle - \underbrace{\langle m, \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k > 0}}^{n} \frac{\alpha_k}{\sqrt{\lambda_k}}\, e_k \rangle}_{=: c \in \mathbb{R}}.$$

Damit ist
$$\mathbb{P}\circ\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right)^{-1}\in\mathscr{N}_1,$$
wobei
$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right)=0\qquad\text{und}\qquad\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right)=\sum_{\substack{k=1\\ \lambda_k>0}}^{n}\alpha_k^2.$$

In einem zweiten Schritt zeigen wir, dass die Zufallsvariablen $\beta_1,\ldots,\beta_n$ paarweise unkorreliert sind, woraus ihre Unabhängigkeit folgt – dies ist eine wichtige Eigenschaft $\mathbb{R}^n$-wertiger, Gauß'scher Zufallsvariablen (vgl. z.B. [2, S. 263]). Seien also $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ mit $i\neq j$. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass beide Zufallsvariablen $\nu_{0,1}$-verteilt sind, dass also $\lambda_i>0$ und $\lambda_j>0$ gilt. Dann folgt (mit dem Transformationssatz und (2.5)):

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\mathrm{ov}(\beta_i,\beta_j)=\mathbb{E}[\beta_i\cdot\beta_j]&=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\cdot\mathbb{E}[\langle X-m,e_i\rangle\langle X-m,e_j\rangle]\\&=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\cdot\int_\Omega\langle X(\omega)-m,e_i\rangle\langle X(\omega)-m,e_j\rangle\,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)\\&=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\cdot\int_U\langle x-m,e_i\rangle\langle x-m,e_j\rangle\,\mathbb{P}\circ X^{-1}(\mathrm{d}x)\\&=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\cdot\langle \mathrm{Q}\,e_i,e_j\rangle=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\cdot\lambda_i\cdot\langle e_i,e_j\rangle=0,\end{aligned}$$

da $i\neq j$ und $\{e_k\colon k\in\mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis ist. □

Die Existenzaussage dieses Satzes formulieren wir noch einmal kompakt.

Korollar 2.13: *Es seien $m\in U$ sowie $\mathrm{Q}\in\mathrm{T\small{R}}(U)$ beliebig. Dann existiert ein Gauß'sches Maß $\mu=N(m,\mathrm{Q})$ auf dem Messraum $(U,\mathscr{B}(U))$.*

Beweis: Dies folgt sofort aus Teil *i.)* des obigen Satzes 2.12 – vorausgesetzt die unabhängigen, reellen, $\nu_{0,1}$-verteilten Zufallsvariablen $(\beta_k)_{k=1}^{\infty}$ lassen sich auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ konstruieren. Dies ist aber aufgrund des Satzes von Kolmogorov (vgl. [2, Satz 9.2 sowie Korollar 9.5]) kein Problem. □

Bemerkung 2.14: Korollar 2.13 lässt sich auch etwas direkter mit Hilfe des Satzes von Kolmogorov beweisen, ohne dabei auf den Satz 2.12 zurückzugreifen (vgl. z.B. [16, S. 11 f.] oder etwas detaillierter [5, Kapitel 1]).

2.1.2 Q-Wiener Prozesse

Wir haben gerade gesehen, wie sich der Begriff der Gauß'schen Maße auf einen separablen, unendlich-dimensionalen Hilbertraum verallgemeinern lässt. Wir sind damit auch in der Lage, die Eigenschaft der endlichdimensionalen Brown'schen Bewegung, dass ihre Zuwächse *normalverteilt mit linear zunehmender Varianz* sind, ins Unendlich-dimensionale zu übertragen. Damit können wir in analoger Weise definieren, was wir unter einem Wiener Prozess, dessen Zustandsraum der separable Hilbertraum U ist, verstehen wollen. Bevor wir das tun, legen wir noch fest, dass in diesem Abschnitt $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ stets ein Wahrscheinlichkeitsraum, $T > 0$ eine positive Zahl sowie $\mathrm{Q} \in \mathrm{TR}(U)$ ein positiver, symmetrischer Spurklassenoperator ist. Mit $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ bezeichnen wir stets eine Orthonormalbasis von U aus Eigenvektoren von Q zu den Eigenwerten $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$, so dass $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq [0, \infty)$ eine gegen null monoton fallende Folge ist (vgl. auch Satz 1.21).

Definition 2.15 (Q-Wiener Prozess)**:** Ein stochastischer Prozess

$$W\colon \begin{array}{ccc} [0,T]\times\Omega & \to & U \\ (t,\omega) & \mapsto & W(t,\omega) \end{array}$$

heisst (Standard-)Q-*Wiener-Prozess*, falls er die folgenden vier Eigenschaften simultan erfüllt:

[W1.] $W(0) \equiv 0$;

[W2.] W hat $\mathbb{P}$-f.s. *stetige Pfade*,

d.h. es existiert eine Menge $\Omega_0 \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, so dass für alle $\omega \in \Omega_0$ der Pfad $t \mapsto W(t, \omega)$ stetig ist;

[W3.] W hat *unabhängige Zuwächse*,

d.h. für jede beliebige Wahl von $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq T$ sind die Zufallsvariablen $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ unabhängig;

[W4.] W hat *stationäre Zuwächse*, und zwar gilt für jede Wahl von $0 \leq s \leq t \leq T$:

$$W(t) - W(s) \sim N(0, (t-s)\,\mathrm{Q}\,).$$

Bemerkung 2.16: *i.)* Setzen wir in der obigen Definition 2.15 den eindimensionalen Raum $\mathbb{R}$ anstatt U sowie die Identitätsabbildung anstelle des Operators Q ein, so entspricht dies der Definition der reellwertigen (Standard-)Brown'schen Bewegung. Die Existenz eines Prozesses mit diesen Eigenschaften lässt sich auf unterschiedliche Weise zeigen (vgl. z.B. [12, Chapter 2] oder [2, § 40]).

ii.) Wir könnten in [W2.] aus Definition 2.15 die Stetigkeit genausogut überall, d.h. für alle $\omega \in \Omega$, fordern. Denn, durch einen Übergang auf $\tilde{W}(t,\omega) := W(t,\omega) \cdot \mathbb{1}_{\Omega_0}(\omega)$, für alle $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$, erhalten wir eine Modifikation des Prozesses mit überall stetigen Pfaden, während die restlichen geforderten Eigenschaften erhalten bleiben. Um Schreibarbeit zu sparen und die Übersichtlichkeit zu wahren wollen wir uns diesen Schritt (der in zahlreichen Rechnungen notwendig wäre) ersparen und bleiben bei der obigen Definition.

Widmen wir uns zunächst der Frage nach der Existenz eines Q-Wiener Prozesses und klären ob ein U-wertiger Prozess, der alle vier Eigenschaften aus Definition 2.15 besitzt, überhaupt existiert. Wir zeigen dafür erst ein Hilfsresultat über stochastische Prozesse mit $\mathbb{P}$-f.s. stetigen Pfaden.

Lemma 2.17: *Es sei $X\colon [0,T] \times \Omega \to U$ ein U-wertiger stochastischer Prozess, der die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:*

I. $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \; X(t,\omega) \neq 0\}) = 0$, *für alle* $t \in [0,T]$.

II. *Es existiert eine* $\mathbb{P}$*-Nullmenge* $N \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(N) = 0$, *so dass für alle* $\omega \in \Omega \backslash N$ *die Pfade* $t \to X(t,\omega)$ *stetig sind.*

Dann existiert eine von $t \in [0,T]$ *unabhängige Nullmenge* $\tilde{N} \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(\tilde{N}) = 0$, *so dass für alle* $\omega \in \Omega \backslash \tilde{N}$ *gilt:*

$$X(t,\omega) = 0 \qquad \text{für alle } t \in [0,T].$$

Beweis: Für jedes $t \in [0,T]$ bezeichnen wir mit $N_t := \{\omega \in \Omega : X(t,\omega) \neq 0\}$, die von t abhängige $\mathbb{P}$-Nullmenge auf der unser Prozess ungleich Null ist. Wenn wir zeigen können, dass

$$\bigcup_{t\in[0,T]} N_t$$

Teilmenge einer $\mathbb{P}$-Nullmenge ist, sind wir fertig. Da das Intervall $[0,T]$ überabzählbar ist, können wir das allerdings nicht direkt garantieren. Nehmen wir die zweite Bedingung hinzu, so schaffen wir den Übergang auf eine abzählbare Teilmenge und die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge. Nunmehr, sei $D_T := (\mathbb{Q} \cup \{T\}) \cap [0,T]$. Diese Menge ist abzählbar und liegt dicht in $[0,T]$. Fixieren wir $t \in [0,T]$ und betrachten ein $\omega \in N_t \backslash N$, d.h. $X(t,\omega) \neq 0$ und $X(.,\omega)$ ist in t stetig. Dann existiert eine Umgebung $B_\delta(t) \cap [0,T]$, $\delta > 0$, so dass $X(s,\omega) \neq 0$, für alle $s \in B_\delta(t) \cap [0,T]$ gilt. Da D_T dicht in $[0,T]$ liegt, existiert auch ein $d = d(t) \in D_T$, so dass $\omega \in N_d$. Also existiert für jedes $t \in [0,T]$ ein $d \in D_T$, so dass $N_t \backslash N \subseteq N_d$ gilt. Wir schließen:

$$\bigcup_{t\in[0,T]} N_t = \bigcup_{t\in[0,T]} ((N_t \backslash N) \cup \underbrace{(N_t \cap N)}_{\subseteq N}) \subseteq \bigcup_{t\in[0,T]} (N_t \backslash N) \cup N \subseteq \bigcup_{d\in D_T} N_d \cup N =: \tilde{N},$$

und die Behauptung folgt. □

Widmen wir uns nun dem Existenznachweis des Q-Wiener Prozesses und zeigen:

Satz 2.18: *Es sei* $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge reelwertiger, unabhängiger (Standard-)Brown'scher Bewegungen mit Zeitmenge* $[0,T]$ *und überall stetigen Pfaden auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. *Dann existiert ein* U*-wertiger (Standard-)*Q*-Wiener-Prozess* $W = (W(t))_{t\in[0,T]}$, *so dass für* $\mathbb{P}$*-f.s. alle* $\omega \in \Omega$ *gilt:*

$$W(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, \beta_k(t,\omega)\, e_k \qquad (t \in [0,T]). \tag{2.12}$$

Beweis: Für $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir den stochastischen Prozess:

$$\begin{aligned} \tilde{W}^N:\ [0,T] \times \Omega &\to U \\ (t,\omega) &\mapsto \tilde{W}^N(t,\omega) := \sum_{k=1}^{N} \sqrt{\lambda_k}\, \beta_k(t,\omega)\, e_k. \end{aligned}$$

Wählen wir $M, N \in \mathbb{N}$ mit $M < N$ beliebig, so ist für jedes $t \in [0,T]$ die Abbildung

$$\Omega \ni \omega \mapsto \|\tilde{W}^N(t,\omega) - \tilde{W}^M(t,\omega)\|_U = \left\| \sum_{k=M+1}^{N} \sqrt{\lambda_k}\, \beta_k(t,\omega)\, e_k \right\|_U \in \mathbb{R}$$

eine Zufallsvariable. Da die Pfade aller gewählten Brown'schen Bewegungen $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stetig sind, ist

$$\Omega \ni \omega \mapsto \sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{W}^N(t,\omega) - \tilde{W}^M(t,\omega)\|_U \in \mathbb{R}_+$$

ebenfalls eine rellwertige Zufallsvariable (siehe hierzu auch Bemerkung 1.56). Da eine reellwertige Brown'sche Bewegung zudem stets ein quadratisch integrierbares Martingal ist, erhalten wir für jedes $j \in \mathbb{N}$ aus der Doob'schen Maximalungleichung

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} \big|\beta_j(t)\big|^2\Big] \leq 4 \cdot \mathbb{E}\Big[\big|\beta_j(T)\big|^2\Big] = 4T,$$

wegen $\beta_j(T) \sim \nu_{0,T}$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\big(\sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{W}^N(t) - \tilde{W}^M(t)\|_U\big)^2\Big] &= \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{W}^N(t) - \tilde{W}^M(t)\|_U^2\Big] \\
&= \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left\| \sum_{k=M+1}^{N} \sqrt{\lambda_k}\,\beta_k(t)\, e_k \right\|_U^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \sum_{k=M+1}^{N} \lambda_k\, \beta_k(t)^2\right] \\
&= \sum_{k=M+1}^{N} \lambda_k \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[\beta_k(t)^2] \leq 4 \cdot T \sum_{k=M+1}^{N} \lambda_k. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Wir wählen nun eine Indexfolge $(N_m)_{m\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\sum_{k=N_m}^{N_{m+1}} \lambda_k \leq \frac{1}{4T2^{3m}} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Dies ist möglich, da $\mathrm{Q} \in \mathrm{Tr}(U)$. Mit Hilfe der Abschätzung (2.13) und der Tschebytschev-Ungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\Big\{\omega \in \Omega : \sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{W}^{N_{m+1}}(t,\omega) - \tilde{W}^{N_m}(t,\omega)\|_U \geq \frac{1}{2^m}\Big\}}_{=:A_m \in \mathscr{A}}\Bigg) &\leq 2^{2m} \cdot \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{W}^{N_{m+1}}(t) - \tilde{W}^{N_m}(t)\|_U^2\Big] \\
&\leq 2^{2m} \cdot 4T \cdot \frac{1}{4T2^{3m}} = \frac{1}{2^m}.
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_m) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \infty.$$

Mit dem Lemma von Borel-Cantelli folgt dann, dass

$$\begin{aligned}
1 &\geq \mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \big(\tilde{W}^{N_m}(.,\omega)\big)_{m\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gleichmäßig}\Big\}\Big) \\
&\geq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq j} \Big\{\omega \in \Omega : \sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{W}^{N_{m+1}}(t,\omega) - \tilde{W}^{N_m}(t,\omega)\|_U < \frac{1}{2^m}\Big\}\Big) \\
&= \mathbb{P}\big(\liminf_{m\in\mathbb{N}} A_m^c\big) = \mathbb{P}\Big(\big(\limsup_{m\in\mathbb{N}} A_m\big)^c\Big) = 1.
\end{aligned}$$

Dies impliziert die Existenz einer $\mathbb{P}$-Nullmenge $B \in \mathscr{A}$ sowie einer Abbildung

$$\begin{aligned}
\tilde{W}\colon \quad [0,T] \times \Omega \backslash B &\to U \\
(t,\omega) &\mapsto \tilde{W}(t,\omega),
\end{aligned}$$

so dass:

$$\lim_{m\to\infty}\Big(\sup_{t\in[0,T]}\|\tilde{W}(t,\omega)-\tilde{W}^{N_m}(t,\omega)\|_U\Big)=0 \qquad \text{für alle } \omega\in\Omega\backslash B.$$

Wir definieren den stochastischen Prozess:

$$\begin{aligned} W:\ [0,T]\times\Omega &\to U\\ (t,\omega) &\mapsto W(t,\omega):=\begin{cases}\tilde{W}(t,\omega) & \text{, falls } \omega\in\Omega\backslash B\\ 0 & \text{, sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$

Da $\tilde{W}^{N_m}(.,\omega)$ für alle $m\in\mathbb{N}$ und alle $\omega\in\Omega$ stetig ist, ist $W(.,\omega)$ für alle $\omega\in\Omega\backslash B$ stetig. Fixieren wir nun $t\in[0,T]$. Teil *i.)* des Satzes 2.12 liefert dann die Existenz einer $\mathbb{P}$-Nullmenge B_t, so dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\,\beta_k(t,\omega)\,e_k$, für alle $\omega\in\Omega\backslash B_t$ konvergiert. Wegen Lemma 2.17, existiert insgesamt ein $\mathbb{P}$-Nullmenge $\tilde{N}\in\mathscr{A}$, $\mathbb{P}(\tilde{N})=0$, so dass für alle $\omega\in\Omega\backslash\tilde{N}$ gilt:

$$W(t,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\,\beta_k(t,\omega)\,e_k \qquad (t\in[0,T]\,).$$

Wir haben also einen stochastischen Prozess $\{W(t):\ t\in[0,T]\}$ mit $\mathbb{P}$-f.s. stetigen Pfaden, welcher (2.12) erfüllt. Wir müssen noch zeigen, dass dieser auch die Eigenschaften [W1.], [W3.] und [W4.] aus der Definition 2.15 erfüllt. Da $\beta_k(0)\equiv 0$ für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt, folgt sofort $W(0)\equiv 0$ und damit [W1.]. Für $0\le s<t\le T$ beliebig gilt $\mathbb{P}$-f.s.:

$$W(t)-W(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\,(\beta_k(t)-\beta_k(s))\,e_k=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{t-s}\,\sqrt{\lambda_k}\,\underbrace{\frac{\overbrace{(\beta_k(t)-\beta_k(s))}^{\sim\nu_{0,t-s}}}{\sqrt{t-s}}}_{\sim\nu_{0,1}}\,e_k.$$

Da für beliebiges $t\in[0,T]$ der Operator $\mathrm{Q}_t:=t\cdot\mathrm{Q}$ ein Spurklassenoperator ist, so dass $\mathrm{Q}_t\,e_k=t\,\lambda_k\,e_k$ für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt, folgt aus Teil *i.)* des Satzes 2.12, dass die Zufallsvariable $W(t)-W(s)$ Gauß'sch ist, und zwar gilt: $W(t)-W(s)\sim N(0,(t-s)\mathrm{Q})$. Für den Fall $0\le s=t\le T$ gilt offenbar $W(t)-W(s)\equiv 0$, also $W(t)-W(s)\sim N(0,0)$. Insgesamt ergeben sich die gewünschten Verteilungen der Zuwächse und ihre Stationarität, also [W3.]. Abschließend weisen wir die Unabhängigkeit der Inkremente nach. Dazu wählen wir ein $n\in\mathbb{N}$ und beliebige Zeitpunkte $0\le t_1\le\cdots\le t_n\le T$. Die Familie von σ-Algebren,

$$\Big\{\sigma\Big(\beta_k(t_j)-\beta_k(t_{j-1})\Big):\ j\in\{1,\ldots,n\}\text{ und }k\in\mathbb{N}\Big\},$$

ist unabhängig, da sowohl die Inkremente der einzelnen Brown'schen Bewegungen als auch die Brown'schen Bewegungen untereinander unabhängig sind. Für jedes $j\in\{1,\ldots,n\}$ gilt gleichzeitig:

$$W(t_j)-W(t_{j-1})=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\,(\beta_k(t_j)-\beta_k(t_{j-1}))\,e_k \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.}),$$

und daraus ergibt sich die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $W(t_1), W(t_2)-W(t_1),\ldots,W(t_n)-W(t_{n-1})$, unter Zuhilfenahme des Satzes über die Blockbildung bei unabhängigen Zufallsvariablen (vgl. z.B. [2, Satz 9.6, S. 66]). □

Bemerkung 2.19: *i.)* Der obige Satz 2.18 ist erst dann ein Existenzbeweis für Q-Wiener Prozesse, wenn wir wissen, dass sich abzählbar viele reellwertige, unabhängige Brown'sche Bewegungen mit überall stetigen Pfaden konstruieren lassen. Hier eine Skizze wie wir das zeigen könnten. Wir wissen bereits, dass wir eine reellwertige Brown'sche Bewegung

$$X\colon\ [0,T]\times(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})\to(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

mit überall stetigen Pfaden realisieren können. Wir betrachten den Produkt-Wahrscheinlichkeitsraum

$$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{A}},\tilde{\mathbb{P}}):=\Big(\bigotimes_{j\in\mathbb{N}}\Omega,\bigotimes_{j\in\mathbb{N}}\mathscr{A},\bigotimes_{j\in\mathbb{N}}\mathbb{P}\Big),$$

(vgl. hierzu z.B. [2, § 9, S. 58 ff.]), und für $i\in\mathbb{N}$ die i-te Koordinatenprojektion

$$\begin{array}{rccc} pr_i\colon & \bigotimes\limits_{j\in\mathbb{N}}\Omega & \to & \Omega \\ & (\omega_j)_{j\in\mathbb{N}} & \mapsto & \omega_i. \end{array}$$

Die Prozesse definieren wir, indem wir für $j\in\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rrcl} \beta_j\colon & [0,t]\times(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{A}},\tilde{\mathbb{P}}) & \to & (U,\mathscr{B}(U)) \\ & (t,\tilde{\omega}) & \mapsto & \beta_j(t,\tilde{\omega}):=X(t,pr_j(\tilde{\omega})) \end{array}$$

setzen. Man sieht leicht, dass es sich für jedes $j\in\mathbb{N}$ um einen stochastischen Prozess handelt, d.h., dass die Abbildungen $\beta_j(t,.)$ für $t\in[0,T]$, als Verknüpfung messbarer Abbildungen, Zufallsvariablen sind. Die Unabhängigkeit der σ-Albegren $\sigma(\beta_j(t,.):\ t\in[0,T])$, $j\in\mathbb{N}$, folgt sofort aus der Produktkonstruktion. Für jedes $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$ ist die Abbildung $t\mapsto\beta_j(t,\tilde{\omega})$ stetig, da sich die Stetigkeit von X automatisch überträgt. Die anderen Eigenschaften Brown'scher Bewegungen übertragen sich offensichtlich auch und wir haben unser Ziel erreicht.

ii.) Im Beweis des Satzes 2.18 haben wir auch die Konvergenz der Folge

$$\Big(\omega\mapsto\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\lambda_k}\,\beta_k(.,\omega)\,e_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq L^2(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P};\mathscr{C}([0,T],U))$$

bzgl. der Norm $\|.\|_{L^2}$ nachgewiesen.

Wir wollen nun zeigen, wie sich ein Q-Wiener-Prozess in unabhängige, reellwertige Brown'sche Bewegungen zerlegen lässt.

Satz 2.20: *Es sei $(W(t))_{t\in[0,T]}$ ein U-wertiger (Standard-) Q-Wiener-Prozess. Ferner sei für $k\in\mathbb{N}$:*

$$\begin{array}{rccl} \beta_k\colon & [0,T]\times\Omega & \to & \mathbb{R} \\ & (t,\omega) & \mapsto & \beta_k(t,\omega):=\begin{cases}\frac{\langle W(t,\omega),e_k\rangle}{\sqrt{\lambda_k}} & ,\ falls\ \lambda_k>0\\ 0 & ,\ sonst.\end{cases} \end{array}\tag{2.14}$$

Dann ist $\{\beta_k\,|\,k\in\mathbb{N},\lambda_k>0\}$ eine Familie reellwertiger, unabhängiger Brown'scher Bewegungen. Ferner gilt für $\mathbb{P}$-f.s. alle $\omega\in\Omega$:

$$W(t,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\,\beta_k(t,\omega)\,e_k\qquad(t\in[0,T]).\tag{2.15}$$

Beweis: Wählen wir zunächst $k \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_k > 0$ beliebig und zeigen, dass der in (2.14) definierte stochastische Prozess eine rellwertige Brown'sche Bewegung ist – dass es sich um einen Prozess handelt ist offensichtlich. Da $W(0, \omega) = 0$, für alle $\omega \in \Omega$, ist auch $\beta_k(0, \omega) = 0$, für alle $\omega \in \Omega$. Sind $0 \leq s \leq t \leq T$, so folgt aus der Definition Gauß'scher Maße und der Tatsache, dass $W(t) - W(s) \sim N(0, (t-s)\,\mathrm{Q})$:

$$\beta_k(t) - \beta_k(s) = \frac{\langle W(t,\omega) - W(s,\omega), e_k\rangle}{\sqrt{\lambda_k}} \sim \nu\left(0, \frac{\langle (t-s)\,\mathrm{Q}\, e_k, e_k\rangle}{\lambda_k}\right) = \nu\,(0, t-s).$$

Die Zuwächse von β_k sind also stationär und haben die gewünschten Verteilungen. Wählen wir ein $n \in \mathbb{N}$ sowie beliebige Zeitpunkte $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq T$, so sind die Zufallsvariablen $W(t_j) - W(t_{j-1})$, $j = 1, \ldots, n$, unabhängig, da W unabhängige Zuwächse besitzt. Für jede $\mathscr{B}(U)/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbare Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}$ sind dann auch die Zufallsvariablen $f(W(t_j) - W(t_{j-1}))$, $j = 1, \ldots, n$, unabhängig (– messbare Abbildungen „schmälern" die σ-Algebra). Wählen wir $f(x) := \langle x, e_k\rangle / \sqrt{\lambda_k}$, $x \in U$, so folgt, dass die Zufallsvariablen $\beta_k(t_j) - \beta_k(t_{j-1})$, $j = 1, \ldots, n$, unabhängig sind. Der Prozess β_k besitzt demnach unabhängige Inkremente. Schließlich, existiert eine $\mathbb{P}$-Nullmenge $N \in \mathscr{A}$, so dass für alle $\omega \in \Omega \backslash N$ die Pfade $t \mapsto W(t, \omega)$ stetig sind. Damit ist aber auch für alle $\omega \in \Omega \backslash N$ die Abbildung:

$$[0, T] \ni t \mapsto \beta_k(t, \omega) = \frac{\langle W(t,\omega), e_k\rangle}{\lambda_k} \in \mathbb{R},$$

als Komposition stetiger Abbildungen, stetig. β_k hat also $\mathbb{P}$-f.s. stetige Pfade und ist insgesamt eine reellwertige Brown'sche Bewegung. Falls $\lambda_k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt, folgt aufgrund der Definition Gauß'scher Maße, dass $\langle W(t, .), e_k\rangle \sim \delta_0$ für jedes $t \in [0, T]$ gilt, d.h. $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \langle W(t, \omega), e_k\rangle \neq 0\}) = 0$, für alle $t \in [0, T]$. Zudem ist $t \mapsto \langle W(t, \omega), e_k\rangle$ für alle $\omega \in \Omega \backslash N$, $\mathbb{P}(N) = 0$, stetig. Lemma 2.17 liefert dann die Existenz einer $\mathbb{P}$-Nullmenge $\tilde{N} \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(\tilde{N}) = 0$, so dass für alle $\omega \in \Omega \backslash \tilde{N}$ gilt: $\langle W(t, \omega), e_k\rangle = 0$ für alle $t \in [0, T]$. Mit Hilfe dieser Überlegungen erhalten wir wie im Beweis von Teil *ii.)* des Satzes 2.12, dass für alle $\omega \in \Omega \backslash \tilde{N}$ gilt:

$$W(t, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\,\beta_k(t, \omega)\, e_k \qquad (t \in [0, T])\,.$$

Kommen wir abschließend zum Nachweis der Unabhängigkeit der Familie $\{\beta_k \,|\, k \in \mathbb{N}, \lambda_k > 0\}$ reellwertiger Brown'scher Bewegungen. Ohne Einschränkung, wollen wir annehmen, dass $\lambda_k > 0$, für alle $k \in \mathbb{N}$, gilt. Ist nämlich $\lambda_k = 0$, für ein $k \in \mathbb{N}$, so haben wir $\beta_k \equiv 0$ gesetzt und ein konstanter Prozess ist von jedem anderen Prozess unabhängig. Wir fixieren $n \in \mathbb{N}$ sowie paarweise verschiedene $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ und führen einen Induktionsbeweis über die Anzahl $m \in \mathbb{N}$ der Zeitpunkte.

Induktionsvoraussetzung: Für $m \in \mathbb{N}$ Zeitpunkte $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m \leq T$ sind die σ-Algebren

$$\sigma\Big(\beta_{k_j}(t_i) :\ i = 1, \ldots, m\Big), j = 1, \ldots, n,$$

unabhängig.

Induktionsanfang: $(m = 1)$ Für $t_1 \in [0, T]$ sind die σ-Algebren $\sigma(\beta_{k_j}(t_1))$, $j = 1, \ldots, n$, unabhängig. Dies folgt unmittelbar aus Teil *ii.)* des Satzes 2.12.

Bevor wir zum Induktionsschluss übergehen, bemerken wir noch, dass sich für je zwei Zeitpunkte $0 \leq s \leq t \leq T$, genauso wie im Beweis des zweiten Teils von Satz 2.12, die Unabhängigkeit der σ-Algebren:

$$\sigma(\beta_k(t) - \beta_k(s)), k \in \mathbb{N},$$

zeigen lässt.
INDUKTIONSSCHLUSS: ($m \mapsto m+1$) Wir wählen $m+1$ beliebige Zeitpunkte $0 \le t_1 \le \cdots \le t_m \le t_{m+1} \le T$, messbare Mengen $B_{ij} \in \mathscr{B}(E)$, für $i = 1, \ldots, m+1$ und $j = 1, \ldots, n$, und betrachten:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{j=1}^{n}\Big(\Big\{\beta_{k_j}(t_1) \in B_{1j}, \ldots, \beta_{k_j}(t_m) \in B_{mj}\Big\} \cap \Big\{\beta_{k_j}(t_{m+1}) - \beta_{k_j}(t_m) \in B_{m+1j}\Big\}\Big)\Bigg)\\
&= \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\bigcap_{j=1}^{n}\Big\{\beta_{k_j}(t_1) \in B_{1j}, \ldots, \beta_{k_j}(t_m) \in B_{mj}\Big\}}_{\in\, \sigma\left(W(s)\,:\ s \le t_m\right)} \cap \underbrace{\bigcap_{j=1}^{n}\Big\{\beta_{k_j}(t_{m+1}) - \beta_{k_j}(t_m) \in B_{m+1j}\Big\}}_{\in\, \sigma\left(W(t_{m+1}) - W(t_m)\right)}\Bigg)
\end{aligned}$$

und wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse von W:

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{j=1}^{n}\Big\{\beta_{k_j}(t_1) \in B_{1j}, \ldots, \beta_{k_j}(t_m) \in B_{mj}\Big\}\Bigg) \cdot \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{j=1}^{n}\Big\{\beta_{k_j}(t_{m+1}) - \beta_{k_j}(t_m) \in B_{m+1j}\Big\}\Bigg)\\
&= \prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}\Big(\Big\{\beta_{k_j}(t_1) \in B_{1j}, \ldots, \beta_{k_j}(t_m) \in B_{mj}\Big\}\Big) \cdot \prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}\Big(\Big\{\beta_{k_j}(t_{m+1}) - \beta_{k_j}(t_m) \in B_{m+1j}\Big\}\Big)\\
&= \prod_{j=1}^{n}\Bigg(\mathbb{P}\Big(\Big\{\beta_{k_j}(t_1) \in B_{1j}, \ldots, \beta_{k_j}(t_m) \in B_{mj}\Big\}\Big) \cdot \mathbb{P}\Big(\Big\{\beta_{k_j}(t_{m+1}) - \beta_{k_j}(t_m) \in B_{m+1j}\Big\}\Big)\Bigg)
\end{aligned}$$

und wegen der Unabhängigkeit der Inkremente von β_{k_j} für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}
&= \prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}\Bigg(\Big\{\beta_{k_j}(t_1) \in B_{1j}, \ldots, \beta_{k_j}(t_m) \in B_{mj}\Big\} \cap \Big\{\beta_{k_j}(t_{m+1}) - \beta_{k_j}(t_m) \in B_{m+1j}\Big\}\Bigg)\\
&= \prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}\Bigg(\Big\{\beta_{k_j}(t_1) \in B_{1j}, \ldots, \beta_{k_j}(t_m) \in B_{mj}, \beta_{k_j}(t_{m+1}) - \beta_{k_j}(t_m) \in B_{m+1j}\Big\}\Bigg).
\end{aligned}$$

Da

$$\sigma\Big(\beta_{k_j}(t_1), \ldots, \beta_{k_j}(t_m), \beta_{k_j}(t_{m+1})\Big) = \sigma\Big(\beta_{k_j}(t_1), \ldots, \beta_{k_j}(t_m), \beta_{k_j}(t_{m+1}) - \beta_{k_j}(t_m)\Big),$$

folgt die Unabhängigkeit der σ-Algebren $\sigma(\beta_{k_j}(t_i)\,:\ i = 1, \ldots, m+1)$, $j = 1, \ldots, n$.
Die behauptete Unabhängigkeit der Familie $\{\beta_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ reellwertiger Brown'scher Bewegungen folgt (siehe auch Bemerkung 1.33). □

Definition 2.21 (Q-Wiener Prozess bzgl. einer Filtration)**:** Ein Q-Wiener Prozess $(W(t))_{t\in[0,T]}$ heisst Q-*Wiener Prozess bzgl. der Filtration* $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$, falls gilt:

[W0.] $(W(t))_{t\in[0,T]}$ ist $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-adaptiert, und

[W3′.] $W(t) - W(s)$ ist unabhängig von $\mathscr{F}_s$ für alle $0 \le s \le t \le T$.

Bemerkung 2.22: Jeder Q-Wiener Prozess $(W(t))_{t\in[0,T]}$ ist ein Q-Wiener Prozess bzgl. der (natürlichen) Filtration $(\mathscr{F}_t^W)_{t\in[0,T]}$ (siehe auch Definition 1.39).

Es sei $\{W(t) : t \in [0,T]\}$ ein U-wertiger Q-Wiener-Prozess. Wir setzen:

$$\mathscr{N} := \{N \in \mathscr{A} : \mathbb{P}(N) = 0\} \text{ sowie } \tilde{\mathscr{F}}_t := \sigma(\mathscr{F}_t^W \cup \mathscr{N}) \text{ für } t \in [0,T].$$

Dann ist, wie man leicht sieht,

$$\mathscr{F}_t := \bigcap_{s>t} \tilde{\mathscr{F}}_s, \qquad t \in [0,T], \tag{2.16}$$

eine normale Filtration und Folgendes lässt sich zeigen:

Satz 2.23: *Es sei* $(W(t))_{t\in[0,T]}$ *ein beliebiger* U*-wertiger* Q*-Wiener-Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$*. Dann ist* $(W(t))_{t\in[0,T]}$ *ein* Q*-Wiener-Prozess bzgl. der Filtration* $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ *aus* (2.16).

Beweis: [siehe [16, Proposition 2.1.13; S.17]] □

Bemerkung 2.24: Aufgrund dieses Satzes können wir im Folgenden ohne Einschränkung von einem U-wertigen Q-Wiener-Prozess bzgl. einer normalen Filtration sprechen.

Eine sehr wichtige Eigenschaft reellwertiger Brown'scher Bewegungen ist, dass sie Martingale sind. Dies überträgt sich auf den Fall U-wertiger Wiener Prozesses, wie wir jetzt zeigen wollen.

Satz 2.25: *Es sei* $W = (W(t))_{t\in[0,T]}$ *ein beliebiger* U*-wertiger* Q*-Wiener Prozess bzgl. einer normalen Filtration* $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$*. Dann ist* $(W_t)_{t\in[0,T]}$ *ein quadratisch integrierbares, stetiges* $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$*-Martingal, d.h.*

$$W \in \mathscr{M}_T^2(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}; U).$$

Beweis: Die $\mathbb{P}$-fast sichere Stetigkeit der Pfade ist aufgrund der Definition des Q-Wiener-Prozesses genauso gegeben wie die Tatsache, dass

$$\int_\Omega \|W(t)\|_U^2 \mathrm{d}\mathbb{P} = t \operatorname{tr}(\mathrm{Q}) < \infty$$

für alle $t \in [0,T]$ gilt (siehe auch Satz 2.11). Fixieren wir nun $0 \le s \le t \le T$ sowie $F \in \mathscr{F}_s$, so erhalten wir mit Satz B.21 für jedes $u \in U$, dass

$$\langle \int_F W(t) - W(s) \, \mathrm{d}\mathbb{P}, u\rangle = \int_F \langle W(t) - W(s), u\rangle \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Da $W(t) - W(s)$ und $\mathscr{F}_s$ unabhängig sind, folgt daraus:

$$\begin{aligned}\langle \int_F W(t) - W(s) \, \mathrm{d}\mathbb{P}, u\rangle &= \mathbb{P}(F) \cdot \int_\Omega \langle W(t) - W(s), u\rangle \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \mathbb{P}(F) \cdot \mathbb{E}(\langle W(t) - W(s), u\rangle) = 0,\end{aligned}$$

da $W(t) - W(s) \sim N(0, (t-s)\,\mathrm{Q})$. Dies impliziert:

$$\int_F W(t) \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F W(s) \, \mathrm{d}\mathbb{P} \text{ für alle } F \in \mathscr{F}_s,$$

wegen Linearität des Bochner-Integrals. Da W adaptiert ist, folgt daraus, dass

$$\mathbb{E}(W(t)|\mathscr{F}_s) = W(s) \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.}),$$

und damit insgesamt die Behauptung. □

2.2 Das stochastische Integral nach Itô (bzgl. eines Q-Wiener Prozesses)

Nachdem wir uns im letzten Abschnitt eingängig mit dem Begriff des Q-Wiener Prozesses auseinandergesetzt haben, wollen wir uns im Folgenden mit dem stochastischen Itô-Integral bzgl. eines solchen Prozesses beschäftigen. Wir bezeichnen dafür mit $(U, \langle ., . \rangle_U)$ und $(H, \langle ., . \rangle_H)$ stets zwei separable Hilberträume. Zudem wählen wir einen positiven, symmetrischen Spurklassenoperator $Q \in \mathrm{Tr}(U)$ sowie eine positive Zahl $T > 0$. Ferner sei $(W(t))_{t \in [0,T]}$ ein U-wertiger Q-Wiener-Prozess bzgl. der normalen Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \in [0,T]}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

2.2.1 Konstruktion des stochastischen Integrals

Wir wollen zunächst klären, was wir unter dem stochastischen Itô-Integral eines Operatorwertigen Prozesses Φ bzgl. des Q-Wiener Prozesses W verstehen; d.h. wir wollen dem Term

$$\int_0^{\cdot} \Phi(s) \mathrm{d}W(s)$$

einen Sinn geben. Dies werden wir in fünf Schritten tun und dabei die Menge der möglichen Integranden immer größer werden lassen. Wir beginnen mit:

SHRITT 1: Wir suchen uns eine bestimmte Klasse sehr einfach gestrickter Prozesse aus und definieren was wir unter dem *stochastischen Integral* dieser Prozesse verstehen wollen.
Wir erinnern zunächst daran, was wir unter einer einfachen Abbildung verstehen und führen einige Notationen ein.

Definition 2.26 (einfache Abbildung)**:** Sei S ein Banachraum, $\mathscr{B}(S)$ die Borel'sche σ-Algebra in S sowie $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.
Eine Abbildung $X : \Omega \to S$ heisst *einfach*, falls sie $\mathscr{F}/\mathscr{B}(S)$-messbar ist und nur endlich viele Werte annimmt.

NOTATION: Die Menge der $\mathscr{F}/\mathscr{B}$-messbaren einfachen Abbildungen von Ω nach S bezeichnen wir mit $\mathscr{E}^*(\mathscr{F}, \mathscr{B})$, d.h.

$$\mathscr{E}^*(\mathscr{F}, \mathscr{B}) := \{X : \Omega \to S \mid X \text{ ist } \mathscr{F}/\mathscr{B}\text{-messbar und nimmt nur endlich viele Werte an}\}.$$

Wird aus dem Kontext klar um welche σ-Algebren es sich handelt, so schreiben wir auch kurz $\mathscr{E}^*$ anstatt $\mathscr{E}^*(\mathscr{F}, \mathscr{B})$.
Wir definieren nun die Klasse von $L(U, H)$-wertigen Prozessen, die wir als erstes betrachten wollen.

Definition 2.27 (elementarer Prozess)**:** Ein stochastischer Prozess

$$\Phi \colon [0, T] \times \Omega \to L(U, H)$$

heisst *elementar*, falls

- $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T$ für ein $k \in \mathbb{N}$

  sowie

- $\Phi_m \in \mathscr{E}^*(\mathscr{F}_{t_m}, \mathscr{B}(L(U,H)))$ für $m \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$

existieren, so dass sich Φ wie folgt schreiben lässt:

$$(\#) \qquad \Phi(t,\omega) = \sum_{m=0}^{k-1} \mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]}(t) \cdot \Phi_m(\omega) \qquad ((t,\omega) \in [0,T] \times \Omega).$$

Sprechweise: Wir nennen (#) eine *Standarddarstellung* von Φ.
Notation: Wir bezeichnen die Menge der elementaren Prozesse mit $\mathscr{E}_T$. Wollen wir mehr spezifizieren, schreiben wir auch $\mathscr{E}_T((\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]})$ oder $\mathscr{E}_T(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, L(U,H))$ anstatt $\mathscr{E}_T$.

Bemerkung 2.28: *i.)* Man sieht leicht, dass der Raum $\mathscr{E}_T$ der elementaren Prozesse, versehen mit der für Abbildungen üblichen (punktweisen) Addition und Skalarmultiplikation, ein Vektorraum ist.

ii.) Es sei $\sum_{m=0}^{k-1} \mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]} \cdot \Phi_m$ eine Standarddarstellung von $\Phi \in \mathscr{E}_T$. Dann lässt sich dieser Prozess auch schreiben als:

$$\Phi(t,\omega) = \sum_{m=0}^{k-1} \mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]}(t) \cdot \underbrace{\Big(\sum_{i=0}^{N(m)} \mathbb{1}_{A_i^m}(\omega) \cdot L_i^m\Big)}_{=\Phi_m(\omega)}$$

$$(\#\#) \qquad = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{N(m)} \mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}] \times A_i^m}(t,\omega) \cdot L_i^m \qquad ((t,\omega) \in [0,T] \times \Omega),$$

wobei für jedes $m \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ gilt:

- $N(m) \in \mathbb{N}$,
- $(A_i^m)_{i\in\{1,\ldots,N(m)\}} \subseteq \mathscr{F}_{t_m}$ paaweise disjunkt sowie
- $L_i^m \in L(U,H)$ für alle $i \in \{1, \ldots, N(m)\}$.

Man setze dafür $A_i^m := \{\Phi_m = L_i^m\}$ für $L_i^m \in \mathit{Bild}(\Phi_m) = \{L_1^m, \ldots, L_{N(m)}^m\}$.
Sprechweise: Wir nennen (##) eine *Normaldarstellung* des Prozesses $\Phi \in \mathscr{E}_T$.

Für diese vom Aufbau her sehr schlichten Prozesse definieren wir das stochastische Integral wie folgt:

Definition 2.29 (stochastisches Integral eines elementaren Prozesses)**:** Es sei $\sum_{m=0}^{k-1} \mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]} \cdot \Phi_m$ eine Standarddarstellung von $\Phi \in \mathscr{E}_T$. Dann heisst der stochastische Prozess

$$\begin{aligned} \mathrm{int}_\Phi^W : \ [0,T] \times \Omega &\to H \\ (t,\omega) &\mapsto \mathrm{int}_\Phi^W(t,\omega), \end{aligned}$$

wobei

$$(2.17) \qquad \mathrm{int}_\Phi^W(t,\omega) := \sum_{m=0}^{k-1} \Phi_m(\omega)\Big(W(t_{m+1} \wedge t, \omega) - W(t_m \wedge t, \omega)\Big) \qquad ((t,\omega) \in [0,T] \times \Omega),$$

stochastisches Integral von Φ bzgl. W.
Notation: Wir schreiben auch

$$\int_0^t \Phi(s)\,\mathrm{d}W(s) := \mathrm{int}_\Phi^W(t) \qquad (t \in [0,T]).$$

Bemerkung 2.30: *i.)* Man sieht leicht (aber schreibintensiv), dass das gerade definierte (stochastische) Integral wohldefiniert ist, d.h. der Prozess int_{Φ}^{W} ist von der in (2.17) gewählten Standarddarstellung von Φ unabhängig.

ii.) Betrachten wir den einfachen Fall $U = H = \mathbb{R}$. Für $c \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit f_c die Abbildung:

$$f_c(x) := c \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dann ist $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f_c : c \in \mathbb{R}\}$ und dieser Raum ist isometrisch isomorph zu $\mathbb{R}$. Wählen wir nun einen elementaren Prozess $\Phi \in \mathscr{E}_T$ und fixieren $\omega \in \Omega$. Der entsprechende ω-Pfad lässt sich dann schreiben als:

$$\Phi(s) = \sum_{m=0}^{k-1} \mathbb{1}_{(t_m, t_{m+1}]}(s) \cdot f_{c_m} \qquad (s \in [0, T]),$$

wobei $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T$ sowie $f_{c_m} = f_{c_m}(\omega) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ für $m = 1, \ldots, k-1$ und $k \in \mathbb{N}$. Nehmen wir für dasselbe $\omega \in \Omega$ den Pfad $s \mapsto W(s, \omega)$ einer Standard-Brown'schen Bewegung auf der reellen Achse mit überall stetigen Pfade, $(W_t)_{t\in[0,T]}$. Dann gilt für das oben definierte stochastische Integral in (T, ω):

$$\mathrm{int}_{\Phi}^{W}(T, \omega) = \sum_{m=0}^{k-1} f_{c_m}(\omega)\big(W(t_{m+1}, \omega) - W(t_m, \omega)\big) = \sum_{m=0}^{k-1} c_m(\omega) \cdot \big(W(t_{m+1}, \omega) - W(t_m, \omega)\big).$$

Dies ist aber nichts anderes als das Stieltjes-Integral der Funktion

$$[0, T] \ni s \mapsto \sum_{m=0}^{k-1} \mathbb{1}_{(t_m, t_{m+1}]}(s) \cdot c_m \in \mathbb{R}$$

bzgl. der Funktion $s \mapsto W(s, \omega)$. D.h. wir haben – eingeschränkt auf den reellen Fall – das stochastische Integral pfadweise als Stieltjes-Integral definiert.

Wir würden nun gerne – schauen wir noch einmal in die obige Bemerkung hinein – unser stochastisches Integral pfadweise erweitern, und zwar als natürliche Verallgemeinerung dessen was wir für reellwertige Funktionen unter dem Lebesgue-Stieltjes-Integral verstehen. Da allerdings für $\mathbb{P}$-f.s. alle $\omega \in \Omega$ die Trajektorien $t \mapsto W(t, \omega)$ einer Standard-Brown'schen-Bewegung unendliche Variation aufweisen, definiert $\mathrm{d}W(t, \omega)$ (für festes ω) kein Maß und eine solche Konstruktion ist nicht möglich. Der nächste Satz, der herausstellt welch schöne Eigenschaften unser stochastisches Integral für elementare Prozesse aufweist, eröffnet uns neue Möglichkeiten.

Satz 2.31: *Es sei $\Phi \in \mathscr{E}_T$ ein elementarer Prozess. Dann gilt:*

$$\mathrm{int}_{\Phi}^{W} \in \mathscr{M}_T^2(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}; H).$$

Das stochastische Integral eines elementaren Prozesses bzgl. eines Q*-Wiener Prozesses ist demnach ein H-wertiges, quadratisch integrierbares und stetiges Martingal.*

Beweis: Es sei

$$\Phi(t, \omega) = \sum_{m=0}^{k-1} \mathbb{1}_{(t_m, t_{m+1}]}(t) \cdot \Phi_m(\omega) \qquad ((t, \omega) \in [0, T] \times \Omega)$$

ein einfacher Prozess in Standarddarstellung, d.h. $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T$ für ein $k \in \mathbb{N}$ sowie $\Phi_m \in \mathscr{E}^*(\mathscr{F}_{t_m}, \mathscr{B}(L(U,H)))$ für $m \in \{0,1,\dots,k-1\}$. Wir zeigen zunächst die Adaptiertheit des Prozesses $\{\mathrm{int}_\Phi^W(t) : t \in [0,T]\}$. Wir fixieren dafür $t \in [0,T]$. Dann gilt für jedes $m \in \{0,1,\dots,k-1\}$ (vgl. Bemerkung 2.28):

$$\Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\Big) = \sum_{i=1}^{N(m)} \mathbb{1}_{\underbrace{\{\Phi_m = L_i^m\}}_{\in \mathscr{F}_{t_m}}} \cdot \underbrace{L_i^m\Big(W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\Big)}_{\mathscr{F}_t\text{-messbar}},$$

wobei $L_i^m \in L(U,H)$ für $i = 1,\dots,N(m)$ und $N(m) \in \mathbb{N}$. Also ist $\Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\Big)$ für jedes $m \in \{0,1,\dots,k-1\}$ eine $\mathscr{F}_{t_m \vee t}$-messbare Zufallsvariable. Damit ist die Zufallsvariable

$$\mathrm{int}_\Phi^W(t) = \sum_{m=0}^{k-1} \Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\Big) = \sum_{\substack{m=0 \\ t_m < t}}^{k-1} \underbrace{\Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\Big)}_{\mathscr{F}_{t_m \vee t} = \mathscr{F}_t\text{-messbar}}$$

$\mathscr{F}_t$-messbar und die Adaptiertheit folgt. Weiter gilt für jedes $t \in [0,T]$ und $m \in \{0,1,\dots,k-1\}$:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big\|\Phi_m(\omega)\Big(W(t_{m+1} \wedge t, \omega) - W(t_m \wedge t, \omega)\Big)\Big\|_H^2 \,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \\
&\quad \le \int_\Omega \big\|\Phi_m(\omega)\big\|_{L(U,H)}^2 \cdot \big\|W(t_{m+1} \wedge t, \omega) - W(t_m \wedge t, \omega)\big\|_U^2 \,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \\
&\quad \le \int_\Omega \max_{i=1,\dots,N(m)} \big\|L_i^m\big\|_{L(U,H)}^2 \cdot \big\|W(t_{m+1} \wedge t, \omega) - W(t_m \wedge t, \omega)\big\|_U^2 \,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \\
&\quad = \max_{i=1,\dots,N(m)} \big\|L_i^m\big\|_{L(U,H)}^2 \cdot \int_\Omega \big\|W(t_{m+1} \wedge t, \omega) - W(t_m \wedge t, \omega)\big\|_U^2 \,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) < \infty,
\end{aligned}$$

da $W(s) \in L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; U)$ für alle $s \in [0,T]$. Damit ist die Zufallsvariable $\mathrm{int}_\Phi^W(t)$ für jedes $t \in [0,T]$ (als Summe quadratisch integrierbarer Zufallsvariablen) ein Element aus $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; H)$. Widmen wir uns nun der Pfadregularität des Prozesses int_Φ^W. Da W ein Q-Wiener-Prozess ist, existiert eine $\mathbb{P}$-Nullmenge $N \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(N) = 0$, so dass für jedes $\omega \in \Omega \backslash N$ der Pfad $t \mapsto W(t,\omega)$ stetig ist. Fixieren wir nun $\omega \in \Omega \backslash N$, so ist für jedes $m \in \{0,1,\dots,k-1\}$ die Abbildung

$$t \mapsto W(t_m \wedge t, \omega) = \begin{cases} W(t,\omega) & \text{, falls } t_m \ge t \\ W(t_m,\omega) & \text{, falls } t_m < t \end{cases}$$

ebenfalls stetig. Da $\Phi_m(\omega) \in L(U,H)$, folgt daraus die Stetigkeit von

$$t \mapsto \Phi_m(\omega)\,(W(t_{m+1} \wedge t, \omega) - W(t_m \wedge t, \omega))\,.$$

für jedes $m \in \{0,1,\dots,k-1\}$ und damit auch von $t \mapsto \mathrm{int}_\Phi^W(t,\omega)$ für alle $\omega \in \Omega \backslash N$. Abschließend wollen wir die Martinagleigenschaft [M3] nachweisen. Wir fixieren dafür $0 \le s \le t \le T$ sowie $F \in \mathscr{F}_s$ und überlegen uns, was der Wert des Integrals

$$\int_F \Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

für jedes $m \in \{0,1,\dots,k-1\}$ ist. Wir unterscheiden dafür die folgenden drei möglichen Fälle:

Fall 1: $s > t_{m+1}$. Dann ist $t_{m+1} \wedge s = t_{m+1} \wedge t = t_{m+1}$ und $t_m \wedge s = t_m \wedge t = t_m$, also gilt:

$$\int_F \Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F \Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge s) - W(t_m \wedge s)\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Fall 2: $t_m < s \leq t_{m+1}$. Da es sich sowohl bei $(W_{t_{m+1}\wedge u})_{u\in[0,T]}$ als auch bei $(W_{t_m\wedge u})_{u\in[0,T]}$ um ein $(\mathscr{F}_u)_{u\in[0,T]}$-Martingal handelt (man setze $\tau = t_{m+1}$ bzw. $\tau = t_m$ in Satz 1.53 ein), gilt:

$$\int_F \Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F \sum_{i=1}^{N(m)} \mathbb{1}_{\{\Phi_m = L_i^m\}} \cdot L_i^m\Big(W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Wegen der Linearität des Bochner-Integrals und Satz B.21 folgt:

$$\begin{aligned}
\int_F \Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{P} &= \sum_{i=1}^{N(m)} L_i^m\Bigg(\int_{\underbrace{F \cap \{\Phi_m = L_i^m\}}_{\in \mathscr{F}_{t_m \vee s} = \mathscr{F}_s}} W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\,\mathrm{d}\mathbb{P}\Bigg) \\
&= \sum_{i=1}^{N(m)} L_i^m\Big(\int_{F\cap\{\Phi_m = L_i^m\}} W(t_{m+1} \wedge s) - W(t_m \wedge s)\,\mathrm{d}\mathbb{P}\Big) \\
&= \int_F \Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge s) - W(t_m \wedge s)\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Fall 3: $s \leq t_m$. Da $(W_{t_j\wedge t})_{j=0,1,\ldots,k}$ ein $(\mathscr{F}_{t_j})_{j=0,1,\ldots,k}$-Martingal ist (vgl. Satz 1.53), folgt:

$$\int_{\underbrace{F \cap \{\Phi_m = L_i^m\}}_{\in \mathscr{F}_{t_m \vee s} = \mathscr{F}_{t_m}}} W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = 0$$

für alle $i \in \{1, \ldots, N(m)\}$, also auch:

$$\int_F \Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

Insgesamt können wir schließen, dass

$$\begin{aligned}
\int_F \mathrm{int}_\Phi^W(t)\,\mathrm{d}\mathbb{P} &= \sum_{m=0}^{k-1} \int_F \Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \sum_{\substack{m=0 \\ s>t_{m+1}}}^{k-1} \int_F \Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\quad + \sum_{\substack{m=0 \\ t_m<s\leq t_{m+1}}}^{k-1} \int_F \Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\quad + \sum_{\substack{m=0 \\ s\leq t_m}}^{k-1} \int_F \Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge t) - W(t_m \wedge t)\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \sum_{\substack{m=0 \\ s>t_m}}^{k-1} \int_F \Phi_m\Big(W(t_{m+1} \wedge s) - W(t_m \wedge s)\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F \mathrm{int}_\Phi^W(s)\,\mathrm{d}\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Da diese Gleichheit für beliebiges $F \in \mathscr{F}_s$ erfüllt ist, und int_Φ^W adaptiert ist, erhalten wir

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{int}_\Phi^W(t)|\mathscr{F}_s\right) = \mathrm{int}_\Phi^W(s) \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.}),$$

woraus mit dem davor Gezeigten die Behauptung folgt. □

Bemerkung 2.32: Der obige Satz erlaubt folgende Überlegungen. Wir definieren die Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathrm{int}^W\colon\ \mathscr{E}_T &\to \left(\mathscr{M}_T^2, \|.\|_{\mathscr{M}_T^2}\right) \\ \Phi &\mapsto \mathrm{int}^W(\Phi) := \mathrm{int}_\Phi^W . \end{aligned}$$

Diese ist – wie man leicht, aber aufwändig nachprüft – linear. Aus der Funktionalanalysis wissen wir, erstens, dass jeder normierte Vektorraum isometrisch isomorph zu einem dichten Untervektorraum eines Banachraumes ist (siehe z.B. [21, Korollar III.3.2; S. 105]). Zweitens, lässt sich jede auf einem dichten Untervektorraum eines Banachraumes stetige und lineare Abbildung auf genau eine Weise stetig und linear auf den gesamten Banachraum fortsetzen (siehe z.B. [21, Satz II.1.5; S. 48]). Das wollen wir uns zu nutze machen und unser Integralbegriff auf eine größere Klasse von Prozessen erweitern.

$\boxed{\text{Schritt 2:}}$ Wir folgen dem Gedankengang aus der obigen Bemerkung und suchen zunächst nach einer geeigneten (Halb-)Norm auf $\mathscr{E}_T$.

Satz 2.33: *Es sei $\Phi \in \mathscr{E}_T = \mathscr{E}_T(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, L(U,H))$. Dann gilt:*

$$\left\| \mathrm{int}_\Phi^W \right\|_{\mathscr{M}_T^2}^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\| \Phi(s) \circ \mathrm{Q}^{1/2} \right\|_{L_2(U,H)}^2 \lambda^1(\mathrm{d}s) \right]. \tag{2.18}$$

Diese Gleichheit wird auch Itô-Isometrie *genannt.*

Beweis: Es sei also $\Phi \in \mathscr{E}_T(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, L(U,H))$, und zwar gelte:

$$\begin{aligned} \Phi(t,\omega) &= \sum_{m=0}^{k-1} \mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]}(t) \cdot \Phi_m(\omega) \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{N(m)} \mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]\times\{\Phi_m = L_i^m\}}(t,\omega) \cdot L_i^m , \end{aligned}$$

wobei es sich bei ersterem um eine Standard- und bei zweiterem um eine Normaldarstellung von Φ handelt (siehe auch (#) und (##)). Für $m \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ bezeichnen wir mit

$$\Delta_m(\omega) := W_{t_{m+1}}(\omega) - W_{t_m}(\omega) \qquad (\omega \in \Omega)$$

den Zuwachs des Q-Wiener-Prozesses zwischen den Zeitpunkten t_m und t_{m+1}. Im Beweis des Satzes 2.31 haben wir gezeigt, dass $\Phi_m\Delta_m \in L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; H)$ für jedes $m \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ gilt. Daraus können wir folgern, dass die reellwertige Zufallsvariable $\sum_{m=0}^{k-1} \|\Phi_m\Delta_m\|_H^2$ integrierbar ist. Unter Zuhilfenahme der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, folgt zudem, dass

$$\sum_{0\le m<n\le k-1} \langle \Phi_m\Delta_m, \Phi_n\Delta_n \rangle_H \in L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; \mathbb{R}) .$$

Wir können dann die Norm des stochastischen Integrals wie folgt aufschreiben (siehe auch (1.33)):

$$\begin{aligned}\left\|\operatorname{int}_\Phi^W\right\|^2_{\mathscr{M}_T^2} &= \mathbb{E}\left[\left\|\operatorname{int}_\Phi^W(T)\right\|_H^2\right] = \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{m=0}^{k-1}\Phi_m\Delta_m\right\|_H^2\right] = \mathbb{E}\left[\langle\sum_{m=0}^{k-1}\Phi_m\Delta_m, \sum_{m=0}^{k-1}\Phi_m\Delta_m\rangle_H\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{m=0}^{k-1}\left\|\Phi_m\Delta_m\right\|_H^2 + 2\cdot\sum_{0\le m<n\le k-1}\langle\Phi_m\Delta_m, \Phi_n\Delta_n\rangle_H\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{m=0}^{k-1}\left\|\Phi_m\Delta_m\right\|_H^2\right] + 2\cdot\mathbb{E}\left[\sum_{0\le m<n\le k-1}\langle\Phi_m\Delta_m, \Phi_n\Delta_n\rangle_H\right].\end{aligned}\tag{2.19}$$

Wir zeigen nun die Behauptung in vier Schritten.
Schritt 1: Widmen wir uns zunächst dem ersten Summanden in (2.19) und zeigen, dass

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=0}^{k-1}\left\|\Phi_m\Delta_m\right\|_H^2\right] = \sum_{m=0}^{k-1}\mathbb{E}\left[\left\|\Phi_m\Delta_m\right\|_H^2\right] = \sum_{m=0}^{k-1}(t_{m+1}-t_m)\cdot\mathbb{E}\left[\left\|\Phi_m\circ Q^{1/2}\right\|^2_{L_2(U,H)}\right]\tag{2.20}$$

gilt. Wählen wir dafür eine beliebige Orthonormalbasis $\{f_l:\ l\in\mathbb{N}\}$ von H und fixieren zunächst $m\in\{0,1,\dots,k-1\}$. Dann ist

$$\mathbb{E}\left[\left\|\Phi_m\Delta_m\right\|_H^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{\infty}\langle\Phi_m\Delta_m, f_l\rangle_H^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{\infty}\langle\Delta_m, \Phi_m^* f_l\rangle_U^2\right] = \sum_{l=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\langle\Delta_m, \Phi_m^* f_l\rangle_U^2\right],\tag{2.21}$$

wobei wir im letzten Schritt auf den Satz von Beppo Levi zurückgegriffen haben. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccl}\Phi_m^* f_l\colon & \Omega & \to & U\\ & \omega & \mapsto & \Phi_m^* f_l(\omega) := \Phi_m^*(\omega)(f_l)\end{array}$$

ist $\mathscr{F}_{t_m}/\mathscr{B}(U)$-messbar, denn sie lässt sich wie folgt schreiben:

$$\Phi_m^* f_l(\omega) = \Phi_m^*(\omega)(f_l) = \Big(\sum_{i=1}^{N(m)}\mathbb{1}_{\{\Phi_m=L_i^m\}}(\omega)L_i^m\Big)^*(f_l) = \sum_{i=1}^{N(m)}\mathbb{1}_{\underbrace{\{\Phi_m\,=\,L_i^m\}}_{\in\mathscr{F}_{t_m}}}(\omega)\,(L_i^m)^*\,(f_l).$$

Zudem wissen wir, dass die Zufallsvariable Δ_m von der σ-Algebra $\mathscr{F}_{t_m}$ unabhängig ist. Unter Anwendung des Satzes 1.47 (bzw. der ihm folgenden Bemerkung 1.48) erhalten wir, dass für $\mathbb{P}$-f.s. alle $\omega\in\Omega$ die Gleichheit

$$\mathbb{E}\left(\langle\Delta_m, \Phi_m^* f_l\rangle_U^2|\mathscr{F}_{t_m}\right)(\omega) = \mathbb{E}\left(\langle\Delta_m, \Phi_m^*(\omega)f_l\rangle_U^2\right)$$

gilt. Da $\Delta_m\sim N(0,(t_{m+1}-t_m)\,Q)$, gilt für die rechte Seite dieser Gleichheit (siehe dazu Satz 2.11):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\langle\Delta_m, \Phi_m^*(\omega)f_l\rangle_U^2\right) &= (t_{m+1}-t_m)\cdot\langle Q\left(\Phi_m^*(\omega)(f_l)\right), \Phi_m^*(\omega)(f_l)\rangle_U\\ &= (t_{m+1}-t_m)\cdot\left\|\left(Q^{1/2}\circ\Phi_m^*(\omega)\right)(f_l)\right\|_U^2.\end{aligned}$$

Also gilt für $\mathbb{P}$-f.s. alle $\omega\in\Omega$:

$$\mathbb{E}\left(\langle\Delta_m, \Phi_m^* f_l\rangle_U^2|\mathscr{F}_{t_m}\right)(\omega) = (t_{m+1}-t_m)\cdot\left\|\left(Q^{1/2}\circ\Phi_m^*(\omega)\right)(f_l)\right\|_U^2,$$

und durch Anwendung der sog. tower-property dann auch:

$$\mathbb{E}\left[\langle \Delta_m, \Phi_m^* f_l\rangle_U^2\right] = (t_{m+1} - t_m) \cdot \mathbb{E}\left[\left\| \left(\mathrm{Q}^{1/2} \circ \Phi_m^*\right)(f_l)\right\|_U^2\right].$$

Kehren wir wieder zur Gleichheit (2.21) zurück und setzen das gerade hergeleitete ein, so folgt (man berücksichtige dabei, dass $\mathrm{Q}^{1/2} \circ \Phi_m^*$ aufgrund von (1.11) und Satz 1.19 ein Hilbert-Schmidt-Operator ist):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|\Phi_m \Delta_m\right\|_H^2\right] &= (t_{m+1} - t_m) \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left\| \left(\mathrm{Q}^{1/2} \circ \Phi_m^*\right)(f_l)\right\|_U^2\right] \\
&= (t_{m+1} - t_m) \cdot \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{\infty} \left\| \left(\mathrm{Q}^{1/2} \circ \Phi_m^*\right)(f_l)\right\|_U^2\right] \\
&= (t_{m+1} - t_m) \cdot \mathbb{E}\left[\left\| \mathrm{Q}^{1/2} \circ \Phi_m^* \right\|_{L_2(H,U)}^2\right] \\
&= (t_{m+1} - t_m) \cdot \mathbb{E}\left[\left\| \left(\Phi_m \circ \mathrm{Q}^{1/2}\right)^* \right\|_{L_2(H,U)}^2\right] \\
&= (t_{m+1} - t_m) \cdot \mathbb{E}\left[\left\| \Phi_m \circ \mathrm{Q}^{1/2} \right\|_{L_2(U,H)}^2\right].
\end{aligned}$$

Dabei haben wir insb. auf Satz 1.12 zurückgegriffen. Durch Aufsummieren über m erhalten wir das gewünschte Ergebnis (2.20).
Schritt 2: Wir weisen die $\mathscr{B}([0,T]) \otimes \mathscr{A} / \mathscr{B}(L_2(U,H))$-Messbarkeit der Abbildung

$$\begin{array}{rlcl}
\Phi \circ \mathrm{Q}^{1/2}\colon & [0,T] \times \Omega & \to & L_2(U,H) \\
& (t,\omega) & \mapsto & \Phi \circ \mathrm{Q}^{1/2}(t,\omega) := \Phi(t,\omega) \circ \mathrm{Q}^{1/2}
\end{array}$$

nach. Dafür stellen wir zunächst fest, dass jeder elementare Prozess vorhersagbar (und damit messbar) ist, denn für $B \in \mathscr{B}(L(U,H))$ beliebig gilt:

$$\{\Phi \in B\} = \bigcup_{m=0}^{k-1} \Big((t_m, t_{m+1}] \times \underbrace{\{\Phi_m \in B\}}_{\in \mathscr{F}_{t_m} \subseteq \mathscr{A}} \Big) \cup \Big(\{0\} \times \underbrace{\{0 \in B\}}_{\in \mathscr{F}_0} \Big) \in \mathscr{P}_T \subseteq \mathscr{B}([0,T]) \otimes \mathscr{A}.$$

Ferner betrachten wir die Abbildung

$$\begin{array}{rlcl}
i_{\mathrm{Q}^{1/2}}\colon & L(U,H) & \to & L_2(U,H) \\
& S & \mapsto & i_{\mathrm{Q}^{1/2}}(S) := S \circ \mathrm{Q}^{1/2}.
\end{array}$$

Diese ist offenbar linear und wegen

$$\|i_{\mathrm{Q}^{1/2}}(S)\|_{L_2(U,H)} = \|S \circ \mathrm{Q}^{1/2}\|_{L_2(U,H)} \leq \|S\|_{L(U,H)} \cdot \|\mathrm{Q}^{1/2}\|_{L_2(U)}$$

auch stetig, so dass sie $\mathscr{B}(L(U,H))/\mathscr{B}(L_2(U,H))$-messbar ist. Da sich die Abbildung $\Phi \circ \mathrm{Q}^{1/2}$ als

$$\Phi \circ \mathrm{Q}^{1/2} = i_{\mathrm{Q}^{1/2}} \circ \Phi$$

schreiben lässt, folgt deren $\mathscr{B}([0,T]) \otimes \mathscr{A} / \mathscr{B}(L_2(U,H))$-Messbarkeit.
Schritt 3: Es gilt:

$$\sum_{m=0}^{k-1} (t_{m+1} - t_m) \cdot \mathbb{E}\left[\left\|\Phi_m \circ \mathrm{Q}^{1/2}\right\|_{L_2(U,H)}^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\Phi(s) \circ \mathrm{Q}^{1/2}\right\|_{L_2(U,H)}^2 \lambda^1(\mathrm{d}s)\right]. \tag{2.22}$$

Dies rechnen wir einfach nach:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{k-1}(t_{m+1}-t_m)\cdot\mathbb{E}\Big[\big\|\Phi_m\circ \mathrm{Q}^{1/2}\big\|^2_{L_2(U,H)}\Big] \\
&\quad= \int_0^T\left(\sum_{m=0}^{k-1}\mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]}(s)\cdot\mathbb{E}\Big[\big\|\Phi_m\circ \mathrm{Q}^{1/2}\big\|^2_{L_2(U,H)}\Big]\right)\lambda^1(\mathrm{d}s)\\
&\quad= \int_0^T\left(\sum_{m=0}^{k-1}\mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]}(s)\cdot\Big(\int_\Omega\big\|\Phi_m(\omega)\circ \mathrm{Q}^{1/2}\big\|^2_{L_2(U,H)}\,\mathbb{P}\,(\mathrm{d}\omega)\Big)\right)\lambda^1(\mathrm{d}s)\\
&\quad= \int_0^T\int_\Omega\sum_{m=0}^{k-1}\mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]}(s)\cdot\big\|\Phi_m(\omega)\circ \mathrm{Q}^{1/2}\big\|^2_{L_2(U,H)}\,\mathbb{P}\,(\mathrm{d}\omega)\;\lambda^1(\mathrm{d}s)\\
&\quad= \int_0^T\int_\Omega\Big\|\sum_{m=0}^{k-1}\mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]}(s)\cdot\Phi_m(\omega)\circ \mathrm{Q}^{1/2}\Big\|^2_{L_2(U,H)}\,\mathbb{P}\,(\mathrm{d}\omega)\;\lambda^1(\mathrm{d}s)\\
&\quad= \int_0^T\int_\Omega\Big\|\Phi(s,\omega)\circ \mathrm{Q}^{1/2}\Big\|^2_{L_2(U,H)}\,\mathbb{P}\,(\mathrm{d}\omega)\;\lambda^1(\mathrm{d}s)\\
&\quad= \int_\Omega\int_0^T\Big\|\Phi(s,\omega)\circ \mathrm{Q}^{1/2}\Big\|^2_{L_2(U,H)}\,\lambda^1(\mathrm{d}s)\,\mathbb{P}\,(\mathrm{d}\omega)\\
&\quad= \mathbb{E}\Big[\int_0^T\big\|\Phi(s)\circ \mathrm{Q}^{1/2}\big\|^2_{L_2(U,H)}\,\lambda^1(\mathrm{d}s)\Big].
\end{aligned}$$

Die Abbildung $\|\Phi\circ \mathrm{Q}^{1/2}\|^2_{L_2(U,H)}$ ist (aufgrund des im Schritt 2 gezeigten und der Stetigkeit einer jeden Norm) $\mathscr{B}([0,T])\otimes\mathscr{A}\,/\,\mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbar, so dass wir im vorletzten Schritt dieser Rechnung getrost auf den Satz von Tonelli zurückgreifen und die Integrationsreihenfolge vertauschen können.

Schritt 4: Es gilt:

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{0\le m<n\le k-1}\langle\Phi_m\Delta_m,\Phi_n\Delta_n\rangle_H\Big]=\sum_{0\le m<n\le k-1}\mathbb{E}\big[\langle\Phi_m\Delta_m,\Phi_n\Delta_n\rangle_H\big]=0. \tag{2.23}$$

Um das zu zeigen, weisen wir nach, dass jeder der obigen Summanden gleich Null ist. Wir fixieren dafür $m,n\in\{0,1,\dots,k-1\}$ mit $m<n$. Dann ist

$$\Phi_m\Delta_m=\sum_{i=1}^{N(m)}L_i^m\underbrace{(W_{t_{m+1}}-W_{t_m})}_{\mathscr{F}_{t_{m+1}}\text{-messbar}}\cdot\mathbb{1}_{\underbrace{\{\Phi_m=L_i^m\}}_{\in\mathscr{F}_{t_m}}}$$

eine $\mathscr{F}_{t_{m+1}}$-messbare und, da $m<n$, auch eine $\mathscr{F}_{t_n}$-messbare Zufallsvariable. Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
\Phi_n^*\Phi_m\Delta_m(\omega) &= \Phi_n^*(\omega)[\Phi_m\Delta_m(\omega)]\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\langle\Phi_n^*(\omega)[\Phi_m\Delta_m(\omega)],e_k\rangle_U\cdot e_k\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\langle\Phi_m\Delta_m(\omega),\Phi_n(\omega)e_k\rangle_H\cdot e_k \qquad (\omega\in\Omega)\,,
\end{aligned}$$

wobei $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine beliebige Orthonormalbasis von U ist. Damit ist $\Phi_n^* \Phi_m \Delta_m$ (als Limes $\mathscr{F}_{t_n}$-messbarer Zufallsvariablen) $\mathscr{F}_{t_n}$-messbar. Diese Vorbereitungen erlauben uns folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle \Phi_m \Delta_m, \Phi_n \Delta_n \rangle_H] &= \mathbb{E}[\langle \Phi_n^* \Phi_m \Delta_m, \Delta_n \rangle_U] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(\langle \Phi_n^* \Phi_m \Delta_m, \Delta_n \rangle_U | \mathscr{F}_{t_n})\Big] \\ &= \int_\Omega \mathbb{E}(\langle \Phi_n^* \Phi_m \Delta_m, \Delta_n \rangle_U | \mathscr{F}_{t_n})(\omega) \, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \, .\end{aligned}$$

Bei Anwendung des Lemmas 1.47 (bzw. der Bemerkung 1.48) folgt daraus:

$$\mathbb{E}[\langle \Phi_m \Delta_m, \Phi_n \Delta_n \rangle_H] = \int_\Omega \underbrace{\int_\Omega \langle \overbrace{\Phi_n^* \Phi_m \Delta_m(\omega)}^{\in U, \text{ von } \tilde{\omega} \text{ unabhängig}} , \Delta_n(\tilde{\omega}) \rangle_U \, \mathbb{P}(\mathrm{d}\tilde{\omega})}_{=0, \text{ da } \Delta_n \sim N(0, (t_{n+1} - t_n) \mathrm{Q})} \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = 0.$$

Durch Aufsummieren erhalten wir das in (2.23) behauptete Verschwinden des Terms

$$\mathbb{E}\Bigg[\sum_{0 \le m < n \le k-1} \langle \Phi_m \Delta_m, \Phi_n \Delta_n \rangle_H \Bigg].$$

Setzen wir nun die Ergebnisse der Schritte 1, 3 und 4 in (2.19) ein, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.34: Die Tatsache, dass auf der linken Seite von (2.18) das Quadrat einer Norm steht und die Linearität der Abbildung int^W, garantieren uns, dass es sich bei:

$$(2.24) \qquad \begin{array}{rccl} \|.\|_T : & \mathscr{E}_T & \to & [0, \infty) \\ & \Phi & \mapsto & \|\Phi\|_T := \sqrt{\mathbb{E}\Big[\int_0^T \big\| \Phi(s) \circ \mathrm{Q}^{1/2} \big\|^2_{L_2(U,H)} \, \lambda^1(\mathrm{d}s) \Big]} \end{array}$$

um eine Halbnorm auf dem Vektorraum $\mathscr{E}_T$ handelt. Bezeichnen wir mit

$$\mathscr{N}_T := \{\Phi \in \mathscr{E}_T : \|\Phi\|_T = 0\}$$

die Menge aller elementaren Prozesse, für die die Halbnorm $\|.\|_T$ verschwindet und gehen auf den Quotientenraum

$$\mathscr{E}_T / \mathscr{N}_T := \{\Phi + \mathscr{N}_T : \Phi \in \mathscr{E}_T\} = \{ [\Phi]_{\mathscr{N}_T} : \Phi \in \mathscr{E}_T\},$$

wobei

$$[\Phi]_{\mathscr{N}_T} := \{\Phi + \tilde{\Phi} : \tilde{\Phi} \in \mathscr{N}_T\} \qquad (\Phi \in \mathscr{E}_T) \, ,$$

über, so wird durch

$$\| \, [\Phi]_{\mathscr{N}_T} \|_{\mathscr{E}_T / \mathscr{N}_T} := \|\Phi\|_T \qquad (\Phi \in \mathscr{E}_T)$$

eine Norm auf dem Vektorraum $\mathscr{E}_T / \mathscr{N}_T$ definiert. Erinnern wir uns kurz an Kapitel 1.3.3, wo wir den Raum $\mathscr{M}_T^2$ definiert haben. Für $M \in \mathscr{M}_T^2(H)$ handelt es sich bei M_t, für $t \in [0, T]$, strenggenommen nicht um eine H-wertige Zufallsvariable, sondern auch um die $L^2(H)$-Äquivalenzklasse einer solchen. Sind nun $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)} \in \mathscr{E}_T$ zwei elementare Prozesse mit $\Phi^{(1)} \in [\Phi^{(2)}]_{\mathscr{N}_T}$ so sehen wir mit Hilfe der bewiesenen Gleichheit (2.18), dass $\mathrm{int}^W_{\Phi^{(1)}} = \mathrm{int}^W_{\Phi^{(2)}}$, d.h. für jedes $t \in [0, T]$ gilt:

$$\mathrm{int}^W_{\Phi^{(1)}}(t) = \mathrm{int}^W_{\Phi^{(2)}}(t) \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Damit ist die (lineare und isometrische) Abbildung

$$\text{(2.25)}\qquad \begin{array}{rcl} \operatorname{int}^{W,\mathcal{N}_T}\colon\ (\mathcal{E}_T/\mathcal{N}_T, \|.\|_{\mathcal{E}_T/\mathcal{N}_T}) & \to & \left(\mathcal{M}_T^2, \|.\|_{\mathcal{M}_T^2}\right) \\ {[\Phi]}_{\mathcal{N}_T} & \mapsto & \operatorname{int}^{W,\mathcal{N}_T}([\Phi]_{\mathcal{N}_T}) := \operatorname{int}^W(\Phi) \end{array}$$

wohldefiniert.

Notation: Wir behalten unsere Schreibweise bei und bezeichnen mit $(\mathcal{E}_T, \|.\|_T)$ sowohl den bisherigen halbnormierten Raum der elementaren Prozesse als auch den normierten Äquivalenzklassenvektorraum $(\mathcal{E}_T/\mathcal{N}_T, \|.\|_{\mathcal{E}_T/\mathcal{N}_T})$. Zudem schreiben wir int^W auch für $\operatorname{int}^{W,\mathcal{N}_T}$.

Bevor wir zum nächsten Schritt übergehen, fassen wir nochmal zusammen. Wir haben jetzt eine lineare Abbildung

$$\text{(2.26)}\qquad \begin{array}{rcl} \operatorname{int}^W\colon\ (\mathcal{E}_T, \|.\|_T) & \to & \left(\mathcal{M}_T^2, \|.\|_{\mathcal{M}_T^2}\right) \\ \Phi & \mapsto & \operatorname{int}^W(\Phi) := \operatorname{int}_\Phi^W, \end{array}$$

welche eine Isometrie zwischen den Räumen $(\mathcal{E}_T, \|.\|_T)$ und $\left(\mathcal{M}_T^2, \|.\|_{\mathcal{M}_T^2}\right)$ darstellt. Diese gilt es nun (eindeutig) linear und stetig zu erweitern, wofür wir den normierten Vektorraum $(\mathcal{E}_T, \|.\|_T)$ als (dichten) Teilraum eines Banachraumes verstehen wollen.

$\boxed{\textbf{Schritt 3:}}$ Wir suchen nach einem geeigneten Banachraum $(E_1, \|.\|_{E_1})$, so dass sich eine lineare Abbildung

$$\text{(2.27)}\qquad \mathbb{J}_1\colon (\mathcal{E}_T, \|.\|_T) \to (E_1, \|.\|_{E_1})$$

definieren lässt, welche isometrisch ist, d.h., für die gilt:

$$\text{(2.28)}\qquad \|\mathbb{J}_1(\Phi)\|_{E_1} = \|\Phi\|_T \text{ für alle } \Phi \in \mathcal{E}_T.$$

Wir erinnern uns dafür an die in Kapitel 1.1 gewonnenen Erkenntnisse und führen zunächst einige Bezeichnungen ein. Wir wissen, dass der Bildraum von $\mathrm{Q}^{1/2}$,

$$U_0 := \mathrm{Q}^{1/2}(U),$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle_{U_0} := \langle \mathrm{Q}^{-1/2}\, x, \mathrm{Q}^{-1/2}\, y\rangle_U \qquad ((x,y) \in U_0 \times U_0)$$

ein separabler Hilbertraum ist. Dabei bezeichnet $\mathrm{Q}^{-1/2}$ die Pseudo-Inverse von $\mathrm{Q}^{1/2}$. Versehen wir den Raum der Hilbert-Schmidt-Operatoren von U_0 nach H,

$$L_2^0 := L_2(U_0, H),$$

mit dem Skalarprodukt

$$\text{(2.29)}\qquad \langle \tilde{S}, \tilde{T}\rangle_{L_2^0} := \sum_{k=1}^{\infty} \langle \tilde{S}\,\tilde{e}_k, \tilde{T}\tilde{e}_k\rangle_{U_0} \qquad ((\tilde{S}, \tilde{T}) \in L_2^0 \times L_2^0),$$

wobei $\{\tilde{e}_k :\ k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von U_0 ist, so wissen wir, dass es sich dabei ebenfalls um einen separablen Hilbertraum handelt. Wir bezeichnen ferner mit

$$\text{(2.30)}\qquad L(U,H)_0 := \{T\big|_{U_0} :\ T \in L(U,H)\}$$

die Menge aller auf U_0 eingeschränkten Operatoren aus $L(U, H)$. Wie diese Räume zusammenhängen, zeigt das folgende Hilfsresultat:

Lemma 2.35: *i.) Es sei $T \in L_2^0$ ein Hilbert-Schmidt-Operator von U_0 nach H. Dann ist $T \circ \mathrm{Q}^{1/2} \in L_2(U,H)$ ein Hilbert-Schmidt-Operator von U nach H und es gilt:*

$$\|T\|_{L_2^0} = \|T \circ \mathrm{Q}^{1/2}\|_{L_2(U,H)}. \tag{2.31}$$

ii.) Es gilt: $L(U,H)_0 \subseteq L_2^0$, und für $S \in L(U,H)$ ist

$$\left\|S\big|_{U_0}\right\|_{L_2^0} = \left\|S \circ \mathrm{Q}^{1/2}\right\|_{L_2(U,H)}. \tag{2.32}$$

iii.) Die (offensichtlich lineare) Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \tilde{\varphi}_0: & (L(U,H), \|.\|_{L(U,H)}) & \to & \left(L_2^0, \|.\|_{L_2^0}\right) \\ & S & \mapsto & \tilde{\varphi}_0(S) := S\big|_{U_0} \end{array} \tag{2.33}$$

ist stetig und damit $\mathscr{B}(L(U,H))/\mathscr{B}(L_2^0)$-messbar.

Beweis: Es sei $\{e_j' : j \in \mathbb{N}\}$ eine beliebige Orthonormalbasis von $\mathrm{Ker}(\mathrm{Q}^{1/2})^\perp$. Wir können diese – z.B. mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens – zu einer Orthonormalbasis B^* von U ergänzen. Dann gilt für alle $y \in B^* \backslash \{e_j' : j \in \mathbb{N}\}$, dass $y \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Q}^{1/2})$. Zudem wissen wir aus Satz 1.23, dass $\{\mathrm{Q}^{1/2} e_j' : j \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $(U_0, \langle .,. \rangle_{U_0})$ ist.
ad i.): Mit dem oben bereits Angemerkten gilt:

$$\begin{aligned} \infty > \|T\|_{L_2^0}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \|T\,\mathrm{Q}^{1/2} e_j'\|_H^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \|T\,\mathrm{Q}^{1/2} e_j'\|_H^2 + \sum_{\substack{y \in B^* \\ y \notin \{e_j' : j \in \mathbb{N}\}}} \|T \underbrace{\mathrm{Q}^{1/2} y}_{=0}\|_H^2 \\ &= \sum_{y \in B^*} \|T\,\mathrm{Q}^{1/2} y\|_H^2 = \|T \circ \mathrm{Q}^{1/2}\|_{L_2(U,H)}^2. \end{aligned}$$

und damit folgt sowohl, dass $T \circ \mathrm{Q}^{1/2} \in L_2(U,H)$ als auch die behauptete Normgleichheit (2.31).
ad ii.): Wir wählen ein beliebiges $S \in L(U,H)$. Da $\mathrm{Q}^{1/2} \in L_2(U)$ (siehe Satz 1.19) wissen wir, dass $S \circ \mathrm{Q}^{1/2}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator von U nach H ist (siehe Satz 1.13). Wir können (mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Teil *i.)*) folgern, dass:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\|S\big|_{U_0} \mathrm{Q}^{1/2} e_j'\right\|_H^2 = \sum_{y \in B^*} \left\|S\big|_{U_0} \mathrm{Q}^{1/2} y\right\|_H^2 = \sum_{y \in B^*} \|S\,\mathrm{Q}^{1/2} y\|_H^2 = \|S \circ \mathrm{Q}^{1/2}\|_{L_2(U,H)}^2 < \infty.$$

Daraus ergibt sich, dass $S\big|_{U_0}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator von U_0 nach H ist und wegen der Beliebigkeit von $S \in L(U,H)$ auch $L(U,H)_0 \subseteq L_2^0$. Die behauptete Normgleichheit (2.32) folgt durch Wurzelziehen.
ad iii.): Aus Teil *ii.)* wissen wir, dass für $S \in L(U,H)$:

$$\left\|\tilde{\varphi}_0(S)\right\|_{L_2^0} = \left\|S\big|_{U_0}\right\|_{L_2^0} = \left\|S \circ \mathrm{Q}^{1/2}\right\|_{L_2(U,H)}$$

und wegen (1.10) und $\mathrm{Q}^{1/2} \in L_2(U)$:

$$\leq \left\| \mathrm{Q}^{1/2} \right\|_{L_2(U)} \cdot \left\| S \right\|_{L(U,H)}.$$

Mit Hilfe der Linearität ergibt sich die Stetigkeit und damit auch die behauptete Messbarkeit von $\tilde{\varphi}_0$. □

Diese Resultate lassen folgende Überlegungen zu.

Bemerkung 2.36: *i.)* Im Beweis von Satz 2.33 (Schritt 2) haben wir bereits nachgewiesen, dass jeder elementare Prozess $\Phi \in \mathscr{E}_T$ ein vorhersagbarer Prozess ist. Wegen Teil *iii.)* im obigen Lemma, folgt, dass dann die Abbildung

$$[0,T] \times \Omega \ni (t,\omega) \mapsto \tilde{\varphi}_0(\Phi(t,\omega)) = \Phi(t,\omega)\big|_{U_0} \in L_2^0 \tag{2.34}$$

$\mathscr{P}_T / \mathscr{B}(L_2^0)$-messbar ist und damit der L_2^0-wertige stochastische Prozess $(\Phi(t)\big|_{U_0})_{t\in[0,T]}$ vorhersagbar ist.

ii.) Schauen wir zurück auf die Definition der Norm $\|.\|_T$ (siehe (2.24)), so gilt unter Anwendung des obigen Lemmas und des Satzes von Tonelli:

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_T^2 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\Phi(s) \circ \mathrm{Q}^{1/2}\right\|_{L_2(U,H)}^2 \lambda^1(\mathrm{d}s)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\Phi(s)\big|_{U_0}\right\|_{L_2^0}^2 \lambda^1(\mathrm{d}s)\right] \\ &= \int_{\Omega_T} \left\|\Phi(s,\omega)\big|_{U_0}\right\|_{L_2^0}^2 \mathbb{P}_T(\mathrm{d}(s,\omega)). \end{aligned}$$

iii.) Da es sich bei $(L_2^0, \langle .,. \rangle_{L_2^0})$ um einen separablen Hilbertraum handelt, ist der Raum der $\mathscr{P}_T$-messbaren, L_2^0-wertigen und quadratisch integrierbaren Abbildungen, $L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0)$, ein Banachraum (vgl. Satz von Riesz-Fischer, Anhang B.14).

Fassen wir zusammen, so erhalten wir:

Satz 2.37: *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{J}: & (\mathscr{E}_T, \|.\|_T) & \to & (L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0), \|.\|_{L^2}) \\ & \Phi & \mapsto & \mathbb{J}(\Phi) := (\Phi(t)\big|_{U_0})_{t\in[0,T]} \end{array} \tag{2.35}$$

ist eine lineare Isometrie.

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus den vorangegangenen Überlegungen. □

Bemerkung 2.38: Setzen wir $(E_1, \|.\|_{E_1}) := (L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0), \|.\|_{L^2})$ sowie $\mathbb{J}_1 := \mathbb{J}$, so haben wir unser Zwischenziel erreicht. Der Raum $(\mathscr{E}_T, \|.\|_T)$ ist dann isometrisch isomorph zum normierten Raum $(\mathbb{J}(\mathscr{E}_T), \|.\|_{L^2})$. Wir können das stochastische Integral auf diesem Teilraum von $(L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0), \|.\|_{L^2})$ wie folgt definieren:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{int}^{W,\mathbb{J}}: & (\mathbb{J}(\mathscr{E}_T), \|.\|_{L^2}) & \to & \left(\mathscr{M}_T^2, \|.\|_{\mathscr{M}_T^2}\right) \\ & \Psi & \mapsto & \mathrm{int}^{W,\mathbb{J}}(\Psi) := \mathrm{int}^W(\mathbb{J}^{-1}(\Psi)), \end{array} \tag{2.36}$$

wobei wir mit $\mathbb{J}^{-1}(\Psi)$ das eindeutig bestimmte Element $\Phi \in \mathscr{E}_T$ bezeichnen, welches $\mathbb{J}(\Phi) = \Psi$ erfüllt. Bei dieser Abbildung handelt es sich offenbar um eine lineare Isometrie. Falls wir zeigen können, dass $\mathbb{J}(\mathscr{E}_T)$ dicht in $(L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0), \|.\|_{L^2})$ liegt, so wissen wir, dass eine eindeutige lineare und isometrische Fortsetzung dieser Abbildung auf dem Gesamtraum existiert. Dann können wir auch bei $\mathrm{int}^{W,\mathbb{J}}(\Psi)$ für jedes $\Psi \in (L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0), \|.\|_{L^2})$ vom (eindeutig bestimmten) stochastischen Integral von Ψ bzgl. W sperchen. Bevor wir uns diesem Schritt widmen, führen wir noch die folgenden vereinfachenden Notationen ein.

Notation: Da $\mathbb{J}$ eine Isometrie ist, schreiben wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit $(\mathscr{E}_T, \|.\|_T)$ auch für den normierten Raum $(\mathbb{J}(\mathscr{E}_T), \|.\|_{L^2})$. Wir nennen jedes Element $\mathbb{J}(\Phi) \in \mathbb{J}(\mathscr{E}_T)$ für $\Phi \in \mathscr{E}_T$ ebenfalls elementaren Prozess und bezeichnen es mit Φ. Zudem schreiben wir int^W anstatt $\mathrm{int}^{W,\mathbb{J}}$.

Schritt 4: Wir wollen zeigen, dass der Raum der elementaren Prozesse $(\mathscr{E}_T, \|.\|_T)$ dicht in dem Banachraum $(L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0), \|.\|_{L^2})$ liegt. Genauer, wir wollen den folgenden Satz beweisen.

Satz 2.39: *Zu jedem $\Phi \in L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0)$ existiert eine Folge $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{E}_T$, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} \|\Phi_n - \Phi\|_{L^2} = 0. \tag{2.37}$$

Die Menge der elementaren Prozesse, $\mathscr{E}_T$, liegt demnach dicht in dem Raum der quadratisch integrierbaren, L_2^0-wertigen, vorhersagbaren Prozesse, $L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0)$.

Bevor wir uns dem Beweis dieses Satzes widmen, stellen wir die Konsequenzen für die Konstruktion des stochastischen Integrals heraus.

Bemerkung 2.40: Aufgrund des obigen Satzes, ist die stetige und lineare Fortsetzung der Abbildung int^W auf den Banachraum $L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0)$ eindeutig bestimmt. D.h. es existiert genau eine stetige und lineare Abbildung:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Int}^W: & L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0) & \to & \left(\mathscr{M}_T^2, \|.\|_{\mathscr{M}_T^2}\right) \\ & \Phi & \mapsto & \mathrm{Int}^W(\Phi), \end{array} \tag{2.38}$$

welche

$$\mathrm{Int}^W\big|_{\mathscr{E}_T} = \mathrm{int}^W \tag{2.39}$$

erfüllt. Zudem wissen wir, wegen Satz 2.33 und wegen der Stetigkeit der Fortsetzung, dass es sich dabei um eine Isometrie handelt, dass also

$$\|\Phi\|_{L^2} = \|\,\mathrm{Int}^W(\Phi)\|_{\mathscr{M}_T^2} \qquad (\Phi \in L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0)) \tag{2.40}$$

gilt. Wir können nun für eine größere Klasse von Prozessen definieren was wir unter deren „stochastisches Integral bzgl. eines Q-Wiener Prozesses“ verstehen wollen.

Definition 2.41 (stochastisches Integral; L^2)**:** Für $\Phi \in L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0)$ heisst das H-wertige, quadratisch integrierbare und stetige Martingal

$$\mathrm{Int}^W(\Phi)$$

aus (2.38) *stochastisches Integral von Φ bzgl. des* Q-*Wiener Prozesses W.*

Notation: Wir schreiben auch

$$\text{(2.41)} \qquad \int_0^t \Phi(s)\mathrm{d}W(s) := \mathrm{Int}^W(\Phi)(t) \qquad (t \in [0,T])$$

für das stochastische Integral eines Prozesses $\Phi \in L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0)$ bzgl. W.

Sprechweise: Auch bei der Abbildung Int^W ist es üblich vom *stochastischen Integral* zu sprechen. Wenn wir sagen, das stochastische Integral sei linear bzw. stetig, so meinen wir damit, dass diese Abbildung linear bzw. stetig ist.
Widmen wir uns nun dem Beweis des obigen Satzes 2.39. Wir benötigen dafür das folgende Hilfsresultat.

Lemma 2.42: *Der separable Hilbertraum* $(L_2^0, \langle .,. \rangle_{L_2^0})$ *besitzt eine Orthonormalbasis aus Elementen aus* $L(U,H)_0$. *Insb. ist* $L(U,H)_0$ *ein dichter Untervektorraum von* L_2^0.

Beweis: Es sei $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine (nach Satz 1.21 existierende) Orthonormalbasis von U, so dass

$$\mathrm{Q}\, e_k = \lambda_k e_k \qquad (k \in \mathbb{N})$$

sowie

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0,$$

für eine Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ von Eigenwerten von $\mathrm{Q} \in \mathrm{Tr}(U)$, gilt. Dann ist der eindeutig bestimmte Operator $\mathrm{Q}^{1/2}$ gegeben durch:

$$\mathrm{Q}^{1/2}\, x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle_U \, \sqrt{\lambda_k} e_k \qquad (x \in U)\,,$$

und es gilt:

$$\mathrm{Q}^{1/2}\, e_k = \sqrt{\lambda_k}\, e_k \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Wir bezeichnen ferner mit $\{f_l : l \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von H und wollen die Behauptung des Satzes in vier Schritten beweisen.
Schritt 1: Wir zeigen als erstes, dass die Menge $\{\sqrt{\lambda_k}\, e_k : k \in \mathbb{N}, \lambda_k \neq 0\}$ eine Orthonormalbasis des Hilbertraumes $(U_0, \langle .,. \rangle_{U_0})$ ist. Wir fixieren dafür $k \in \mathbb{N}$ und stellen fest, dass, wenn $\lambda_k \neq 0$, für alle $u \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Q}^{1/2})$ gilt:

$$\sqrt{\lambda_k} \cdot \langle e_k, u \rangle_U = \langle \sqrt{\lambda_k}\, e_k, u \rangle_U = \langle \mathrm{Q}^{1/2}\, e_k, u \rangle_U = \langle e_k, \underbrace{\mathrm{Q}^{1/2}\, u}_{=0} \rangle_U = 0,$$

also $e_k \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Q}^{1/2})^\perp$. Ist andererseits $\lambda_k = 0$, so ist offenbar $e_k \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Q}^{1/2})$. Insgesamt erhalten wir, dass genau dann $e_k \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Q}^{1/2})^\perp$ gilt, wenn $\lambda_k \neq 0$. Wählen wir nun $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Q}^{1/2})^\perp$, so dass

$$\langle x, e_k \rangle_U = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } \lambda_k \neq 0,$$

so folgt mit dem oben Gezeigten:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle_U\, e_k = \sum_{\substack{k=1\\ \lambda_k=0}}^{\infty} \langle x, e_k \rangle_U\, e_k + \sum_{\substack{k=1\\ \lambda_k\neq0}}^{\infty} \langle x, e_k \rangle_U\, e_k = 0.$$

Wir haben damit nicht nur gezeigt, dass $\{e_k : k \in \mathbb{N}, \lambda_k \neq 0\} \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Q}^{1/2})^\perp$ ein Orthonormalsystem in $\mathrm{Ker}(\mathrm{Q}^{1/2})^\perp$ ist, sondern auch dessen Vollständigkeit nachgewiesen. Aus Satz 1.23 folgt dann, dass

$$\{\sqrt{\lambda_k}\, e_k : k \in \mathbb{N}, \lambda_k \neq 0\} = \{\mathrm{Q}^{1/2}\, e_k : k \in \mathbb{N}, \lambda_k \neq 0\}$$

eine Orthonormalbasis von $(U_0, \langle .,. \rangle_{U_0})$ ist.
Schritt 2: Mit Hilfe von Satz 1.14 folgern wir, dass

$$B_0 := \left\{ f_l \otimes \sqrt{\lambda_k}\, e_k : l \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, \lambda_k \neq 0 \right\}$$

eine Orthonormalbasis des Hilbertraumes $(L_2^0, \langle .,. \rangle_{L_2^0})$ ist.
Schritt 3: Wir wollen zeigen, dass diese Orthonormalbasis B_0 in $L(U,H)_0$ liegt. D.h., wir zeigen, dass für $l \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$, mit $\lambda_k \neq 0$, gilt:

$$f_l \otimes \sqrt{\lambda_k}\, e_k(.) := f_l \cdot \langle \sqrt{\lambda_k}\, e_k, . \rangle_{U_0} \in L(U,H)_0. \tag{2.42}$$

Fixieren wir dazu ein $l \in \mathbb{N}$ sowie ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_k \neq 0$. Für $x \in U_0$ gilt dann:

$$\begin{aligned} f_l \otimes \sqrt{\lambda_k}\, e_k(x) &= f_l \cdot \langle \sqrt{\lambda_k}\, e_k, x \rangle_{U_0} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot f_l \cdot \langle \lambda_k\, e_k, x \rangle_{U_0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot f_l \cdot \langle \mathrm{Q}\, e_k, x \rangle_{U_0} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot f_l \cdot \langle \mathrm{Q}^{1/2} \circ \mathrm{Q}^{1/2}\, e_k, x \rangle_{U_0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot f_l \cdot \langle \mathrm{Q}^{1/2}\, e_k, \mathrm{Q}^{1/2}\, x \rangle_{U_0} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot f_l \cdot \langle e_k, x \rangle_U. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Dabei haben wir vor allem die Tatsache benutzt, dass für $x = \mathrm{Q}^{1/2}\, z \in U_0$ mit $z \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Q}^{1/2})^\perp$ und $e_k \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Q}^{1/2})^\perp$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Q}^{1/2} \circ \mathrm{Q}^{1/2}\, e_k, x \rangle_{U_0} &= \langle \mathrm{Q}^{1/2} \circ \mathrm{Q}^{1/2}\, e_k, \mathrm{Q}^{1/2}\, z \rangle_{U_0} \\ &= \langle \mathrm{Q}^{1/2}\, e_k, z \rangle_U = \langle e_k, \mathrm{Q}^{1/2}\, z \rangle_U \\ &= \langle \mathrm{Q}^{1/2}\, e_k, \mathrm{Q}^{1/2} \circ \mathrm{Q}^{1/2}\, z \rangle_{U_0} = \langle \mathrm{Q}^{1/2}\, e_k, \mathrm{Q}^{1/2}\, x \rangle_{U_0}. \end{aligned}$$

Aus (2.43) folgt, dass

$$f_l \otimes \sqrt{\lambda_k} e_k(.) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot f_l \cdot \langle e_k, . \rangle_U \Big|_{U_0} \text{ für alle } l \in \mathbb{N} \text{ und } k \in \mathbb{N} \text{ mit } \lambda_k \neq 0,$$

und damit: $B_0 \subseteq L(U,H)_0$.
Schritt 4: Schließlich zeigen wir, dass die Menge

$$D := \mathrm{span} \left\{ f_l \otimes \sqrt{\lambda_k}\, e_k : l \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, \lambda_k \neq 0 \right\} = \mathrm{span}\, B_0 \subseteq L(U,H)_0$$

dicht in dem Hilbertraum $(L_2^0, \langle .,. \rangle_{L_2^0})$ liegt. Wegen dem in Schritt 3 Gezeigten und der Tatsache, dass $L(U,H)_0$ ein Untervektorraum von L_2^0 ist, folgt die Inklusion:

$$D = \mathrm{span}\, B_0 \subseteq L(U,H)_0.$$

Aufgrund der Vollständigkeit des Orthonormalsystems $B_0 =: \{\tilde{\Psi}_j : \ j \in \mathbb{N}\}$ von $(L_2^0, \langle ., . \rangle_{L_2^0})$ folgt, dass sich jedes $\Psi \in L_2^0$ schreiben lässt als

$$\Psi = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \Psi, \tilde{\Psi}_j \rangle_{L_2^0} \cdot \tilde{\Psi}_j = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{n} \langle \Psi, \tilde{\Psi}_j \rangle_{L_2^0} \cdot \tilde{\Psi}_j \Big)}_{\in D, \text{ für } n \in \mathbb{N}},$$

woraus sich die Dichtheit der Menge D – und damit auch von $L(U, H)_0$ – in L_2^0 unmittelbar ergibt. □

Beweis von Satz 2.39: Wir wollen die Behauptung in mehreren Schritten, durch sog. „Hochhangeln", beweisen. D.h. wir beginnen mit dem Nachweis, dass sich $\Phi \in L^2$ durch eine Folge $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}_T$ wie gewünscht approximieren lässt, sofern Φ eine einfache Struktur hat. In jedem weiteren Schritt erhöhen wir die Komplexität unseres Prozesses bis wir am Ende die Behauptung für beliebiges $\Phi \in L^2$ gezeigt haben.

Schritt 1: Wir betrachten zunächst einen Prozess von der Form:

$$\Phi = L \cdot \mathbb{1}_A, \text{ mit } L \in L(U, H)_0 \text{ und } A \in \mathcal{P}_T.$$

Fixieren wir $\varepsilon > 0$. Dann existieren – wie wir in Satz 1.43 nachgewiesen haben – endlich viele, paarweise disjunkte Mengen $A_1^\varepsilon, \ldots, A_N^\varepsilon \in \mathcal{G}_T$, für ein $N \in \mathbb{N}$, aus dem Erzeuger

$$\mathcal{G}_T = \Big\{ (s,t] \times F_s : \ 0 \leq s < t \leq T, F_s \in \mathcal{F}_s \Big\} \cup \Big\{ \{0\} \times F_0 : \ F_0 \in \mathcal{F}_0 \Big\}$$

der vorhersagbaren σ-Algebra, so dass

$$\mathbb{P}_T\bigg(\Big(A \setminus \bigcup_{i=1}^{N} A_i^\varepsilon \Big) \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i^\varepsilon \setminus A \Big) \bigg) < \varepsilon.$$

Betrachten wir den Prozess

$$\Psi^{(\varepsilon)} := \sum_{i=1}^{N} L \cdot \mathbb{1}_{A_i^\varepsilon},$$

so sehen wir, dass ein elementarer Prozess $\tilde{\Phi}^{(\varepsilon)} \in \mathcal{E}_T$ existiert, der sich von $\Psi^{(\varepsilon)}$ höchstens auf Mengen von der Form $\{0\} \times F_0$ mit $F_0 \in \mathcal{F}_0$ unterscheidet. Diese haben aber $\mathbb{P}_T$-Maß Null, d.h.

$$\mathbb{P}_T\left(\tilde{\Phi}^{(\varepsilon)} = \Psi^{(\varepsilon)} \right) = 1.$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}\left\|\Phi - \tilde{\Phi}^{(\varepsilon)}\right\|_{L^2} &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\Phi(s) - \tilde{\Phi}^{(\varepsilon)}(s)\right\|^2_{L_2^0} \lambda^1(\mathrm{d}s)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\Phi(s) - \Psi^{(\varepsilon)}(s)\right\|^2_{L_2^0} \lambda^1(\mathrm{d}s)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|L \cdot \left(\mathbb{1}_A(s) - \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{A_i^\varepsilon}(s)\right)\right\|^2_{L_2^0} \lambda^1(\mathrm{d}s)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \|L\|^2_{L_2^0} \cdot \left|\mathbb{1}_A(s) - \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{A_i^\varepsilon}(s)\right| \lambda^1(\mathrm{d}s)\right] \\ &= \|L\|^2_{L_2^0} \cdot \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\mathbb{1}_A(s) - \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^N A_i^\varepsilon}(s)\right| \lambda^1(\mathrm{d}s)\right] \\ &= \|L\|^2_{L_2^0} \cdot \mathbb{P}_T\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^N A_i^\varepsilon\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^N A_i^\varepsilon \setminus A\right)\right) \quad < \|L\|^2_{L_2^0} \cdot \varepsilon.\end{aligned}$$

Setzen wir:

$$\Phi_n := \tilde{\Phi}^{(1/n)} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

so erhalten wir eine Folge elementarer Prozesse, so dass:

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\Phi - \Phi_n\right\|_{L^2} = \lim_{n\to\infty} \left\|\Phi - \tilde{\Phi}^{(1/n)}\right\|_{L^2} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \|L\|^2_{L_2^0} = 0.$$

Wir haben also eine zu Φ passende Approximationsfolge $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{E}_T$ elementarer Prozesse gefunden, so dass (2.37) erfüllt ist.

Schritt 2: Wir erhöhen die Komplexität unseres Prozesses und betrachten

$$\Phi = L \cdot \mathbb{1}_A, \text{ mit } L \in L_2^0 \text{ und } A \in \mathscr{P}_T.$$

Wegen Lemma 2.42 wissen wir von der Existenz einer Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(U,H)_0$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \|L - L_n\|_{L_2^0} = 0.$$

Da die Konvergenz einer Folge deren Beschränktheit nach sich zieht, existiert zudem eine Konstante $C \ge 0$, so dass

$$\|L - L_n\|_{L_2^0} \le C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bezeichnen wir mit

$$\Psi_n := L_n \cdot \mathbb{1}_A \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

so liefern die obigen Überlegungen unter Zuhilfenahme des Lebesgue'schen Satzes über dominierte Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\Phi - \Psi_n\right\|_{L^2} = 0. \tag{2.44}$$

Wir wissen ferner, wegen dem in Schritt 1 Gezeigten, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(\Phi_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{E}_T$ existiert, so dass:

$$\lim_{i\to\infty} \left\|\Psi_n - \Phi_i^{(n)}\right\|_{L^2} = 0.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir dann ein $i_0 = i_0(n) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left\|\Psi_n - \Phi^{(n)}_{i_0(n)}\right\|_{L^2} \leq 2^{-n}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ beliebig existiert dann, wegen (2.44), ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$:

$$\|\Phi - \Phi^{(n)}_{i_0(n)}\|_{L^2} \leq \underbrace{\|\Phi - \Psi_n\|_{L^2}}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|\Psi_n - \Phi^{(n)}_{i_0(n)}\|_{L^2}}_{\leq 2^{-n}} \leq \varepsilon + 2^{-n},$$

und damit:

$$\lim_{n\to\infty} \|\Phi - \Phi^{(n)}_{i_0(n)}\|_{L^2} \leq \varepsilon \text{ für alle } \varepsilon > 0.$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\lim_{n\to\infty} \|\Phi - \Phi^{(n)}_{i_0(n)}\|_{L^2} = 0.$$

Indem wir $\Phi_n := \Phi^{(n)}_{i_0(n)} \in \mathcal{E}_T$ für $n \in \mathbb{N}$ setzen, erhalten wir eine Approximationsfolge elementarer Prozesse, welche (2.37) erfüllt.
Schritt 3: Wir betrachten Prozesse von der Form:

$$\Phi := \sum_{k=1}^{m} L_k \cdot \mathbb{1}_{A_k},$$

wobei $m \in \mathbb{N}$, $L_k \in L_2^0$ für $k = 1, \ldots, m$ und $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{P}_T$ paarweise disjunkt. Dann folgt die Existenz einer Folge $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}_T$, so dass (2.37) efüllt ist aus dem in Schritt 2 Gezeigten mit Hilfe der Dreiecksungleichung.
Schritt 4: Wir betrachten schließlich den allgemeinen Fall

$$\Phi \in L^2(\Omega_T, \mathcal{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0).$$

Aus Korollar B.18 wissen wir, dass eine Folge $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^*(\mathcal{P}_T, \mathcal{B}(L_2^0))$ einfacher $\mathcal{P}_T/\mathcal{B}(L_2^0)$-messbarer Abbildungen existiert, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \|\Psi_n - \Phi\|_{L^2} = 0.$$

Aufgrund des in Schritt 3 Gezeigten folgt die Behauptung mit der gleichen Technik, die in Schritt 2 angewandt wurde. □

Schritt 5: In einem letzten Schritt wollen wir die Klasse der Prozesse, die wir bzgl. eines Q-Wiener Prozesses integrieren können, noch einmal erweitern. Bei der bisherigen Konstruktion spielte neben der Vorhersagbarkeit des Integranden Φ auch dessen quadratische Bochner-Integrierbarkeit eine zentrale Rolle. Letzteres wollen wir nun abschwächen. Wir stellen dafür fest, dass – aufgrund des Satzes von Tonelli – für jeden vorhersagbaren und L_2^0-wertigen Prozess Φ die Abbildung

$$\Omega \ni \omega \mapsto \int_0^t \left\|\Phi(s,\omega)\right\|^2_{L_2^0} \lambda^1(\mathrm{d}s) \in [0, \infty]$$

für jedes $t \in [0, T]$ eine positive, numerische, $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable ist. Ferner wissen wir, dass für jedes $\Phi \in L^2(\Omega_T, \mathcal{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0)$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \int_0^T \left\|\Phi(s,\omega)\right\|^2_{L_2^0} \lambda^1(\mathrm{d}s) < \infty\right\}\right) = 1. \tag{2.45}$$

Die Rückrichtung gilt allerdings im Allgemeinen nicht, d.h. es gibt vorhersagbare Prozesse welche zwar die Bedingung (2.45) erfüllen, die aber nicht (quadratisch) integrierbar sind. Wir konzentrieren uns auf diese Prozesse, also auf die Menge

$$\mathcal{N}_W^T := \left\{ \Phi \colon \Omega_T \to L_2^0 \,\middle|\, \Phi \text{ vorhersagbar und } \mathbb{P}\Big(\Big\{ \int_0^T \big\|\Phi(s)\big\|_{L_2^0}^2 \, \lambda^1(\mathrm{d}s) < \infty \Big\}\Big) = 1 \right\}, \tag{2.46}$$

und wollen darauf einen Integralbegriff einführen, der auf der Menge $L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0)$ mit dem bisher konstruierten Begriff des stochastischen Integrals bzgl. eines Q-Wiener Prozesses zusammenfällt. Dies wollen wir mittels sog. *Lokalisation* realisieren. D.h. wir suchen zu einem jeden stochastischen Prozess $\Phi \in \mathcal{N}_W^T$ eine Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-Stoppzeiten, so dass die Prozesse

$$Y^{\sigma_n} := \mathbb{1}_{\{(s,\omega)\in[0,T]\times\Omega \,:\, 0<s\leq\sigma_n(\omega)\}} \cdot \Phi \qquad (n \in \mathbb{N})$$

vorhersagbar und quadratisch integrierbar sind, um anschließend das Integral des Prozesses Φ als Limes von $(\operatorname{Int}^W(Y^{\sigma_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ zu definieren. Bevor wir zeigen wie das im einzelnen funktioniert, führen wir die folgende Bezeichnung ein:

Notation: Es sei Φ ein vorhersagbarer, L_2^0-wertiger Prozess. Die Menge aller $\omega \in \Omega$, für die das (Lebesgue-)Integal $\int_0^T \|\Phi(s,\omega)\|_{L_2^0}^2 \, \lambda^1(\mathrm{d}s)$ endlich ist, bezeichnen wir im Folgenden mit:

$$\tilde{\Omega} := \tilde{\Omega}_\Phi := \left\{ \omega \in \Omega : \int_0^T \big\|\Phi(s,\omega)\big\|_{L_2^0}^2 \, \lambda^1(\mathrm{d}s) < \infty \right\} \in \mathscr{F}_T \subseteq \mathscr{A}.$$

Wir widmen uns nun der detaillierten Erweiterung des Integralbegriffs auf Prozesse aus $\mathcal{N}_W^T$ und beginnen mit der Definition einer (geeigneten) Folge von Stoppzeiten.

Definition 2.43: Es sei Φ ein L_2^0-wertiger, vorhersagbarer Prozess und $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir definieren die Abbildung:

$$\begin{array}{rccl} \tau_n^\Phi \colon & \Omega & \to & [0,T] \\ & \omega & \mapsto & \tau_n^\Phi(\omega), \end{array} \tag{2.47}$$

wobei

$$\tau_n^\Phi(\omega) := \inf\left\{ t \in [0,T] \,\middle|\, \int_0^t \big\|\Phi(s,\omega)\big\|_{L_2^0}^2 \, \lambda^1(\mathrm{d}s) > n \right\} \wedge T \qquad (\omega \in \Omega)\,. \tag{2.48}$$

Wir folgen dabei der Konvention, dass $\inf \emptyset = \infty$ gilt.

Analysieren wir zunächst die gerade definierte Folge reellwertiger Abbildungen.

Lemma 2.44: *Für jeden L_2^0-wertigen, vorhersagbaren Prozess Φ ist $(\tau_n^\Phi)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge von $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-Stoppzeiten und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$(0, \tau_n^\Phi] := \left\{ (s,\omega) \in [0,T] \times \Omega : \ 0 < s \leq \tau_n^\Phi(\omega) \right\} \in \mathscr{P}_T. \tag{2.49}$$

Ist $\Phi \in \mathcal{N}_W^T$, so existiert zu jedem $\omega \in \tilde{\Omega}_\Phi$ eine Zahl $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\tau_n^\Phi(\omega) = T \textit{ für alle } n \geq n_0(\omega).$$

Beweis: Es sei also Φ ein L_2^0-wertiger, vorhersagbarer Prozess sowie $n \in \mathbb{N}$ eine bliebige natürliche Zahl. Wir fixieren zunächst $t \in [0,T)$. Dann existiert ein $m_0 = m_0(t) \in \mathbb{N}$, so dass $t + \frac{1}{m_0} \in [0,T]$ und es gilt:

$$\begin{aligned}\{\tau_n^\Phi \leq t\} &= \bigcap_{m \geq m_0} \{\tau_n^\Phi < t + \frac{1}{m}\} \\ &= \bigcap_{m \geq m_0} \bigcup_{u \in \left[0, t+\frac{1}{m}\right)} \left\{ \int_0^u \left\|\Phi(s)\right\|_{L_2^0}^2 \lambda^1(\mathrm{d}s) > n \right\} \\ &= \bigcap_{m \geq m_0} \underbrace{\bigcup_{u \in \left[0, t+\frac{1}{m}\right) \cap \mathbb{Q}} \underbrace{\left\{ \int_0^q \left\|\Phi(s)\right\|_{L_2^0}^2 \lambda^1(\mathrm{d}s) > n \right\}}_{\in \mathscr{F}_q}}_{\in \mathscr{F}_{t+\frac{1}{m}}} \in \mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t,\end{aligned}$$

da wir die Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \in [0,T]}$ als normal und damit insb. als rechtsseitig stetig angenommen haben. Offenbar gilt gleichzeitig

$$\{\tau_n^\Phi \leq T\} = \Omega \in \mathscr{F}_T,$$

womit wir insgesamt gezeigt hätten, dass τ_n^Φ eine $(\mathscr{F}_t)_{t \in [0,T]}$-Stoppzeit ist. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}(0, \tau_n^\Phi] &= \{(s,\omega) \in [0,T] \times \Omega : \ 0 < s \leq \tau_n^\Phi(\omega)\} \\ &= \Big(\{(s,\omega) \in [0,T] \times \Omega : \ \tau_n^\Phi(\omega) < s \leq T\} \cup \{0\} \times \Omega\Big)^c \\ &= \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \underbrace{(q,T] \times \overbrace{\{\tau_n^\Phi \leq q\}}^{\in \mathscr{F}_q}}_{\in \mathscr{P}_T} \cup \underbrace{\{0\} \times \Omega}_{\in \mathscr{P}_T} \right)^c \in \mathscr{P}_T,\end{aligned}$$

womit wir auch die Gültigkeit von (2.49) nachgewiesen hätten. Da die Monotonie der Stoppzeitenfolge offensichtlich ist, gehen wir zum Nachweis der zweiten Aussage über und nehmen an, dass $\Phi \in \mathscr{N}_W^T$. Dann ist $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}_\Phi) = 1$ und zu jedem $\omega \in \tilde{\Omega}_\Phi$ existiert eine natürliche Zahl $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\int_0^T \left\|\Phi(s,\omega)\right\|_{L_2^0}^2 \lambda^1(\mathrm{d}s) \leq n_0(\omega).$$

Damit gilt aber auch

$$T \geq \tau_n^\Phi(\omega) \geq \tau_{n_0(\omega)}^\Phi(\omega) = T \text{ für alle } n \geq n_0(\omega),$$

woraus das Behauptete folgt. □

Wir schauen uns jetzt an, welche Eigenschaften die Folge $(\mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi]}\, \Phi)_{n \in \mathbb{N}}$ stochastischer Prozesse hat und ob sich die Stoppzeitenfolge $(\tau_n^\Phi)_{n \in \mathbb{N}}$ für unsere Zwecke eignet.

Lemma 2.45: *Es sei Φ ein L_2^0-wertiger, vorhersagbarer Prozess und $(\tau_n^\Phi)_{n \in \mathbb{N}}$ die in Definition 2.43 eingeführte Folge von $(\mathscr{F}_t)_{t \in [0,T]}$-Stoppzeiten. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ der stochastische Prozess*

$$Y^{\tau_n^\Phi} = \mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi]} \cdot \Phi$$

vorhersagbar und es gilt:

$$\int_0^T \mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi(\omega)]}(s) \cdot \|\Phi(s,\omega)\|_{L_2^0}^2 \, \lambda^1(\mathrm{d}s) \;\le\; n \qquad (\omega \in \Omega)\,.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt insgesamt:

$$Y^{\tau_n^\Phi} \in L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0). \tag{2.50}$$

Beweis: Wir fixieren $n \in \mathbb{N}$. Die Vorhersagbarkeit von $Y^{\tau_n^\Phi}$ folgt unmittelbar aus obigem Lemma 2.44. Sei nun $\omega \in \Omega$ beliebig, dann fest. Wegen der Definition der Stoppzeit τ_n^Φ ist

$$\int_0^t \|\Phi(s,\omega)\|_{L_2^0}^2 \, \lambda^1(\mathrm{d}s) \le n \text{ für alle } t \in [0, \tau_n^\Phi(\omega)).$$

Damit gilt auch

$$\int_0^{\tau_n^\Phi(\omega)-\frac{1}{k}} \|\Phi(s,\omega)\|_{L_2^0}^2 \, \lambda^1(\mathrm{d}s) \le n \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Weiter ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$s \mapsto \mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi(\omega)-\frac{1}{k}]} \cdot \|\Phi(s,\omega)\|_{L_2^0}^2$$

aufgrund des Satzes von Tonelli $\mathscr{B}([0,T])/\mathscr{B}([0,\infty))$-messbar. Da das Lebesgue'sche Maß einer einpünktigen Menge gleich Null ist, erhalten wir bei Anwendung des Satzes von Beppo Levi:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi(\omega)]}(s) \cdot \|\Phi(s,\omega)\|_{L_2^0}^2 \, \lambda^1(\mathrm{d}s) &= \int_0^T \mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi(\omega))}(s) \cdot \|\Phi(s,\omega)\|_{L_2^0}^2 \, \lambda^1(\mathrm{d}s) \\
&= \int_0^T \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi(\omega)-\frac{1}{k}]}(s) \cdot \|\Phi(s,\omega)\|_{L_2^0}^2 \, \lambda^1(\mathrm{d}s) \\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_0^T \mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi(\omega)-\frac{1}{k}]}(s) \cdot \|\Phi(s,\omega)\|_{L_2^0}^2 \, \lambda^1(\mathrm{d}s) \\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\int_0^{\tau_n^\Phi(\omega)-\frac{1}{k}} \|\Phi(s,\omega)\|_{L_2^0}^2 \, \lambda^1(\mathrm{d}s)}_{\le n,\text{ für alle } k\in\mathbb{N}} \quad \le n.
\end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme des Satzes von Tonelli folgt dann auch die quadratische Integrierbarkeit von $Y^{\tau_n^\Phi}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. □

Dieses Lemma erlaubt uns also, für jedes $\Phi \in \mathscr{N}_W^T$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ vom stochastischen Integral des Prozesses $Y^{\tau_n^\Phi}$, $\mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi]} \cdot \Phi)$, zu sprechen. Um den letzten Schritt der Erweiterung mittels Lokalisation durchführen zu können, benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

Lemma 2.46: *Es sei $\Phi \in L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0)$ sowie $\tau\colon \Omega \to [0,T]$ eine $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-Stoppzeit. Dann existiert eine $\mathbb{P}$-Nullmenge $N \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(N) = 0$, so dass für alle $\omega \in \Omega\backslash N$ gilt:*

$$\mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot \Phi)(t,\omega) = \mathrm{Int}^W(\Phi)(\tau(\omega) \wedge t, \omega) \qquad (t \in [0,T])\,. \tag{2.51}$$

Beweis: Wir merken zunächst zwei Sachen an. Erstens, dass sich genauso wie beim Nachweis von (2.49), zeigen lässt, dass für jede $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-Stoppzeit τ,

$$(0,\tau] := \Big\{(s,\omega) \in [0,T]\times\Omega:\ 0 < s \leq \tau(\omega)\Big\} \in \mathscr{P}_T,$$

gilt. Damit ist in der gegebenen Situation – berücksichtigt man die quadratische Integrierbarkeit des Prozesses Φ – die linke Seite der Formel (2.51) wohldefiniert. Zweitens, wissen wir um die Existenz einer Menge $\Omega_0 \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, so dass sowohl der Pfad $\mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau]}\cdot\Phi)(\,.\,,\omega)$ als auch $\mathrm{Int}^W(\Phi)(\tau(\omega)\wedge\,.\,,\omega)$ für jedes $\omega\in\Omega_0$ stetig ist. Da zudem die abzählbare Menge $\mathbb{Q}\cap[0,T]$ dicht in dem Interval $[0,T]$ liegt, können wir uns darauf beschränken zu zeigen, dass für jedes $t\in[0,T]$ eine – ggf. von t abhängige – $\mathbb{P}$-Nullmenge $N_t\in\mathscr{A}$, $\mathbb{P}(N_t)=0$, existiert, so dass

$$(*)\qquad \mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau]}\cdot\Phi)(t,\omega) = \mathrm{Int}^W(\Phi)(\tau(\omega)\wedge t,\omega) \qquad (\omega\in\Omega\backslash N_t)$$

gilt (siehe auch Lemma 2.17). Wir fixieren $t\in[0,T]$ und zeigen die Gültigkeit dieser Gleichheit $(*)$ in drei Schritten.
Schritt 1: Wir betrachten zunächst einen elementaren Prozess $\Phi\in\mathscr{E}_T$ sowie eine $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-Stoppzeit τ, welche nur endlich viele Werte annimmt und zeigen, dass in diesem Fall $(*)$ – mit einer $\mathbb{P}$-Nullemenge N_t – erfüllt ist.
Seien $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T$ für ein $k\in\mathbb{N}$ sowie $\Phi_m \in \mathscr{E}^*(\mathscr{F}_{t_m},\mathscr{B}(L(U,H)))$ für $m = 0,1,\ldots,k-1$, so dass

$$\Phi(s,\omega) = \sum_{m=0}^{k-1}\mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]}(s)\cdot\Phi_m(\omega) \qquad ((s,\omega)\in[0,T]\times\Omega)\,.$$

Ferner seien $0\leq a_1 < \cdots < a_n \leq T$ für ein $n\in\mathbb{N}$, sowie $A_i := \{\tau = a_i\}$ für $i = 1,\ldots,n$ mit $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$, so dass

$$\tau(\omega) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}(\omega)\cdot a_i \qquad (\omega\in\Omega)\,.$$

Da τ eine Stoppzeit ist, gilt:

$$A_i \in \mathscr{F}_{a_i} \text{ für alle } i\in\{1,\ldots,n\}.$$

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir,dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{(\tau,T]}(s,\omega)\cdot\Phi(s,\omega) &= \sum_{m=0}^{k-1}\mathbb{1}_{(\tau(\omega),T]}(s)\cdot\mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]}(s)\cdot\Phi_m(\omega)\\
&= \sum_{m=0}^{k-1}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}(\omega)\cdot\mathbb{1}_{(a_i,T]}(s)\cdot\mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]}(s)\cdot\Phi_m(\omega)\\
&= \sum_{m=0}^{k-1}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(t_m\vee a_i\,,\,t_{m+1}\vee a_i]}(s)\cdot\mathbb{1}_{A_i}(\omega)\cdot\Phi_m(\omega)\,.
\end{aligned}$$

Gleichzeitig gilt für $i\in\{1,\ldots,n\}$ und $m\in\{0,\ldots,k-1\}$ beliebig:

$$\mathbb{1}_{A_i}\Phi_m \in \mathscr{E}^*(\mathscr{F}_{a_i\vee t_m},\mathscr{B}(L(U,H))).$$

Also ist $\mathbb{1}_{(\tau,T]}\Phi$ ein elementarer Prozess. Zudem sieht man leicht, dass

$$\mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{\{0\}\times\Omega}\Phi) \equiv 0 \tag{2.52}$$

gilt. Insgesamt elauben uns diese Anmerkungen die folgende Rechnung:

$$\mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau]}\cdot\Phi)(t) = \mathrm{Int}^W\left(\Phi - \mathbb{1}_{(0,\tau]}\cdot\Phi - \mathbb{1}_{\{0\}\times\Omega}\cdot\Phi\right)(t)$$

und aufgrund der Linearität des stochastischen Integrals und (2.52):

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{Int}^W(\Phi)(t) - \mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau]}\cdot\Phi)(t)\\
&= \sum_{m=0}^{k-1}\Phi_m\Big(W(t_{m+1}\wedge t) - W(t_m\wedge t)\Big)\\
&\quad + \sum_{m=0}^{k-1}\sum_{n=1}^{n}\mathbb{1}_{A_i}\cdot\Phi_m\Big(W((t_{m+1}\vee a_i)\wedge t) - W((t_m\vee a_i)\wedge t)\Big)
\end{aligned}$$

und da $A_i = \{\tau = a_i\}$ für $i = 1,\dots,n$ und $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{k-1}\Phi_m\Big(W(t_{m+1}\wedge t) - W(t_m\wedge t)\Big)\\
&\quad + \sum_{m=0}^{k-1}\Phi_m\Big(W((t_{m+1}\vee\tau)\wedge t) - W((t_m\vee\tau)\wedge t)\Big)\\
&= \sum_{m=0}^{k-1}\Phi_m\Big(W(t_{m+1}\wedge t) - W(t_m\wedge t) - W((t_{m+1}\vee\tau)\wedge t) + W((t_m\vee\tau)\wedge t)\Big)\\
&= \sum_{m=0}^{k-1}\Phi_m\Big(W(t_{m+1}\wedge(\tau\wedge t)) - W(t_m\wedge(\tau\wedge t))\Big) = \mathrm{Int}^W(\Phi)(\tau\wedge t).
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Gültigkeit von $(*)$ für die angenommene Struktur von Φ und τ nachgewiesen (die Gleichheitszeichen in obiger Rechnung sind natürlich $\mathbb{P}$-f.s. zu verstehen).
Schritt 2: Wir erlauben nun, dass τ eine beliebige $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-Stoppzeit ist, behalten allerdings noch die Einschränkung $\Phi \in \mathscr{E}_T$ bei. Wir wollen zeigen, dass auch in diesem Fall eine $\mathbb{P}$-Nullmenge $N_t \in \mathscr{A}$ existiert, so dass $(*)$ gültig bleibt.
Wir betrachten dafür die nach Lemma 1.36 existierende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton gegen τ fallender $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-Stoppzeiten. Jede dieser Stoppzeiten τ_n nimmt nur endlich viele Werte an. Wir können also das in Schritt 1 Gezeigte anwenden, und erhalten die Existenz einer $\mathbb{P}$-Nullmenge $N_{1,t} \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(N_{1,t}) = 0$, so dass für alle $\omega \in \Omega\backslash N_{1,t}$ gilt:

$$\mathrm{Int}^W\left(\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\cdot\Phi\right)(t,\omega) = \mathrm{Int}^W(\Phi)(\tau_n(\omega)\wedge t,\omega) \qquad (n\in\mathbb{N}). \tag{2.53}$$

Gleichzeitig gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n(\omega) = \tau(\omega) \qquad (\omega\in\Omega). \tag{2.54}$$

Wegen der Stetigkeit von $\mathrm{Int}^W(\Phi)(\,.\,,\omega)$ für alle $\omega \in \Omega_0$, $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, gilt folglich für alle $\omega \in \Omega_0 \cap (\Omega \backslash N_{1,t})$:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \cdot \Phi)(t,\omega) - \mathrm{Int}^W(\Phi)(\tau(\omega) \wedge t, \omega) \right\|_H = 0. \tag{2.55}$$

Ferner gilt für alle $(s,\omega) \in [0,T] \times \Omega$, wegen (2.54):

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \mathbb{1}_{(\tau,\tau_n]}(s,\omega) \cdot \Phi(s,\omega) \right\|_{L_2^0} = 0$$

sowie

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \mathbb{1}_{(\tau,\tau_n]}(s,\omega) \cdot \Phi(s,\omega) \right\|_{L_2^0} \leq \left\| \Phi(s,\omega) \right\|_{L_2^0},$$

und da Φ quadratisch integrierbar ist, folgt mit dem Lebesgue'schen Satz über dominierte Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot \Phi - \mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \cdot \Phi \right\|_{L^2(L_2^0)} = 0. \tag{2.56}$$

Da Int^W eine lineare Isometrie ist, impliziert das:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\Big(\sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}\Big[\left\| \mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot \Phi)(s,\omega) - \mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \cdot \Phi)(s,\omega) \right\|_H^2 \Big] \Big)}_{= \left\| \mathrm{Int}^W\left(\mathbb{1}_{(0,\tau]}\cdot\Phi\right) - \mathrm{Int}^W\left(\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\cdot\Phi\right) \right\|^2_{\mathscr{M}_T^2}} = 0,$$

also gilt auch für unser $t \in [0,T]$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\left\| \mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot \Phi)(t,\omega) - \mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \cdot \Phi)(t,\omega) \right\|_H^2 \Big] = 0.$$

Diese $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}; H)$-Konvergenz garantiert nach Korollar B.15 die Existenz einer Teilfolge

$$\left(\mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau_{n_k}]} \cdot \Phi)(t) \right)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \left(\mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \cdot \Phi)(t) \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

welche $\mathbb{P}$-f.s. gegen $\mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot \Phi)(t)$ konvergiert. D.h. es existiert eine Menge $\Omega_{2,t} \in \mathscr{A}$ mit $\mathbb{P}(\Omega_{2,t}) = 1$, so dass für alle $\omega \in \Omega_{2,t}$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau_{n_k}]} \cdot \Phi)(t,\omega) - \mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot \Phi)(t,\omega) \right\|_H = 0. \tag{2.57}$$

Insgesamt folgt daraus und aus der Gültigkeit von (2.55) die Gleichheit $(*)$, sofern wir

$$N_{2,t} := (\Omega_0 \cap \Omega_{2,t})^c \cup N_{1,t}$$

für N_t einsetzen.
Schritt 3: Wir betrachten schließlich den allgemeinen Fall, $\Phi \in L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0)$.
Nach Satz 2.39 existiert eine Folge $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{E}_T$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \Phi_n - \Phi \right\|_{L^2(L_2^0)} = 0.$$

Da Int^W eine lineare Isometrie ist, hat das zur Folge, dass

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}\Big[\big\|\mathrm{Int}^W(\Phi_n)(s)-\mathrm{Int}^W(\Phi)(s)\big\|_H^2\Big]\Big)=0$$

gilt, und damit, wegen der Doob'schen Maximalungleichung (siehe Satz 1.57) auch:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[0,T]}\big\|\mathrm{Int}^W(\Phi_n)(s)-\mathrm{Int}^W(\Phi)(s)\big\|_H^2\Big]=0.$$

Unter Anwendung von Korollar B.15 erhalten wir daraus die Existenz einer Teilfolge $(\Phi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\subseteq(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie einer Menge $\Omega_3\in\mathscr{A}$ mit vollem Maß, $\mathbb{P}(\Omega_3)=1$, so dass

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{s\in[0,T]}\big\|\mathrm{Int}^W(\Phi_{n_k})(s,\omega)-\mathrm{Int}^W(\Phi)(s,\omega)\big\|_H\right)=0\qquad(\omega\in\Omega_3).$$

Dies impliziert aber auch:

$$\lim_{k\to\infty}\big\|\mathrm{Int}^W(\Phi_{n_k})(\tau(\omega)\wedge t,\omega)-\mathrm{Int}^W(\Phi)(\tau(\omega)\wedge t,\omega)\big\|_H=0\qquad(\omega\in\Omega_3).\tag{2.58}$$

Durch analoge Überlegungen können wir wegen der Gültigkeit von

$$0\le\lim_{k\to\infty}\big\|\mathbb{1}_{(0,\tau]}\cdot\Phi_{n_k}-\mathbb{1}_{(0,\tau]}\cdot\Phi\big\|_{L^2(L_2^0)}\le\lim_{k\to\infty}\big\|\Phi_{n_k}-\Phi\big\|_{L^2(L_2^0)}=0,$$

eine Teilfolge $(\Phi_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}\subseteq(\Phi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sowie eine Menge $\Omega_4\in\mathscr{A}$ mit $\mathbb{P}(\Omega_4)=1$ finden, so dass

$$\lim_{j\to\infty}\big\|\mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau]}\cdot\Phi_{n_{k_j}})(t,\omega)-\mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau]}\cdot\Phi)(t,\omega)\big\|_H=0\qquad(\omega\in\Omega_4).\tag{2.59}$$

Wegen dem in Schritt 2 gezeigten wissen wir gleichzeitig, dass für jedes $j\in\mathbb{N}$ eine $\mathbb{P}$-Nullmenge $N_{2,t,j}\in\mathscr{A}$, $\mathbb{P}\big(N_{2,t,j}\big)=0$, existiert, so dass

$$\mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau]}\cdot\Phi_{n_{k_j}})(t,\omega)=\mathrm{Int}^W(\Phi_{n_{k_j}})(\tau(\omega)\wedge t,\omega)\qquad\big(\omega\in\Omega\backslash N_{2,t,j}\big).\tag{2.60}$$

Indem wir

$$N_{3,t}:=\big(\Omega_3\cap\Omega_4\big)^c\cup\bigcup_{j=1}^{\infty}N_{2,t,j}$$

setzen, erhalten wir eine $\mathbb{P}$-Nullmenge und wegen (2.58), (2.59) und (2.60) gilt:

$$\mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau]}\cdot\Phi)(t,\omega)=\mathrm{Int}^W(\Phi)(\tau(\omega)\wedge t,\omega)\qquad(\omega\in\Omega\backslash N_{3,t}),$$

woraus insgesamt die Behauptung folgt. □

Bemerkung/Definition 2.47 (stochastisches Integral; $\mathscr{N}_W^T$**):** Gegeben sei $\Phi\in\mathscr{N}_W^T$ sowie die entsprechende Stoppzeiten-Folge $(\tau_n^\Phi)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Definition 2.43.

i.) Es seien $n,m\in\mathbb{N}$ beliebig mit $m<n$. Dann gibt es – nach obigem Lemma 2.46 – eine $\mathbb{P}$-Nullmenge $N_{n,m}\in\mathscr{A}$, $\mathbb{P}(N_{n,m})=0$, so dass für alle $\omega\in\Omega\backslash N_{n,m}$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\{\tau_m^\Phi\ge t\}}(\omega)\cdot\mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi]}\cdot\Phi)(t,\omega)&=\mathbb{1}_{\{\tau_m^\Phi\ge t\}}(\omega)\cdot\mathrm{Int}^W\big(\underbrace{\mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi]}\cdot\Phi}_{\in L^2(\mathscr{P}_T;L_2^0)}\big)(\tau_m^\Phi(\omega)\wedge t,\omega)\\&=\mathbb{1}_{\{\tau_m^\Phi\ge t\}}(\omega)\cdot\mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi]}\cdot\Phi\cdot\mathbb{1}_{(0,\tau_m^\Phi]})(t,\omega)\\&=\mathbb{1}_{\{\tau_m^\Phi\ge t\}}(\omega)\cdot\mathrm{Int}^W(\mathbb{1}_{(0,\tau_m^\Phi]}\cdot\Phi)(t,\omega)\qquad(t\in[0,T]).\end{aligned}$$

Indem wir

$$N_{ges} := \bigcup_{\substack{n,m\in\mathbb{N} \\ n<m}} N_{n,m}$$

setzen, erhalten wir eine $\mathbb{P}$-Nullmenge, $\mathbb{P}(N_{ges}) = 0$, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ und alle $\omega \in \Omega \backslash N_{ges}$ gilt:

$$\mathbb{1}_{\{\tau_m^\Phi \geq t\}}(\omega) \cdot \operatorname{Int}^W (\mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi]}\Phi)(t, \omega) = \mathbb{1}_{\{\tau_m^\Phi \geq t\}}(\omega) \cdot \operatorname{Int}^W (\mathbb{1}_{(0,\tau_m^\Phi]}\Phi)(t, \omega) \quad (t \in [0, T]) .$$

Insbesondere gilt für alle $\omega \in \Omega \backslash N_{ges}$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$:

$$\mathbb{1}_{\{\tau_m^\Phi \geq T\}}(\omega) \cdot \operatorname{Int}^W (\mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi]}\Phi)(t, \omega) = \mathbb{1}_{\{\tau_m^\Phi \geq T\}}(\omega) \cdot \operatorname{Int}^W (\mathbb{1}_{(0,\tau_m^\Phi]}\Phi)(t, \omega) \text{ für alle } t \in [0, T].$$

ii.) Betrachten wir nun den $\mathbb{P}$-f.s., simultan über alle $t \in [0, T]$, gebildeten Grenzwert

$$\operatorname{Int}_\Phi^W(t) := \lim_{n\to\infty} \Big(\operatorname{Int}^W (\mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi]}.\Phi)(t) \Big), \tag{2.61}$$

Da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\tau_n^\Phi \geq T\} = \tilde{\Omega}_\Phi$ mit $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}_\Phi) = 1$ gilt, ist der dadurch definierte stochastische Prozess $(\operatorname{Int}_\Phi^W(t))_{t\in[0,T]}$, wegen dem in Teil *i.)* Gezeigten, bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmt. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ gilt $\mathbb{P}$-f.s.:

$$\mathbb{1}_{\{\tau_m^\Phi \geq T\}}\operatorname{Int}_\Phi^W(t) = \mathbb{1}_{\{\tau_m^\Phi \geq T\}} \operatorname{Int}^W (\mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi]}\Phi)(t) \text{ für alle } t \in [0, T]. \tag{2.62}$$

iii.) Für $\Phi \in \mathcal{N}_W^T$ nennen wir den (bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmten) stochastischen Prozess

$$(\operatorname{Int}_\Phi^W(t))_{t\in[0,T]} \tag{2.63}$$

aus (2.61) *stochastisches Integral von Φ bzgl. des* Q-*Wiener Prozesses W.*

Notation: Wir schreiben auch

$$\int_0^t \Phi(s)\,\mathrm{d}W(s) := \operatorname{Int}_\Phi^W(t) \qquad (t \in [0, T]) .$$

Gelegentlich schreiben wir auch $\mathcal{N}_W^T(H)$ anstelle von $\mathcal{N}_W^T$.

iv.) Mit Hilfe des Resultats aus Lemma 2.46 lässt sich auch zeigen, dass wir für $(\tau_n^\Phi)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-Stoppzeiten-Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in die obige Formel einsetzen können, sofern diese $\mathbb{P}$-f.s. monoton gegen $T > 0$ steigt und $\mathbb{1}_{(0,\sigma_n]}\Phi \in \mathcal{N}_W^T$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt (vgl. [16, Remark 2.3.10; S. 34]).

v.) Der stochastische Prozesses $\operatorname{Int}_\Phi^W$ hat $\mathbb{P}$-f.s. stetige Trajektorien. Da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\tau_n^\Phi \geq T\} = \tilde{\Omega}_\Phi$ mit $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}_\Phi) = 1$ gilt, folgt dies aus (2.62) und der Tatsache, dass der auf der rechten Seite dieser Gleichheit stehende Prozess $\mathbb{P}$-f.s. stetige Pfade besitzt.

vi.) Fixieren wir $m \in \mathbb{N}$, so gilt, wegen (2.63):

$$\operatorname{Int}_\Phi^W(\tau_m^\Phi \wedge t) = \lim_{n\to\infty} \Big(\operatorname{Int}^W (\mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi]}\Phi)(\tau_m^\Phi \wedge t) \Big)$$

und unter Anwendung des Lemmas 2.46:

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(\mathrm{Int}^W (\mathbb{1}_{(0,\tau_n^\Phi]} \mathbb{1}_{(0,\tau_m^\Phi]} \Phi)(t) \Big) = \mathrm{Int}^W (\mathbb{1}_{(0,\tau_m^\Phi]} \Phi)(t) \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.})\,.$$

Da $\mathrm{Int}^W (\mathbb{1}_{(0,\tau_m^\Phi]} \Phi)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein Martingal ist (und die Filtration als normal angenommen wurde), ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ der stochstische Prozess $(\mathrm{INT}_\Phi^W(\tau_m^\Phi \wedge t))_{t\in[0,T]}$ ebenfalls ein Martingal. Also ist INT_Φ^W ein lokales Martingal.

Wir sind nun mit der Konstruktion des stochastischen Integrals bzgl. eines Q-Wiener Prozesses (nach Itô) fertig und wissen, was unter dem Term

$$\int_0^{\cdot} \Phi(s)\,\mathrm{d}W(s)$$

für $\Phi \in \mathcal{N}_W^T$ zu verstehen ist.

2.2.2 Ausgewählte Eigenschaften

Bevor wir zur Betrachtung stochastischer partieller Differentialgleichungen übergehen, wo stochastische Integrale die Rolle des Störterms einnehmen werden, präsentieren wir zwei wichtige Eigenschaften des stochastischen Integrals, die wir im späteren Verlauf der Arbeit benutzen werden. Entsprechende Literaturhinweise werden für die jeweiligen Beweise angegeben. Die Notationen des vorherigen Kapitels werden übernommen.
In Analogie zur Invarianz des Bochner-Integrals unter linearen Transformationen, lässt sich für das Itô-Integral folgendes zeigen.

Satz 2.48: *Es sei Φ ein L_2^0-wertiger, bzgl. W stochastisch integrierbarer Prozess, $(\tilde{H}, \|.\|_{\tilde{H}})$ ein weiterer separabler Hilbertraum sowie $L \in L(H, \tilde{H})$. Dann ist $(L(\Phi(t)))_{t\in[0,T]}$ ein $L_2(U_0, \tilde{H})$-wertiger, bzgl. W stochastisch integrierbarer Prozess und es gilt:*

$$L\left(\int_0^T \Phi(t)\,\mathrm{d}W(t)\right) = \int_0^T L(\Phi(t))\,\mathrm{d}W(t) \qquad (\mathbb{P}\text{-}f.s.)\,.$$

Beweis: [siehe [16, Lemma 2.4.1]] □

Die folgende Ungleichung werden wir im späteren Verlauf der Arbeit ebenfalls benutzen.

Satz 2.49: *Für $\Phi \in L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2(U_0, \mathbb{R}))$ gilt:*

$$\mathbb{E}\left[\left| \int_0^T \Phi(s)\,\mathrm{d}W(s) \right|\right] \le 3 \cdot \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{L_2(U_0,\mathbb{R})}\,\mathrm{d}s \right)^{1/2}\right].$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus der Burkholder-Davis-Gundy-Ungleichung für reellwertige stetige lokale Martingale (vgl. [16, Proposition D.5]) unter Zuhilfenahme von [16, Lemma 2.4.3]. □

Kapitel 3

Stochastische Evolutionsgleichungen

In diesem Kaptitel wollen wir stochastische Evolutionsgleichungen, d.h. stochastische partielle Differentialgleichungen der Form

$$(\bullet) \qquad u(t) = u_0 + \int_0^t A(s, u(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t B(s, u(s))\,\mathrm{d}W(s) \qquad (t \in [0, T])$$

betrachten. Der hier verfolgte Ansatz orientiert sich an der aus dem deterministischen Kontext bekannten Variationsformulierung. Als Pionierarbeiten in diesem Bereich sind insbesondere [13], [15] sowie [19] zu erwähnen. Wird keine weitere Quelle angegeben, so stammen die nun folgenden Resultate aus der Arbeit [10] von I. Gyöngy und A. Millet und der dort angegebenen Literatur.
Für einen beliebigen normierten Raum $\mathbb{U}$ bezeichnen wir mit $\|.\|_{\mathbb{U}}$ stets die darauf definierte Norm und mit ${}_{\mathbb{U}}\langle ., . \rangle_{\mathbb{U}^*}$ die duale Paarung zwischen $\mathbb{U}$ und seinem Dualraum $\mathbb{U}^*$. Ist $\mathbb{U}$ ein Hilbertraum, welcher mit einem Skalarprodukt $\langle ., . \rangle_{\mathbb{U}}$ versehen ist, so soll stets $\|.\|_{\mathbb{U}} := \sqrt{\langle ., . \rangle_{\mathbb{U}}}$ gelten.

3.1 Eine Klasse stochastischer partieller Differentialgleichungen

In einem ersten Abschnitt wollen wir bestimmte Bedingungen an die einzelnen Bausteine der Gleichung $(\bullet)$ stellen, welche im weiteren Verlauf der Arbeit gelten sollen. Ferner wird ein Lösungsbegriff eingeführt, so dass in der beschriebenen Situation eine eindeutige Lösung existiert. Schließlich schränken wir die Klasse der betrachteten Differentialgleichungen weiter ein, indem wir Regularitätsbedingungen an die Operatoren A und B und an die Lösung selbst stellen. Diese werden bei einer späteren Approximation der exakten Lösung eine wichtige Rolle spielen.

Die Standard-Bedingungen in der Variationsformulierung

Beginnen wir mit der Beschreibung des Settings. In Gleichung $(\bullet)$ soll $W = (W(t))_{t\in[0,T]}$ eine d_1-dimensionale Standard-Brown'sche Bewegung bzgl. einer normalen Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ mit Zeitmenge $[0, T]$ sein. Mit $d_1 \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir eine beliebige natürliche Zahl, während $T \in (0, \infty)$ eine beliebige positive Zahl ist. Die

Abbildung $u_0 \colon \Omega \to H$ sei eine beliebige $\mathscr{F}_0/\mathscr{B}(H)$-messbare Zufallsvariable. Weiter sei

$$V \overset{j}{\hookrightarrow}_{\mathrm{D}} H \cong H^* \overset{j'}{\hookrightarrow}_{\mathrm{D}} V^*.$$

ein Gelfand-Dreier (vgl. Anghang C, insbesondere Definition C.8 und Bemerkung C.9). Wegen der Stetigkeit der Einbettung von V in H, existiert eine Konstante $C > 0$, so dass $\|v\|_H \leq C \cdot \|v\|_V$ für alle $v \in V$ gilt. Diese wollen wir im Folgenden ohne Einschränkung als $C = 1$ annehmen. Ferner handele es sich bei A in der Gleichung ($\bullet$) um eine V^*-wertige Abbildung

$$A\colon\ [0,T] \times \Omega \times V \to V^*,$$

welche $\mathscr{P}_T \otimes \mathscr{B}(V)/\mathscr{B}(V^*)$-messbar ist, während

$$B\colon\ [0,T] \times \Omega \times V \to L_2(\mathbb{R}^{d_1}, H)$$

eine $\mathscr{P}_T \otimes \mathscr{B}(V)/\mathscr{B}(L_2(\mathbb{R}^{d_1}, H))$-messbare Abbildung sei. Bevor wir weitere Bedingungen an diese beiden Prozesse stellen, wollen wir einige Anmerkungen machen.

Bemerkung 3.1: *i.)* Eingebettet in den Kontext der vorangegangenen Kaptiel, haben wir hier also einen U-wertigen Q-Wiener Prozess $W = (W(t))_{t\in[0,T]}$, wobei $U = \mathbb{R}^{d_1}$ und $\mathrm{Q} = \mathrm{Id}$ gilt. Dieser lässt sich in d_1 unabhängige reellwertige Standard-Brown'sche Bewegungen zerlegen, die wir im Folgenden mit $W^{(k)} = (W^{(k)}(t))_{t\in[0,T]}$ für $k = 1, \dots, d_1$ bezeichnen wollen:

$$W(t) = \sum_{k=1}^{d_1} W^{(k)}(t) \cdot e_k \qquad (t \in [0,T]),$$

wobei wir für $k = 1, \dots, d_1$ mit e_k den k-ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^{d_1}$ bezeichnen. Da $\mathbb{R}^{d_1}$ endlich-dimensional und $\mathrm{Q} = \mathrm{Id}$ ist, gilt $L_2(\mathbb{R}^{d_1}, H) = L(\mathbb{R}^{d_1}, H) = L_2^0$.

ii.) Ist $S \in L_2(\mathbb{R}^{d_1}, H)$, so existieren eindeutig bestimmte $S_k \in L_2(\mathbb{R}, H)$ sowie eindeutig bestimmte $h_k \in H$ für $k = 1, \dots, d_1$, so dass für beliebiges $x = (x_1, \dots, x_{d_1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{d_1}$ gilt:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{d_1} S_k(x_k) = \sum_{k=1}^{d_1} x_k \cdot h_k.$$

Für die Hilbert-Schmidt-Norm gilt dann:

$$\|S\|^2_{L_2(\mathbb{R}^{d_1},H)} = \sum_{k=1}^{d_1} \|S_k\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)} = \sum_{k=1}^{d_1} \|h_k\|^2_H.$$

Da die Rückrichtung offenbar ebenfalls gilt, sehen wir, dass $L_2(\mathbb{R}^{d_1}, H)$ isometrisch isomorph zu H^{d_1} bzw. zu $L_2(\mathbb{R}, H)^{d_1}$ ist.

iii.) Ist $\Phi\colon\ [0,T] \times \Omega \to L_2(\mathbb{R}^{d_1}, H) \cong H^{d_1}$ ein bzgl. W integrierbarer stochastischer Prozess und sind $\Phi_k\colon\ [0,T] \times \Omega \to L_2(\mathbb{R}, H) \cong H$ für $k = 1, \dots, d_1$ die entsprechenden Koordinatenprozesse nach *ii.)*, so können wir das stochastische Integral von Φ bzgl. W auch wie folgt schreiben:

$$\int_0^t \Phi(s)\,\mathrm{d}W(s) = \sum_{k=1}^{d_1} \int_0^t \Phi_k(s)\,\mathrm{d}W^{(k)}(s) \qquad (t \in [0,T]).$$

Dies lässt sich unter Zuhlifenahme von Satz 2.48 leicht nachweisen.

Notation: Wir schreiben im Folgenden B_k für $k = 1, \ldots, d_1$ sowohl für die $L_2(\mathbb{R}, H)$- als auch für die H-wertigen Koordinatenabbildungen von B aus $(\bullet)$.

Kommen wir nun zurück zur Beschreibung des Settings. Wir nehmen für den weiteren Verlauf der Arbeit an, dass Konstanten $\mu > 0$, $K_0 \geq 0$, $K_1 \geq 0$, $K_2 \geq 0$ sowie ein nichtnegativer, $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$-adaptierter stochastischer Prozess $f\colon [0,T] \times \Omega \to [0, \infty)$ mit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right] < \infty$$

existieren, so dass die Abbildungen A und B aus $(\bullet)$ die folgenden Bedingungen [A1]-[A4] simultan erfüllen:
[A1] (Schwache Monotonie von (A,B)) $\mathbb{P}$-f.s. gilt: Für alle $t \in [0,T]$ und $u, v \in V$ ist

$$2\,{}_V\langle u - v, A(t,u) - A(t,v)\rangle_{V^*} + \sum_{k=1}^{d_1} \|B_k(t,u) - B_k(t,v)\|_H^2 \leq K_0\,\|u - v\|_H^2.$$

[A2] (Koerzivität von (A,B)) $\mathbb{P}$-f.s. gilt: Für alle $t \in [0,T]$ und $u \in V$ ist

$$2\,{}_V\langle u, A(t,u)\rangle_{V^*} + \sum_{k=1}^{d_1} \|B_k(t,u)\|_H^2 \leq -\mu\,\|u\|_V^2 + K_0\,\|u\|_H^2 + f(t).$$

[A3] (Wachstum von A und B) $\mathbb{P}$-f.s. gilt: Für alle $t \in [0,T]$ und $u \in V$ ist

$$\|A(t,u)\|_{V^*}^2 \leq K_1\,\|u\|_V^2 + f(t)$$

sowie

$$\sum_{k=1}^{d_1} \|B_k(t,u)\|_H^2 \leq K_2\,\|u\|_V^2 + f(t).$$

[A4] (Hemistetigkeit von A) $\mathbb{P}$-f.s. gilt: Für alle $t \in [0,T]$ und $u, v, w \in V$ ist

$$\lim_{\varepsilon\to 0} {}_V\langle w, A(t, u + \varepsilon v)\rangle_{V^*} = {}_V\langle w, A(t,u)\rangle_{V^*}.$$

Bemerkung 3.2: Ist $u\colon [0,T] \times \Omega \to V$ ein vorhersagbarer Prozess, welcher

$$\int_0^T \|u(s)\|_V^2\,\mathrm{d}s < \infty \qquad (\mathbb{P}\text{-f.s.})$$

erfüllt, so folgt für A und B, wegen der Bedingung [A3]:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T \|A(s,u(s))\|_{V^*}^2\,\mathrm{d}s\right] &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T K_1\,\|u(s)\|_V^2 + f(s)\,\mathrm{d}s\right]\\ &= K_1\,\mathbb{E}\left[\int_0^T \|u(s)\|_V^2\,\mathrm{d}s\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s\right] < \infty.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass $\mathbb{P}$-f.s. gilt: Für alle $t \in [0,T]$ ist das Bochner-Integral

$$\int_0^t A(s,u(s))\,\mathrm{d}s \in V^*$$

erklärt. Gleichzeitig ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T \|B(s,u(s))\|^2_{L_2(\mathbb{R}^{d_1},H)}\,\mathrm{d}s\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \sum_{k=1}^{d_1} \|B_k(t,u)\|^2_H\,\mathrm{d}s\right]\\ &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T K_2\,\|u(s)\|^2_V + f(s)\,\mathrm{d}s\right]\\ &= K_2\,\mathbb{E}\left[\int_0^T \|u(s)\|^2_V\,\mathrm{d}s\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s\right] < \infty,\end{aligned}$$

woraus folgt, dass $B(.,u(.)) \in L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2^0)$ gilt. Insbesondere ist der stochastische Prozess $B(.,u(.))$ bzgl. W stochastisch integrierbar. Die Vorhersagbarkeit dieses Prozesses $B(.,u(.))$ folgt dabei aus der Vorhersagbarkeit von $u(.)$ und der $\mathscr{P}_T \otimes \mathscr{B}(V)/\mathscr{B}(L_2(\mathbb{R}^{d_1},H))$-Messbarkeit von $B(.,.,.)$.

Der Lösungsbegriff

Wir wollen nun definieren was wir in diesem Setting unter einer Lösung der Gleichung (•) verstehen.

Definition 3.3 ((eindeutige) Lösung von (•))**:** Ein stochastischer Prozess

$$u\colon\ [0,T]\times\Omega \to H$$

heisst *Lösung* von (•), wenn

- $(u(t))_{t\in[0,T]}$ bzgl. der Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ adaptiert ist,
- $t \mapsto u(t,\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ stetig ist,
- $\mathbb{P}_T(\{u \in V\}) = \mathrm{T}$, d.h. für λ^1-fast alle $t \in [0,T]$ ist $\mathbb{P}(\{u(t) \in V\}) = 1$,
- $\mathbb{P}$-f.s.
  $$\int_0^T \left\|u(s)\cdot \mathbb{1}_{\{u\in V\}}(s)\right\|_V^2 \mathrm{d}s < \infty$$
  ist sowie
- $\mathbb{P}$-f.s. gilt: Für alle $t \in [0,T]$ und $v \in V$ ist
  $$\langle v,u(t)\rangle_H = \langle v,u_0\rangle_H + \int_0^t {}_V\langle v, A(s,\overline{u}(s))\rangle_{V^*}\,\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{d_1}\int_0^t \langle v, B_k(s,\overline{u}(s))\rangle_H\,\mathrm{d}W^{(k)}(s), \tag{3.1}$$
  wobei $\overline{u}$ eine beliebige V-wertige $\mathbb{P}_T$-Version von u ist.

Wir sagen die Lösung von (•) sei *eindeutig* bestimmt, falls für zwei beliebige Lösungen u und v von (•)

$$\mathbb{P}\left(\{u(t) = v(t) \text{ für alle } t \in [0,T]\,\}\right) = 1$$

gilt, d.h. falls sie bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmt ist.

Bemerkung 3.4: Die in der obigen Definition benutzten Ausdrücke sind alle wohldefiniert. Die ersten beiden Punkte garantieren nämlich, dass u ein vorhersagbarer Prozess ist (vgl. Bemerkung 1.42). Damit ist auch $\{u \in V\} \in \mathscr{P}_T$ und die Ausdrücke aus der dritten und vierten Bedingung sind wohldefiniert (siehe auch Bemerkung C.7). Wegen der Bemerkung 3.2 sowie der Sätze B.21 und 2.48 ist auch (3.1) wohldefiniert, wobei wir unter einer $\mathbb{P}_T$-Version $\overline{u}$ von u einen vorhersagbaren Prozess verstehen, welcher $\mathbb{P}_T(\{u = \overline{u}\}) = 1$ efüllt.

Notation: Wir werden im weiteren Verlauf der Arbeit jede $\mathbb{P}_T$-Version und jede Modifikation einer Lösung u von Gleichung ($\bullet$) ebenfalls mit u bezeichnen, sofern aus dem Kontext deutlich wird was gemeint ist.

Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung im oben beschriebenen Setting liefert der folgende Satz.

Satz 3.5: *Gegeben sei die oben beschriebene Situation. Dann existiert eine (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutige Lösung u von* ($\bullet$)*. Gilt zudem* $\mathbb{E}[\|u_0\|_H^2] < \infty$*, so existiert eine lediglich von* λ*,* K_0 *und* K_2 *abhängige Konstante* $C > 0$*, so dass*

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_H^2\Big] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \|u(s)\|_V^2 \,\mathrm{d}s\right] \leq C\,\mathbb{E}\left[\|u_0\|_H^2\right] + C\,\mathbb{E}\left[\int_0^T (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t\right] < \infty.$$

Beweis: [siehe [13], [15] sowie [19]] □

Regularitätsbedingungen

Um im späteren Verlauf der Arbeit die Konvergenzrate eines impliziten Approximationsschemas abschätzen zu können, nehmen wir an, dass die betrachtete Gleichung ($\bullet$) weitere Bedingungen erfüllt. Wir nehmen an, es gebe zwei weitere separable Hilberträume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{H}$, so dass

$$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow V$$

gilt, wobei „$\hookrightarrow$“ stetig eingebettet bedeutet (siehe auch Anhang C). Neben den bisher an die Gleichung ($\bullet$) gestellten Bedingungen gehen wir dann von der Existenz zweier Konstanten $K \geq 0$ und $M \geq 0$ aus, so dass folgende Regularitätsbedingungen erfüllt sind:

[R1] Es gilt $u_0(\omega) \in V$ für alle $\omega \in \Omega$ und es existiert eine eindeutige Lösung u von ($\bullet$), welche $\mathbb{P}_T$-f.ü. Werte in $\mathcal{V}$ annimmt. Zudem ist

$$\mathbb{E}[\|u_0\|_V^2] < \infty \qquad \text{sowie} \qquad \mathbb{E}\left[\int_0^T \|u(s)\|_{\mathcal{V}}^2 \mathrm{d}s\right] =: r_1 < \infty.$$

[R2] Es existiert eine eindeutige Lösung u von ($\bullet$), welche eine vorhersagbare $\mathcal{H}$-wertige Modifikation besitzt und es gilt:

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[\|u(t)\|_{\mathcal{H}}^2] =: r_2 < \infty.$$

[R3] $\mathbb{P}$-f.s. gilt: Für alle $t \in [0,T]$, $v \in \mathcal{V}$ und $u \in \mathcal{H}$ sind $A(t,v) \in V$ und $B_k(t,u) \in V$ für $k = 1,\ldots,d_1$ und es gilt:

$$\|A(t,v)\|_V^2 \leq K\,\|v\|_{\mathcal{V}}^2 + \xi(t) \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{d_1} \|B_k(t,u)\|_V^2 \leq K\,\|u\|_{\mathcal{H}}^2 + \eta(t).$$

Dabei bezeichnen ξ und η zwei reellwertige, nichtnegative stochastische Prozesse, so dass

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \xi(s)\,\mathrm{d}s\right] \leq M \qquad \text{sowie} \qquad \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[\eta(t)] \leq M.$$

[R4] Es existiert eine Konstante $\nu \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ und eine nichtnegative Zufallsvariable $\eta\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ mit $\mathbb{E}[\eta] \leq M$, so dass $\mathbb{P}$-f.s. gilt: Für alle $0 \leq s < t \leq T$ ist

$$\|A(s,v) - A(t,v)\|_V^2 \leq (K\|v\|_{\mathcal{V}}^2 + \eta)|t-s|^{2\nu} \text{ für alle } v \in \mathcal{V}$$

sowie

$$\sum_{k=1}^{d_1} \|B_k(s,u) - B_k(t,u)\|_V^2 \leq (K\|u\|_{\mathcal{V}}^2 + \eta)|t-s|^{2\nu} \text{ für alle } u \in \mathcal{V}.$$

Die gerade beschreibenen Regularitätsbedingungen lassen folgendes Resultat zu.

Lemma 3.6: *In der obigen Situation existiert eine lediglich von K und T abhängige Konstante $C > 0$, so dass die folgenden beiden Aussagen erfüllt sind.*

i.) Die eindeutig bestimmte Lösung u von $(\bullet)$ besitzt eine V-wertige Modifikation mit $\mathbb{P}$-f.s. stetigen Pfaden – welche wir im Folgenden ebenfalls mit u bezeichnen wollen –, so dass

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_V^2\Big] \leq 3\,\mathbb{E}\Big[\|u_0\|_V^2\Big] + C\,(r_1 + r_2 + M)\,.$$

ii.) Für $s, t \in [0,T]$ gilt:

$$\mathbb{E}[\|u(t) - u(s)\|_V^2] \leq C\,|t-s|\,(r_1 + r_2 + M)\,. \tag{3.2}$$

Beweis (vgl. Remark 2.5 in [10], S.35 f.): ad i.): Wir bezeichnen mit u sowohl die eindeutige Lösung der Gleichung $(\bullet)$ als auch deren laut [R1] existierende $\mathcal{V}$-wertige $\mathbb{P}_T$-Version und definieren:

$$F(t) := \int_0^t A(s, u(s))\,\mathrm{d}s.$$

Dann gilt:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \|A(s,u(s))\|_V^2\,\mathrm{d}s\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T K\|u(s)\|_{\mathcal{V}}^2 + \xi(s)\,\mathrm{d}s\right] \leq K\,r_1 + M < \infty.$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \int_0^T \big\|A(s,\omega,u(s,\omega))\big\|_V^2\,\mathrm{d}s < \infty\right\}\right) = 1.$$

Unter Zuhilfenahme des Lebesgue'schen Satzes über dominierte Konvergenz sowie der Dreiecksungleichung für Bochner-Integrale ergibt sich daraus die $\mathbb{P}$-fast sichere Stetigkeit der Pfade des stochastischen Prozesses $(F(t))_{t\in[0,T]}$. Bezeichnen wir weiter mit $\tilde{u}$ die $\mathcal{H}$-wertige Modifikation unserer Lösung (siehe [R2]), so gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{d_1}\mathbb{E}\Big[\int_0^T \|B_k(s,\tilde{u}(s))\|_V^2\,\mathrm{d}s\Big] &= \int_0^T \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{d_1}\|B_k(s,\tilde{u}(s))\|_V^2\Big]\,\mathrm{d}s\\ &\le \int_0^T (K\,\mathbb{E}[\|\tilde{u}(s)\|_{\mathcal{H}}^2] + \mathbb{E}[\eta(s)])\,\mathrm{d}s\\ &\le \int_0^T (\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}[\|\tilde{u}(t)\|_{\mathcal{H}}^2] + \sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}[\eta(t)])\,\mathrm{d}s \quad \le T\ (r_2+M) < \infty.\end{aligned}$$

D.h. $B(.,\tilde{u}(.)) \in L^2(\Omega_t, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2(\mathbb{R}^{d_1}, V))$, also ist

$$G(t) := \sum_{k=1}^{d_1}\int_0^t B_k(s,\tilde{u}(s))\,\mathrm{d}W^{(k)}(s) \qquad (t\in[0,T])$$

ein stetiges, quadratisch integrierbares, V-wertiges Martingal (vgl. Kapitel 2). Es handelt sich dabei auch um eine Modifikation des stochastischen Prozesses

$$\sum_{k=1}^{d_1}\int_0^{\cdot} B_k(s,u(s))\,\mathrm{d}W^{(k)}(s).$$

Insgesamt folgt, dass $(u_0+F(t)+G(t))_{t\in[0,T]}$ eine V-wertige stetige Modifikation unserer Lösung ist, welche wir im Folgenden ebenfalls mit u bezeichnen. Unter Zuhilfenahme der Jensen'schen Ungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]}\|F(t)\|_V^2] &= \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big\|\int_0^t A(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big\|_V^2\Big]\\ &= \mathbb{E}\Big[T^2\sup_{t\in[0,T]}\Big\|\int_0^t A(s,u(s))\,\frac{\mathrm{d}s}{T}\Big\|_V^2\Big]\\ &\le \mathbb{E}\Big[T^2\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t \big\|A(s,u(s))\big\|_V^2\,\frac{\mathrm{d}s}{T}\Big]\\ &= T\cdot\mathbb{E}\Big[\int_0^T \big\|A(s,u(s))\big\|_V^2\,\mathrm{d}s\Big] \le T\,(K\,r_1+M)\,.\end{aligned}$$

Aus der Itô-Isometrie folgt unter Zuhilfenahme der Doob'schen Maximalungleichung (siehe Satz 1.57) insgesamt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_V^2] &\le 3\Big(\mathbb{E}\Big[\|u_0\|_V^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\|F(t)\|_V^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\|G(t)\|_V^2\Big]\Big)\\ &\le 3\,\mathbb{E}\Big[\|u_0\|_V^2\Big] + 3\Big(T\,(K\,r_1+M) + 4\,T\,(r_2+M)\Big)\\ &\le 3\,\mathbb{E}\Big[\|u_0\|_V^2\Big] + C\,(r_1+r_2+M)\,,\end{aligned}$$

wobei $C = C(K,T)$ eine Konstante ist.
ad ii.) Wir fixieren $s,t\in[0,T]$ mit $s\le t$. Dann lässt sich analog zum Beweis von Teil *i.)* zeigen, dass

$$\mathbb{E}\Big[\|F(t)-F(s)\|_V^2\Big] \le |t-s|\,T\,(r_1+M)$$

sowie

$$\mathbb{E}\Big[\|G(t) - G(s)\|_V^2\Big] \leq |t - s|\,(K\,r_2 + M)$$

gilt, woraus die behauptete Ungleichung (3.2) auf analoge Weise folgt. □

Wir wollen nun eine konkrete Beispielsituation für unser abstraktes Setting skizzieren. Im Hinblick auf den Umfang dieser Arbeit wird an dieser Stelle auf eine genaue Ausführung verzichtet und wir verweisen auf [10, Chapter 6; S. 56 ff.]. Für $l \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir im Folgenden mit $W_2^l(\mathbb{R}^d)$ den L^2-Sobolev-Raum von der Ordnung l, d.h., den Raum aller Funktionen, deren schwachen Ableitungen bis zur Ordnung $l \in \mathbb{N}_0$ existieren und quadratisch integrierbar sind. Versieht man $W_2^l(\mathbb{R}^d)$ für beliebiges $l \in \mathbb{N}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{W_2^l} := \sum_{|\gamma| \leq l} \int_{\mathbb{R}^d} D^\gamma \varphi(x) \cdot D^\gamma \psi(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $D^\gamma = D^{\gamma_1} D^{\gamma_2} \cdots D^{\gamma_d}$ für den Multiindex $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d) \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| := \sum_{i=1}^d \gamma_i \leq l$ die entsprechende (schwache) Ableitung bezeichnet, so ist $(W_2^l, \langle .,. \rangle_{W_2^l})$ ein separabler Hilbertraum. Für $l \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir mit $W_2^{-l}(\mathbb{R}^d)$ den Dualraum von $W_2^l(\mathbb{R}^d)$. Dann ist

$$W_2^l(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow_{\mathrm{D}} L^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow_{\mathrm{D}} W_2^{-l}(\mathbb{R}^d)$$

ein Gelfand-Dreier (siehe z.B. [11, Kapitel 6; S. 105 ff.]). Hier ist unter $L^2(\mathbb{R}^d)$ der Raum $L^2(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d; \mathbb{R})$ zu verstehen. Offenbar gilt $W_2^0(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d)$.

Beispiel 3.7: Wir setzen $V := W_2^1(\mathbb{R}^d)$ und $H := L^2(\mathbb{R}^d)$ sowie $\mathcal{H} := W_2^2(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{V} := W_2^3(\mathbb{R}^d)$ für ein $d \in \mathbb{N}$ und betrachten eine stochastische Evolutionsgleichung der Form (•), wobei eine d_1-dimensionalen Brown'schen Bewegung $(W(t))_{t\in[0,T]}$ für ein $d_1 \in \mathbb{N}$, sei und

$$A(t,\omega,v) := \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1, |\beta|\leq 1\\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d}} D^\alpha(a^{\alpha,\beta}(t,\omega,.)D^\beta v) + F(t,\omega,.,\nabla v, v) \in V^* \text{ für } (t,\omega,v) \in [0,T]\times\Omega\times V$$

sowie

$$B_k(t,\omega,v) := \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1\\ \alpha\in\mathbb{N}_0^d}} b_k^\alpha(t,\omega,.)D^\alpha v + g_k(t,\omega,.) \in H \text{ für } (t,\omega,v) \in [0,T]\times\Omega\times V$$

für $k = 1, \ldots, d_1$. Dabei seien für beliebiges $k \in \{1, \ldots, d_1\}$ und beliebige Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq 1$ und $|\beta| \leq 1$ reellwertige Funktionen

$$a^{\alpha,\beta}\colon [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ und } F\colon [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

sowie

$$b_k^\alpha\colon [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ und } g_k\colon [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R},$$

welche alle bzgl. der entsprechenden Produkt-σ-Algebren messbar seien, gegeben. Ferner sei u_0 eine quadratisch integrierbare, $W_2^2(\mathbb{R}^d)$-wertige und $\mathscr{F}_0$-messbare Zufallsvariable. Indem diverse Regularitätsannahmen an die Funktionen $a^{\alpha,\beta}$, F, b_k^α und g_k gestellt werden, wird in [10, Chapter 6; S. 56 ff.] gezeigt, dass die Bedingungen [A1]-[A4] sowie [R1]-[R4] erfüllt sind. Ein einfaches Beispiel, für das die dort gestellten Regularitätsbedingungen erfüllt sind, ergibt sich, indem wir für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha|, |\beta| \leq 1$ und $k \in \{1, \ldots, d_1\}$

$$a^{\alpha,\beta} \equiv \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \text{ und } |\alpha| = |\beta| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad b_k^\alpha \equiv \begin{cases} 1 & \alpha = \beta = 0^d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie $F \equiv 0$ und $g_k \equiv 0$ setzen. Es handelt sich dabei um folgende „stochastische Wärmeleitungsgleichung“ :

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \Delta u(s)\, \mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{d_1} \int_0^t u(s) \mathrm{d}W^{(k)}(s) \qquad (t \in [0, T]) .$$

3.2 Implizite Raum-Zeit Approximation der Lösung

Wir betrachten im Folgenden eine Gleichung der Form (•) und gehen davon aus, dass sie alle im vorherigen Abschnitt 3.1 beschriebenen Bedingungen erfüllt. Wir wollen in diesem Paragraphen ein implizites Schema zur Approximation der Lösung von stochastischen partiellen Differentialgleichungen dieser Klasse vorstellen und anschließend die Konvergenzrate dieses Schemas unter bestimmten Konsistenzbedingungen abschätzen.

3.2.1 Ein implizites Approximationsschema

Wir stellen in diesem Abschnitt ein von I. Gyöngy und A. Millet zur impliziten Approximation der Lösung stochastischer Evolutionsgleichungen der Form (•) eingeführtes Schema vor (siehe [10, 4.1; S. 44 f.] sowie [9, 2.2; S. 111 f.]).
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir einen Gelfand-Dreier

$$V_n \hookrightarrow_{\mathrm{D}} H_n \cong H_n^* \hookrightarrow_{\mathrm{D}} V_n^*,$$

wobei ohne Einschränkung $\|u\|_{H_n} \leq \|u\|_{V_n}$ gelte. Diese Approximationsräume seien derart mit dem ursprünglichen Gelfand-Dreier (V, H, V^*) verknüpft, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine lineare und beschränkte Abbildung $\Pi_n \in L(V, V_n)$ existiert, so dass

$$\|\Pi_n u\|_{V_n} \leq p \cdot \|u\|_V \text{ für alle } u \in V \text{ und alle } n \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

wobei p eine von $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstante ist. Insgesamt haben wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ also folgende Situation:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{V} & \hookrightarrow & \mathcal{H} & \hookrightarrow & V & \hookrightarrow_{\mathrm{D}} & H & \hookrightarrow_{\mathrm{D}} & V^* \\ & & & & {\scriptstyle \Pi_n}\downarrow & & & & \\ & & & & V_n & \hookrightarrow_{\mathrm{D}} & H_n & \hookrightarrow_{\mathrm{D}} & V_n^*. \end{array}$$

Zeitlich diskretisieren wir äquidistant. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei

$$\tau = \tau(m) := \frac{T}{m}$$

die gewählte Schrittweite und

$$t_i = t_i(m) := i \cdot \tau \text{ für } i = 0, \ldots, m$$

die entsprechenden Stützstellen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wollen wir für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ den Operator $\Pi_n A(t_j, .)$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$ durch $A_j^{n,\tau} \Pi_n$ approximieren, wobei

$$A_j^{n,\tau} : \Omega \times V_n \to V_n^*$$

eine $\mathscr{F}_{t_j} \otimes \mathscr{B}(V_n)$-messbare Abbildung sei. Für $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ wollen wir $\mathscr{F}_{t_i} \otimes \mathscr{B}(V_n)$-messbare Abbildungen

$$B_{k,i}^{n,\tau} : \Omega \times V_n \to H_n \quad \text{für } k = 1, \ldots, d_1$$

betrachten, so dass $(B_{k,i}^{n,\tau} \Pi_n)_{k=1}^{d_1}$ Näherungen für $(\Pi_n B_k(t_i, .))_{k=1}^{d_1}$ sein sollen. Die nach V_n mittels Π_n abgebildete Anfangszufallsvariable u_0 wollen wir entsprechend durch eine V_n-wertige und $\mathscr{F}_0$-messbare Zufallsvariable $u_0^{n,\tau}$ approximieren. In dieser Situation wollen wir in jedem Raum-Zeit-Schritt, d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$, das folgende Schema betrachten:

$$(3.4) \quad u_{i+1}^{n,\tau} = u_i^{n,\tau} + \tau A_{i+1}^{n,\tau}(u_{i+1}^{n,\tau}) + \sum_{k=1}^{d_1} B_{k,i}^{n,\tau}(u_i^{n,\tau})(W^{(k)}(t_{i+1}) - W^{(k)}(t_i)) \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Dabei verlangen wir, dass es sich bei $u_j^{n,\tau}$ für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ um eine V_n-wertige und $\mathscr{F}_{t_j}$-messbare Zufallsvariable handelt. Bezeichnen wir mit u die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung ($\bullet$), so wollen wir, dass $\Pi_n u(t_j)$ für jedes $j \in \{0, \ldots, m\}$ möglichst gut durch die entsprechende Zufallsvariable $u_j^{n,\tau}$ approximiert wird. Dafür müssen wir allerdings zunächst sicherstellen, dass das obige Gleichungssystem (3.4) eine Lösung $(u_j^{n,\tau})_{j=1}^m$ besitzt, die nach Möglichkeit eindeutig ist. Um dies garantieren zu können, gehen wir im weiteren Verlauf der Arbeit davon aus, dass bestimmte Konstanten $\lambda > 0$, $L \geq 0$ und $L_1 \geq 0$ existieren, so dass die in (3.4) auftretenden Operatoren $\mathbb{P}$-f.s. die folgenden drei Bedingungen für alle $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ simultan erfüllen.

[ST1] (Starke Monotonie von $(A_j^{n,\tau}, B_{k,j}^{n,\tau})$) Für alle $j = 1, \ldots, m$ und alle $u, v \in V$ gilt:

$$2 \cdot {}_{V_n}\langle u - v, A_j^{n,\tau}(u) - A_j^{n,\tau}(v) \rangle_{V_n^*} + \sum_{k=1}^{d_1} \left\| B_{k,j}^{n,\tau}(u) - B_{k,j}^{n,\tau}(v) \right\|_{H_n}^2 \leq -\lambda \, \|u - v\|_{V_n}^2 + L \, \|u - v\|_{H_n}^2.$$

[ST2] (Wachstum von $A_j^{n,\tau}$ und $B_{k,i}^{n,\tau}$) Für alle $j = 1, \ldots, m$ und $i = 0, \ldots, m-1$ gilt für alle $u \in V$:

$$\|A_j^{n,\tau}(u)\|_{V_n^*}^2 \leq K \, \|u\|_{V_n}^2 + f_j^{n,\tau} \qquad \text{sowie} \qquad \sum_{k=1}^{d_1} \|B_{k,i}^{n,\tau}(u)\|_{H_n}^2 \leq K \, \|u\|_{V_n}^2 + g_i^{n,\tau},$$

wobei $f_j^{n,\tau}$ für $j = 1, \ldots, m$ und $g_i^{n,\tau}$ für $i = 0, \ldots, m-1$ nichtnegative Zufallsvariablen sind, so dass

$$\sum_{j=1}^m \tau \, \mathbb{E}[f_j^{n,\tau}] \leq M < \infty \qquad \text{sowie} \qquad \max_{i=0,\ldots,m-1} \mathbb{E}[g_i^{n,\tau}] \leq M < \infty.$$

[ST3] (Lipschitz-Bedingung an $A_j^{n,\tau}$) Für alle $j = 1, \ldots, m$ und $u, v \in V$ gilt:

$$\|A_j^{n,\tau}(u) - A_j^{n,\tau}(v)\|_{V_n^*}^2 \leq L_1 \, \|u - v\|_{V_n}^2.$$

Bemerkung 3.8: *i.)* Die in [ST2] auftretenden Konstanten $M \in [0, \infty)$ sowie $K \in [0, \infty)$ können, müssen aber nicht, den Konstanten aus den Regularitätsbedingungen in Abschnitt 3.1 entsprechen. Was allerdings für die weitere Analyse wichtig ist, ist deren Unabhängigkeit von $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$.

ii.) In [ST1] sowie im weiteren Verlauf der Arbeit, setzen wir $B_{k,m}^{n,\tau} \equiv 0$ für $k = 1, \dots, d_1$.

iii.) Wegen der angenommenen starken Monotonie [ST1] gilt $\mathbb{P}$-f.s.: Für alle $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ und $u, v \in V$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{d_1} \left\|B_{k,j}^{n,\tau}(u) - B_{k,j}^{n,\tau}(v)\right\|_{H_n}^2 &\le -\lambda \|u - v\|_{V_n}^2 + L \|u - v\|_{H_n}^2 + 2 \left|{}_{V_n}\langle u - v, A_j^{n,\tau}(u) - A_j^{n,\tau}(v)\rangle_{V_n^*}\right| \\ &\le -\lambda \|u - v\|_{V_n}^2 + L \|u - v\|_{V_n}^2 + 2 \|u - v\|_{V_n} \|A_j^{n,\tau}(u) - A_j^{n,\tau}(v)\|_{V_n^*} \\ &\le (L - \lambda + 2 + 2 L_1) \|u - v\|_{V_n}^2,\end{aligned}$$

wobei die Lipschitz-Stetigkeit von $A_j^{n,\tau}$ aus [ST3] sowie die Ungleichung

$$2ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2 \text{ für beliebige } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } \varepsilon > 0, \tag{3.5}$$

in die obige Rechnung eingegangen sind. Also ist $B_j^{n,\tau}$ unter den oben getroffenen Annahmen ebenfalls Lipschitz-stetig mit einer lediglich von λ, L und L_1 abhängigen Lipschitz-Konstante L_2, d.h. $\mathbb{P}$-f.s. gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ sowie $j = 1, \dots, m$:

$$\sum_{k=1}^{d_1} \left\|B_{k,j}^{n,\tau}(u) - B_{k,j}^{n,\tau}(v)\right\|_{H_n}^2 \le L_2 \|u - v\|_{V_n}^2 \text{ für alle } u, v \in V.$$

Das folgende Resultat garantiert uns, dass das implizite Schema (3.4) in der obigen Situation tatsächlich eine eindeutige Lösung besitzt, wenn wir nur $m \in \mathbb{N}$ groß genung, d.h. die Schrittweite τ klein genug, wählen.

Satz 3.9: *Gegeben sei die oben beschriebene Situation. Zudem gelte* $\mathbb{E}[\|u_0^{n,\tau}\|_{V_n}^2] < \infty$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $m \in \mathbb{N}$*. Dann existiert für alle* $m \in \mathbb{N}$ *mit* $\tau(m) < 1/L$ *eine eindeutige Lösung* $(u_j^{n,\tau})_{j=1}^m$ *von* (3.4)*, so dass* $u_j^{n,\tau}$ *für jedes* $j \in \{1, \dots, m\}$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *eine* V_n*-wertige,* $\mathscr{F}_{t_j}$*-messbare und quadratisch integrierbare Zufallsvariable ist. (Es gelte die Konvention:* $1/L = \infty$ *für* $L = 0$*.)*

Beweis: [siehe [10, Proposition 4.3; S. 45] sowie [9, Proposition 3.4; S.120 f.]] □

3.2.2 Eine Abschätzung der Konvergenzrate

Im Folgenden seien neben den in Abschnitt 3.1 an die Gleichung (•) gestellten Bedingungen auch die unter Punkt 3.2.1 aufgeführten Bedingungen für das Schema (3.4) erfüllt. Wir gehen ferner davon aus, dass Konstanten $\nu \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ und $c_0 \ge 0$ sowie eine reelle Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ die folgende Konstistenzbedingung erfüllt ist:
[Cnτ] $\mathbb{P}$-f.s. gilt: Für alle $j = 1, \dots, m$ und $i = 0, \dots, m - 1$ sowie $u \in \mathcal{V}$ ist

$$\|\Pi_n A(t_j, u) - A_j^{n,\tau}(u)\|_{V_n^*}^2 \le c_0 \left(\|u\|_{\mathcal{V}}^2 + \xi_j^{n,\tau}\right)(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)$$

sowie

$$\sum_{k=1}^{d_1} \|\Pi_n B_k(t_i, u) - B_{k,i}^{n,\tau}(\Pi_n u)\|_{H_n} \le c_0 \left(\|u\|_{\mathcal{V}}^2 + \eta_i^{n,\tau}\right)(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2),$$

wobei $\xi_j^{n,\tau}$ und $\eta_i^{n,\tau}$ nichtnegative Zufallsvariablen sind welche

$$\sum_{j=1}^{m} \tau\, \mathbb{E}[\xi_j^{n,\tau}] \leq M \qquad \text{sowie} \qquad \sum_{i=0}^{m-1} \tau\, \mathbb{E}[\eta_i^{n,\tau}] \leq M$$

erfüllen.

Bemerkung 3.10: Die in der obigen Bedingung [Cnτ] auftretenden Konstanten ν und M können, müssen aber nicht, den entsprechenden Konsanten aus der Regularitätsbedingung [R4] gleichen. Es ist allerdings wichtig, dass sie von $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ unabhängig gewählt werden können.

Notation: Wir bezeichnen im Folgenden mit $u(.)$ stets die eindeutige Lösung der Gleichung ($\bullet$) bzw. eine nach der Regularitätsbedingung [R1] existierende $\mathcal{V}$-wertige $\mathbb{P}_T$-Version davon oder aber dessen $\mathcal{H}$-wertige Modifikation, welche nach [R2] ebenfalls existiert. Weiter sei $(u_j^{n,\tau})_{j=0}^m$ stets eine Lösung des Gleichungssystems (3.4). Ferner sei für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$

$$e_i^{n,\tau} := \Pi_n u(t_i) - u_i^{n,\tau}$$

der Approximationsfehler im Zeitpunkt t_i für $i \in \{0, 1, \dots, m\}$.

Wir schließen mit dem Nachweis des folgenden Satzes, der eine Abschätzung der Konvergenzrate unseres Verfahrens unter der getroffenen Konstistenzbedingung liefert.

Satz 3.11: *Gegeben sei die obige Situation. Ferner sei $m_0 \in \mathbb{N}$ beliebig, so dass*

$$\tau(m_0) < \min\Big\{1, \frac{1}{L}\Big\}, \tag{3.6}$$

und es gelte

$$\sup_{m,n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[\|u_0^{n,\tau}\|_{V_n}^2] \leq M. \tag{3.7}$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq m_0$:

$$\mathbb{E}[\max_{0 \leq i \leq m} \|e_i^{n,\tau}\|_{H_n}^2] + \sum_{i=1}^{m} \tau\, \mathbb{E}[\|e_i^{n,\tau}\|_{V_n}^2] \leq C_1 \mathbb{E}[\|e_0^{n,\tau}\|_{H_n}^2] + C_2(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)(r_1 + r_2 + M), \tag{3.8}$$

wobei $C_1 = C_1(\lambda, L, T)$ und $C_2 = C_2(\lambda, L, K, T, p, c_0, L_1, L_2)$ von $m \geq m_0$ und $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstanten sind.

Beweis: Wir fixieren $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ beliebig mit $m \geq m_0$. Aus Übersichtlichkeitsgründen verzichten wir dann im Folgenden weitgehend auf die Angabe von n und τ und schreiben für $j = 1, \dots, m$ einfach A_j bzw. $B_{k,j-1}$ anstelle von $A_j^{n,\tau}$ bzw. $B_{k,j-1}^{n,\tau}$. Gleichzeitig wollen wir u_i und e_i anstelle von $u_i^{n,\tau}$ und $e_i^{n,\tau}$ für $i = 0, \dots, m$ schreiben. Die folgenden Bezeichnungen werden ebenfalls nützlich sein:

$$F_k(s) := \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(s) \cdot (\Pi_n B_k(s, u(s)) - B_{k,i}(u_i^{n,\tau})) \qquad (s \in [0, T])$$

sowie

$$e(s) := \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(s) \cdot e_i^{n,\tau} \qquad (s \in [0,T]).$$

Die Behauptung wollen wir nun in mehreren Schritten nachweisen.

Schritt 1: Wir beginnen mit dem Nachweis, dass für beliebiges $l \in \{1,\ldots,m\}$

$$\|e_l\|_{H_n}^2 \leq \|e_0\|_{H_n}^2 + 2\sum_{i=0}^{l-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} {}_{V_n}\langle e_{i+1}, \Pi_n A(s,u(s)) - A_{i+1}(u_{i+1})\rangle_{V_n^*} \,\mathrm{d}s + Q(t_l) + I(t_l), \tag{3.9}$$

gilt, wobei

$$Q(t_l) := \sum_{i=0}^{l-1} \left\| \sum_{k=1}^{d_1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_k(s)\,\mathrm{d}W^{(k)}(s) \right\|_{H_n}^2$$

sowie

$$I(t_l) := 2\sum_{k=1}^{d_1} \int_0^{t_l} \langle e(s), F_k(s)\rangle_{H_n} \,\mathrm{d}W^{(k)}(s).$$

Wir fixieren dafür $l \in \{1,\ldots,m\}$. Dann gilt für beliebiges $i \in \{0,1,\ldots,l-1\}$:

$$\begin{aligned}
\|e_{i+1}\|_{H_n}^2 - \|e_i\|_{H_n}^2 &= 2\langle e_{i+1}, e_{i+1} - e_i\rangle_{H_n} - \|e_{i+1} - e_i\|_{H_n}^2 \\
&= 2\langle e_{i+1}, \Pi_n u(t_{i+1}) - u_{i+1} - (\Pi_n u(t_i) - u_i)\rangle_{H_n} - \|e_{i+1} - e_i\|_{H_n}^2 \\
&= 2\langle e_{i+1}, \Pi_n(u(t_{i+1}) - u(t_i)) - (u_{i+1} - u_i)\rangle_{H_n} - \|e_{i+1} - e_i\|_{H_n}^2.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der einzelnen Elemente erhalten wir aufgrund der Invarianz der Integrale unter linearer Transformation:

$$\begin{aligned}
\|e_{i+1}\|_{H_n}^2 - \|e_i\|_{H_n}^2 &= 2\,\langle e_{i+1}, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Pi_n A(s,u(s))\,\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{d_1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Pi_n B_k(s,u(s))\,\mathrm{d}W^{(k)}(s)\,\rangle_{H_n} \\
&\quad - 2\,\langle e_{i+1}, \tau A_{i+1}(u_{i+1}) + \sum_{k=1}^{d_1} B_{k,i}(u_i)\big(W^{(k)}(t_{i+1}) - W^{(k)}(t_i)\big)\,\rangle_{H_n} - \|e_{i+1} - e_i\|_{H_n}^2 \\
&= 2\,\langle e_{i+1}, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Pi_n A(s,u(s)) - A_{i+1}(u_{i+1})\,\mathrm{d}s\,\rangle_{H_n} \\
&\quad + 2\,\langle e_{i+1}, \sum_{k=1}^{d_1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big(\Pi_n B_k(s,u(s)) - \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{1}_{(t_j,t_{j+1}]}(s) \cdot B_{k,j}(u_j)\Big)\,\mathrm{d}W^{(k)}(s)\,\rangle_{H_n} \\
&\quad - \|e_{i+1} - e_i\|_{H_n}^2 \\
&= 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} {}_{V_n}\langle e_{i+1}, \Pi_n A(s,u(s)) - A_{i+1}(u_{i+1})\,\rangle_{V_n^*} \,\mathrm{d}s \\
&\quad + 2\sum_{k=1}^{d_1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle e_{i+1}, F_k(s)\,\rangle_{H_n} \,\mathrm{d}W^{(k)}(s) - \|e_{i+1} - e_i\|_{H_n}^2
\end{aligned}$$

Durch Hinzuaddieren und gleichzeitigem Subtrahieren des Terms

$$2\Big\|\sum_{k=1}^{d_1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} F_k(s)\,\mathrm{d}W^{(k)}(s)\Big\|_{H_n}^2 - 2\langle e_{i+1}-e_i, \sum_{k=1}^{d_1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} F_k(s)\,\mathrm{d}W^{(k)}(s)\rangle_{H_n}$$

zur obigen Gleichung erhalten wir unter Zuhilfenahme der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|e_{i+1}\|_{H_n}^2 - \|e_i\|_{H_n}^2 &= 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} {}_{V_n}\langle e_{i+1}, \Pi_n A(s,u(s)) - A_{i+1}(u_{i+1})\,\rangle_{V_n^*}\,\mathrm{d}s + \Big\|\sum_{k=1}^{d_1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} F_k(s)\,\mathrm{d}W^{(k)}(s)\Big\|_{H_n}^2\\
&\quad + 2\sum_{k=1}^{d_1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\langle e_i, F_k(s)\,\rangle_{H_n}\,\mathrm{d}W^{(k)}(s) - \Big\|\sum_{k=1}^{d_1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} F_k(s)\,\mathrm{d}W^{(k)}(s)\Big\|_{H_n}^2\\
&\quad + 2\,\langle e_{i+1}-e_i, \sum_{k=1}^{d_1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} F_k(s)\,\mathrm{d}W^{(k)}(s)\,\rangle_{H_n} - \|e_{i+1}-e_i\|_{H_n}^2\\
&\le 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} {}_{V_n}\langle e_{i+1}, \Pi_n A(s,u(s)) - A_{i+1}(u_{i+1})\,\rangle_{V_n^*}\,\mathrm{d}s + \Big\|\sum_{k=1}^{d_1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} F_k(s)\,\mathrm{d}W^{(k)}(s)\Big\|_{H_n}^2\\
&\quad + 2\sum_{k=1}^{d_1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\langle e_i, F_k(s)\,\rangle_{H_n}\,\mathrm{d}W^{(k)}(s)\\
&\quad - \Big(\Big\|\sum_{k=1}^{d_1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} F_k(s)\,\mathrm{d}W^{(k)}(s)\Big\|_{H_n} - \|e_{i+1}-e_i\|_{H_n}\Big)^2\\
&\le 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} {}_{V_n}\langle e_{i+1}, \Pi_n A(s,u(s)) - A_{i+1}(u_{i+1})\,\rangle_{V_n^*}\,\mathrm{d}s + \Big\|\sum_{k=1}^{d_1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} F_k(s)\,\mathrm{d}W^{(k)}(s)\Big\|_{H_n}^2\\
&\quad + 2\sum_{k=1}^{d_1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\langle e_i, F_k(s)\,\rangle_{H_n}\,\mathrm{d}W^{(k)}(s).
\end{aligned}$$

Summieren wir nun über alle $i \in \{0,1,\dots,l-1\}$ so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\|e_l\|_{H_n}^2 \le \|e_0\|_{H_n}^2 &+ 2\sum_{i=0}^{l-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} {}_{V_n}\langle e_{i+1}, \Pi_n A(s,u(s)) - A_{i+1}(u_{i+1})\rangle_{V_n^*}\,\mathrm{d}s\\
&+ \sum_{i=0}^{l-1}\Big\|\sum_{k=1}^{d_1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} F_k(s)\,\mathrm{d}W^{(k)}(s)\Big\|_{H_n}^2 + 2\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{k=1}^{d_1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\langle e_i, F_k(s)\,\rangle_{H_n}\,\mathrm{d}W^{(k)}(s)
\end{aligned}$$

und damit die gewünschte Ungleichung (3.9).

Schritt 2: In einem zweiten Schritt weisen wir nach, dass für alle $l \in \{1,\dots,m\}$ gilt:

$$\mathbb{E}[\|e_l\|_{H_n}^2] \le \mathbb{E}[\|e_0\|_{H_n}^2] - \lambda\sum_{i=1}^{l}\tau\,\mathbb{E}[\|e_i\|_{V_n}^2] + L\sum_{i=1}^{l}\tau\,\mathbb{E}[\|e_i\|_{H_n}^2] + S_1^{(l)} + S_2^{(l)} + S_3, \tag{3.10}$$

wobei

$$S_1^{(l)} := 2\sum_{i=1}^{l}\mathbb{E}\Big[\int_{t_{i-1}}^{t_i} {}_{V_n}\langle e_i, \Pi_n A(s,u(s)) - A_i(\Pi_n u(t_i))\,\rangle_{V_n^*}\,\mathrm{d}s\Big],$$

$$S_2^{(l)} := \sum_{i=1}^{l-1}\mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{d_1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\|F_k(s)\|_{H_n}^2 - \|B_{k,i}(\Pi_n u(t_i)) - B_{k,i}(u_i)\|_{H_n}^2\,\mathrm{d}s\Big],$$

sowie

$$S_3 := \sum_{k=1}^{d_1} \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau \|F_k(s)\|_{H_n}^2 \,\mathrm{d}s\Big].$$

Fixieren wir also $l \in \{1, \dots, m\}$ beliebig und wenden auf beiden Seiten der Ungleichung (3.9) den (monoton steigenden) Erwartungswertoperator an. Zunächst merken wir an, dass es sich beim reellwertigen stochastischen Prozess

$$(I(t))_{t\in[0,T]} := \Big(\sum_{k=1}^{d_1} \int_0^t \langle e(s), F_k(s)\rangle_{H_n} \,\mathrm{d}W^{(k)}(s)\Big)_{t\in[0,T]}$$

um ein $\mathbb{P}$-f.s. im Nullpunkt startendes Martingal handelt, woraus insbesondere

$$\mathbb{E}[I(t_l)] = 0 \tag{3.11}$$

folgt. Ferner sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
&2\sum_{i=0}^{l-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} {}_{V_n}\langle e_{i+1}, \Pi_n A(s,u(s)) - A_{i+1}(u_{i+1})\rangle_{V_n^*} \,\mathrm{d}s \\
&\quad = 2\sum_{i=1}^{l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} {}_{V_n}\langle e_i, \Pi_n A(s,u(s)) - A_i(\Pi_n u(t_i))\rangle_{V_n^*} \,\mathrm{d}s \\
&\qquad + 2\sum_{i=0}^{l-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} {}_{V_n}\langle e_{i+1}, A_{i+1}(\Pi_n u(t_{i+1})) - A_{i+1}(u_{i+1})\rangle_{V_n^*} \,\mathrm{d}s \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{l-2}\sum_{k=1}^{d_1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \big\|B_{k,i+1}(\Pi_n u(t_{i+1})) - B_{k,i+1}(u_{i+1})\big\|_{H_n}^2 \,\mathrm{d}s. \\
&\qquad - \sum_{i=0}^{l-2}\sum_{k=1}^{d_1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \big\|B_{k,i+1}(\Pi_n u(t_{i+1})) - B_{k,i+1}(u_{i+1})\big\|_{H_n}^2 \,\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Benutzen wir die Tatsache, dass aus der Itô-Isometrie

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{l-1} \Big\|\sum_{k=1}^{d_1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_k(s)\,\mathrm{d}W^{(k)}(s)\Big\|_{H_n}^2\Big] = \sum_{i=0}^{l-1}\sum_{k=1}^{d_1} \mathbb{E}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|F_k(s)\|_{H_n}^2 \,\mathrm{d}s\Big] \tag{3.13}$$

folgt, so erhalten wir daraus:

$$\begin{aligned}
&2\sum_{i=0}^{l-1} \mathbb{E}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} {}_{V_n}\langle e_{i+1}, \Pi_n A(s,u(s)) - A_{i+1}(u_{i+1})\rangle_{V_n^*} \,\mathrm{d}s\Big] + \sum_{i=0}^{l-1} \mathbb{E}\Big[\Big\|\sum_{k=1}^{d_1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_k(s)\,\mathrm{d}W^{(k)}(s)\Big\|_{H_n}^2\Big] \\
&\quad = \sum_{i=0}^{l-1} \mathbb{E}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} 2{}_{V_n}\langle e_{i+1}, A_{i+1}(\Pi_n u(t_{i+1}))) - A_{i+1}(\Pi_n u(t_{i+1})))\rangle_{V_n^*} \,\mathrm{d}s\Big] \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{l-2} \mathbb{E}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{k=1}^{d_1} \big\|B_{k,i+1}(\Pi_n u(t_{i+1})) - B_{k,i+1}(u_{i+1})\big\|_{H_n}^2 \,\mathrm{d}s\Big] + S_1^{(l)} + S_2^{(l)} + S_3 \\
&\quad \le -\lambda \sum_{i=1}^{l} \tau\,\mathbb{E}[\|e_i\|_{V_n}^2] + L\sum_{i=1}^{l} \tau\,\mathbb{E}[\|e_i\|_{H_n}^2] + S_1^{(l)} + S_2^{(l)} + S_3,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung auf die geforderte starke Monotonie [ST1] zurückzuführen ist. Die Ungleichung (3.10) folgt nun unmittelbar, wenn wir (3.11) berücksichtigen.

Schritt 3: Wir schätzen nun die Terme $S_1^{(l)}$, $S_2^{(l)}$ und S_3 nach oben ab und zeigen, dass eine von $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq m_0$ und $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Konstante $\tilde{C}_3 = \tilde{C}_3(\lambda, p, K, T, c_0, L_1, L_2)$ existiert, so dass für beliebiges $l \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$\mathbb{E}[\|e_l\|_{H_n}^2] + \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{l} \tau\,\mathbb{E}[\|e_i\|_{V_n}^2] \leq \mathbb{E}[\|e_0\|_{H_n}^2] + L\sum_{i=1}^{l}\tau\,\mathbb{E}[\|e_i\|_{H_n}^2] + \tilde{C}_3(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)(r_1 + r_2 + M). \tag{3.14}$$

Fixieren wir also $l \in \{1, \dots, m\}$ und beginnen mit $S_1^{(l)}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} S_1^{(l)} &\leq \sum_{i=1}^{l} \mathbb{E}\Big[\int_{t_{i-1}}^{t_i} 2\,\|e_i\|_{V_n}\,\|\Pi_n A(s, u(s)) - A_i(\Pi_n u(t_i))\|_{V_n^*}\,\mathrm{d}s\Big] \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{l} \tau\,\mathbb{E}[\|e_i\|_{V_n}^2] + \frac{1}{\varepsilon} R^{(l)}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

mit

$$R^{(l)} := \sum_{i=1}^{l} \mathbb{E}\Big[\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\Pi_n A(s, u(s)) - A_i(\Pi_n u(t_i))\|_{V_n^*}^2\,\mathrm{d}s\Big] \leq 3\sum_{j=1}^{3} R_j^{(l)}, \tag{3.16}$$

wobei

$$\begin{aligned} R_1^{(l)} &:= \sum_{i=1}^{l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\Pi_n A(s, u(s)) - \Pi_n A(t_i, u(s))\|_{V_n^*}^2\,\mathrm{d}s \\ R_2^{(l)} &:= \sum_{i=1}^{l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\Pi_n A(t_i, u(s))) - A_i(\Pi_n u(s))\|_{V_n^*}^2\,\mathrm{d}s \\ R_3^{(l)} &:= \sum_{i=1}^{l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|A_i(\Pi_n u(s)) - A_i(\Pi_n u(t_i))\|_{V_n^*}^2\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Wir haben dabei die Dreiecksungleichung, die Konvexität der Normalparabel sowie die Abschätzung (3.5) benutzt. Wegen der Regularitätsbedingungen [R1] und [R4] sowie der über alle $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßigen Stetigkeit von Π_n (siehe (3.3)) folgt:

$$\begin{aligned} R_1^{(l)} &\leq \sum_{i=1}^{l} \mathbb{E}\Big[\int_{t_{i-1}}^{t_i} p^2\,(K\,\|u(s)\|_{\mathcal{V}}^2 + \eta)\,\tau^{2\nu}\,\mathrm{d}s\Big] \\ &= p^2\,\tau^{2\nu}\mathbb{E}\Big[\int_0^T K\,\|u(s)\|_{\mathcal{V}}^2 + \eta\,\mathrm{d}s\Big] \leq p^2\,\tau^{2\nu}\,(K\,r_1 + T\,M). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Aus der Konsistenzbedingung [Cnτ] erhalten wir für den zweiten Term:

$$\begin{aligned} R_2^{(l)} &\leq \sum_{i=1}^{l} \mathbb{E}\Big[\int_{t_{i-1}}^{t_i} c_0\,(\|u(s)\|_{\mathcal{V}}^2 + \xi_i)\,(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)\,\mathrm{d}s\Big] \\ &\leq c_0\,(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)\Big(\mathbb{E}\Big[\int_0^T \|u(s)\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}s\Big] + \sum_{i=1}^{m} \tau\,\mathbb{E}[\xi_i]\Big) \leq c_0\,(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)(r_1 + M). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Die in Lemma 3.6 bewiesene Ungleichung (3.2) und die geforderte Lipschitz-Stetigkeit [ST3] lassen folgende Abschätzung für den letzten Term zu:

$$\begin{aligned} R_3^{(l)} &\le \sum_{i=1}^{l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} L_1\, p^2\, \mathbb{E}[\|u(s) - u(t_i)\|_{V_n}^2]\, \mathrm{d}s \\ &\le L_1\, p^2 \int_0^T \tilde{C}\, \tau\, (r_1 + r_2 + M)\, \mathrm{d}s = L_1\, p^2\, T\, \tilde{C}\, \tau\, (r_1 + r_2 + M), \end{aligned} \tag{3.19}$$

wobei $\tilde{C} = \tilde{C}(K, T)$ eine Konstante ist. Insgesamt folgt:

$$R^{(l)} \le 3\Big(p^2\, \tau^{2\nu}\, (K\, r_1 + T\, M) + c_0\, (\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)(r_1 + M) + L_1\, p^2\, T\, \tilde{C}\, \tau\, (r_1 + r_2 + M)\Big). \tag{3.20}$$

Einsetzen in (3.15) ergibt für beliebiges $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} S_1^{(l)} &\le \varepsilon \sum_{i=1}^{l} \tau\, \mathbb{E}[\|e_i\|_{V_n}^2] \\ &\quad + \frac{3}{\varepsilon}\Big(p^2\, \tau^{2\nu}\, (K\, r_1 + T\, M) + c_0\, (\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)(r_1 + M) + L_1\, p^2\, T\, \tilde{C}\, \tau\, (r_1 + r_2 + M)\Big). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Widmen wir uns nun $S_2^{(l)}$. Für $\varepsilon > 0$ können wir diesen Term wir folgt abschätzen:

$$S_2^{(l)} \le \varepsilon\, P_1^{(l)} + \Big(1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big) P_2^{(l)}, \tag{3.22}$$

wobei

$$P_1^{(l)} := \sum_{i=1}^{l-1} \tau\, \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{d_1} \|B_{k,i}(u_i) - B_{k,i}(\Pi_n u(t_i))\|_{H_n}^2\Big]$$

sowie

$$P_2^{(l)} := \sum_{i=1}^{l-1} \mathbb{E}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{k=1}^{d_1} \|\Pi_n B_k(s, u(s)) - B_{k,i}(\Pi_n u(t_i))\|_{H_n}^2\, \mathrm{d}s\Big]$$

Dabei haben wir die für beliebiges $\varepsilon > 0$ und $a, b \in V_n$ gültige Ungleichung

$$\|b\|_{V_n}^2 - \|a\|_{V_n}^2 \le \varepsilon\, \|a\|_{V_n}^2 + \Big(1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big) \|b - a\|_{V_n}^2$$

mit

$$a := B_{k,i}(\Pi_n u(t_i)) - B_{k,i}(u_i) \qquad \text{und} \qquad b := F_k(s)$$

an den entsprechenden Stellen benutzt. Für den ersten Term gilt aufgrund der in Bemerkung 3.8 nachgewiesenen Lipschitz-Stetigkeit der $B_{k,i}$'s:

$$P_1^{(l)} \le L_2 \sum_{i=1}^{l-1} \tau\, \mathbb{E}[\|e_i\|_{V_n}^2] \le L_2 \sum_{i=1}^{l} \tau\, \mathbb{E}[\|e_i\|_{V_n}^2]. \tag{3.23}$$

Analog zur Abschätzung von $R^{(l)}$ erhalten wir:

$$P_2^{(l)} \leq 3 \sum_{j=1}^{3} Q_j^{(l)}, \tag{3.24}$$

mit:

$$\begin{aligned}
Q_1^{(l)} &:= \sum_{i=1}^{l-1} \mathbb{E}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \big\|\Pi_n B_k(s,u(s)) - \Pi_n B_k(t_i,u(s))\big\|_{H_n}^2 \,\mathrm{d}s\Big] \\
Q_2^{(l)} &:= \sum_{i=1}^{l-1} \mathbb{E}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \big\|\Pi_n B_k(t_i,u(s)) - B_{k,i}(\Pi_n u(s))\big\|_{H_n}^2 \,\mathrm{d}s\Big] \\
Q_3^{(l)} &:= \sum_{i=1}^{l-1} \mathbb{E}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|B_{k,i}(\Pi_n u(s)) - B_{k,i}(\Pi_n u(t_i))\|_{H_n}^2 \,\mathrm{d}s\Big].
\end{aligned}$$

Für diese Terme ergibt sich analog wie für die Terme $R_j^{(l)}$ für $j = 1,2,3$ im oberen Teil des Beweises:

$$\begin{aligned}
Q_1^{(l)} &\leq p^2\,\tau^{2\nu}\,(K\,r_1 + T\,M), \\
Q_2^{(l)} &\leq c_0\,(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)(r_1 + M), \\
Q_3^{(l)} &\leq L_2\,p^2\,T\,\tilde{C}\,\tau\,(r_1 + r_2 + M).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, unter Berücksichtigung von (3.24):

$$P_2^{(l)} \leq 3\left(p^2\tau^{2\nu}(K\,r_1 + T\,M) + c_0(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)(r_1 + M) + L_2 p^2 T\tilde{C}\tau\,(r_1 + r_2 + M)\right), \tag{3.25}$$

so dass wir durch Einsetzen in (3.22) für beliebiges $\varepsilon > 0$ die folgende Abschätzung erhalten:

$$\begin{aligned}
S_2^{(l)} &\leq \varepsilon \cdot L_2 \sum_{i=1}^{l} \tau\,\mathbb{E}[\|e_i\|_{V_n}^2] \\
&\quad + 3\Big(1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(p^2\tau^{2\nu}(K\,r_1 + T\,M) + c_0(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)(r_1 + M) + L_2 p^2 T\tilde{C}\tau\,(r_1 + r_2 + M)\Big).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Schließlich ergibt sich für den letzten abzuschätzenden Summanden S_3, aufgrund der Wachstumsbedingung [ST2] sowie der Voraussetzung (3.7) und der Regularitätsbedingungen [R2] und [R3]:

$$\begin{aligned}
S_3 &\leq 2\int_0^{\tau} \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{d_1}\Big(\|\Pi_n B_k(s,u(s))\|_{H_n}^2 + \|B_{k,0}(u_0^{n,\tau})\|_{H_n}^2\Big)\Big]\,\mathrm{d}s \\
&\leq 2\,p^2\Big(K\int_0^{\tau} \mathbb{E}[\|u(s)\|_{\mathcal{H}}^2]\,\mathrm{d}s + \int_0^{\tau} \mathbb{E}[\eta(s)]\,\mathrm{d}s\Big) + 2\,\tau\Big(K\,\mathbb{E}[\|u_0^{n,\tau}\|_{V_n}^2] + \mathbb{E}[g_0^{n,\tau}]\Big) \\
&\leq 2\,p^2\,\tau\Big(K \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[\|u(t)\|_{\mathcal{H}}^2] + \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[\eta(t)]\Big) + 2\,\tau\Big(K \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[\|u_0^{n,\tau}\|_{V_n}^2] + \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[g_0^{n,\tau}]\Big),
\end{aligned}$$

und damit:

$$S_3 \leq 2\,p^2\,\tau\,(K\,r_2 + M) + 2\,\tau\,(K+1)\,M. \tag{3.27}$$

Wählen wir nun $\varepsilon > 0$ klein genung, und zwar so, dass

$$\varepsilon(1 + L_2) \leq \frac{\lambda}{2},$$

so folgt, wegen $\tau < 1$, aus (3.21), (3.26) und (3.27) die Existenz einer geeigneten Konstante $\tilde{C}_3$, so dass die behauptete Abschätzung (3.14) gilt.

Schritt 4: Wir weisen nach, dass zwei von $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq m_0$ unabhängige Konstanten $\tilde{C}_{4,1} = \tilde{C}_{4,1}(L, T)$ sowie $\tilde{C}_{4,2} = \tilde{C}_{4,2}(L, \lambda, p, K, T, c_0, L_1, L_2)$ existieren, so dass

$$\max_{0 \leq l \leq m} \mathbb{E}[\|e_l\|^2_{H_n}] \leq \tilde{C}_{4,1}\, \mathbb{E}[\|e_0\|^2_{H_n}] + \tilde{C}_{4,2}\, (\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)\, (r_1 + r_2 + M) \tag{3.28}$$

gilt. Dafür benutzen wir, dass aus Ungleichung (3.14), wegen der Positivität des zweiten Summanden auf der linken Seite folgt, dass für beliebiges $l \in \{0, 1, \dots, m\}$

$$\mathbb{E}[\|e_l\|^2_{H_n}] \leq \mathbb{E}[\|e_0\|^2_{H_n}] + L\,\tau\, \mathbb{E}[\|e_l\|^2_{H_n}] + L \sum_{i=1}^{l-1} \tau\, \mathbb{E}[\|e_i\|^2_{H_n}] + \tilde{C}_3(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)(r_1 + r_2 + M)$$

gilt und damit auch

$$\mathbb{E}[\|e_l\|^2_{H_n}]\,(1 - L\,\tau) \leq \mathbb{E}[\|e_0\|^2_{H_n}] + L \sum_{i=1}^{l-1} \tau\, \mathbb{E}[\|e_i\|^2_{H_n}] + \tilde{C}_3(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)(r_1 + r_2 + M).$$

Da $L\tau < 1$ angenommen wurde, können wir für $l \in \{0, 1, \dots, m\}$ mit dem Gronwall'schen Lemma (siehe Anhang D) den folgenden Schluss daraus ziehen:

$$\mathbb{E}[\|e_l\|^2_{H_n}] \leq \frac{1}{1 - L\tau} \Big(\mathbb{E}[\|e_0\|^2_{H_n}] + \tilde{C}_3(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)(r_1 + r_2 + M)\Big) \exp\Big(\frac{L}{1 - L\tau} \sum_{i=0}^{l-1} \tau\Big).$$

Durch Maximieren auf beiden Seiten über $l \in \{0, 1, \dots, m\}$ erhalten wir wegen $\sum_{i=0}^{m-1} \tau = T$:

$$\max_{0 \leq l \leq m} \mathbb{E}[\|e_l\|^2_{H_n}] \leq \frac{1}{1 - L\tau} \Big(\mathbb{E}[\|e_0\|^2_{H_n}] + \tilde{C}_3(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)(r_1 + r_2 + M)\Big) \exp\Big(\frac{L\,T}{1 - L\tau}\Big). \tag{3.29}$$

Die Funktion

$$\mathbb{R} \backslash \{1/L\} \ni s \mapsto \frac{1}{1 - L\,s} \in \mathbb{R}$$

ist auf $(0, 1/L)$ monoton steigend, so dass eine Konstante $\tilde{C}_{4,3} = \tilde{C}_{4,3}(L)$ existiert mit

$$\frac{1}{1 - L\tau} = \frac{1}{1 - L\tau(m)} \leq \tilde{C}_{4,3} \;\text{ für alle } m \geq m_0.$$

Aus (3.29) folgt damit die Existenz entsprechender Konstanten $\tilde{C}_{4,1}$ und $\tilde{C}_{4,2}$, so dass (3.28) erfüllt ist.

Schritt 5: Für beliebiges $l \in \{1, \dots, m\}$ zeigen wir, dass

$$\sum_{i=1}^{l} \tau\, \mathbb{E}[\|e_i\|^2_{V_n}] \leq \tilde{C}_{5,1}\, \mathbb{E}[\|e_0\|^2_{H_n}] + \tilde{C}_{5,2}\, (\tau^2\nu + \varepsilon_n^2)\, (r_1 + r_2 + M), \tag{3.30}$$

wobei $\tilde{C}_{5,1} = \tilde{C}_{5,1}(\lambda, L, T)$ und $\tilde{C}_{5,2} = \tilde{C}_{5,2}(L, \lambda, p, K, T, c_0, L_1, L_2)$ von $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq m_0$ unabhängige Konstanten sind.
Fixieren wir dafür $l \in \{1, \dots, m\}$. Aus den letzten beiden Schritten folgt

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{l} \tau\, \mathbb{E}[\|e_i\|_{V_n}^2] &\leq \mathbb{E}[\|e_0\|_{H_n}^2] + L \max_{1\leq i\leq m} \mathbb{E}[\|e_i\|_{H_n}^2] \underbrace{\sum_{i=1}^{l} \tau}_{\leq T} + \tilde{C}_3(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)(r_1 + r_2 + M) \\ &\leq (1 + L\,T\,\tilde{C}_{4,1})\, \mathbb{E}[\|e_0\|_{H_n}^2] + (L\,T\,\tilde{C}_{4,2} + \tilde{C}_3)(\tau^{2\nu} + \varepsilon_n^2)(r_1 + r_2 + M).\end{aligned}$$

Teilen wir auf beiden Seiten durch die positive Zahl $\lambda/2$, so folgt die Behauptung (3.30) mit geeigneten Konstanten.

Schritt 6: Nachdem wir den zweiten Summanden der zu beweisenden Ungleichung (3.8) geeignet abgeschätzt haben, wollen wir uns der Untersuchung des Ersten widmen und zeigen zunächst, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq m} \|e_i\|_{H_n}^2] \leq \mathbb{E}[\|e_0\|_{H_n}^2] &+ \sum_{i=1}^{m} \tau\, \mathbb{E}[\|e_i\|_{V_n}^2] + L \sum_{i=1}^{m} \tau\, \mathbb{E}[\|e_i\|_{H_n}^2] \\ &+ R^{(m)} + 2\, P_1^{(m)} + 2\, P_2^{(m)} + \mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq m} I(t_i)],\end{aligned} \tag{3.31}$$

wobei die in den vorherigen Beweisschritten eingeführten Bezeichungen übernommen wurden. Dafür gehen wir zur Maximierung über alle $l \in \{1, \dots, m\}$ auf beiden Seiten der Ungleichung (3.9) über und wenden den Erwartungswertoperator an, um daraus

$$\mathbb{E}[\max_{1\leq l\leq m} \|e_l\|_{H_n}^2] \leq \mathbb{E}[\|e_0\|_{H_n}^2] + G^{(m)} + \mathbb{E}[\max_{1\leq l\leq m} Q(t_l)] + \mathbb{E}[\max_{1\leq l\leq m} I(t_l)] \tag{3.32}$$

mit

$$G^{(m)} := \mathbb{E}\Bigg[\max_{1\leq l\leq m} \Bigg\{ \sum_{i=0}^{l-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} 2\, {}_{V_n}\langle e_{i+1}, \Pi_n A(s, u(s)) - A_{i+1}(u_{i+1})\rangle_{V_n^*}\, \mathrm{d}s \Bigg\}\Bigg]$$

zu erhalten. Indem wir die Ungleichung (3.12) verwenden, erhalten wir unter Ausnutzung der starken Monotonie [ST1]:

$$\begin{aligned}G^{(m)} \leq\; & \mathbb{E}\Bigg[\max_{1\leq l\leq m} \Bigg\{ \overbrace{-\lambda \sum_{i=1}^{l} \tau\, \|e_i\|_{V_n}^2 + L \sum_{i=1}^{l} \tau\, \|e_i\|_{H_n}^2}^{\leq 0} \Bigg\}\Bigg] \\ &+ \mathbb{E}\Bigg[\max_{1\leq l\leq m} \Bigg\{ \sum_{i=1}^{l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} 2\, {}_{V_n}\langle e_i, \Pi_n A(s, u(s)) - A_i(\Pi_n u(t_i))\rangle_{V_n^*}\, \mathrm{d}s \Bigg\}\Bigg] \\ &+ \mathbb{E}\Bigg[\max_{1\leq l\leq m} \underbrace{\Bigg\{ -\sum_{i=1}^{l-1} \tau\, \|B_{k,i}(\Pi_n u(t_i)) - B_{k,i}(u_i)\|_{H_n}^2 \Bigg\}}_{\leq 0}\Bigg],\end{aligned}$$

und damit, unter Anwendung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung und der Abschätzung

(3.5) mit $\varepsilon = 1$:

$$\begin{aligned} G^{(m)} &\leq L \sum_{i=1}^{m} \tau\, \mathbb{E}[\|e_i\|_{H_n}^2] + \mathbb{E}\bigg[\max_{1\leq l\leq m} \bigg\{ \sum_{i=1}^{l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} 2\, {}_{V_n}\langle e_i, \Pi_n A(s,u(s)) - A_i(\Pi_n u(t_i))\rangle_{V_n^*}\, \mathrm{d}s \bigg\}\bigg] \\ &\leq L \sum_{i=1}^{m} \tau\, \mathbb{E}[\|e_i\|_{H_n}^2] + \sum_{i=1}^{m} \tau\, \mathbb{E}[\|e_i\|_{V_n}^2] + \underbrace{\mathbb{E}\bigg[\sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\Pi_n A(s,u(s)) - A_i(\Pi_n u(t_i))\|_{V_n^*}^2\, \mathrm{d}s \bigg]}_{=R^{(m)}}. \end{aligned}$$

Also gilt (siehe auch (3.16)):

$$G^{(m)} \leq L \sum_{i=1}^{m} \tau\, \mathbb{E}[\|e_i\|_{H_n}^2] + \sum_{i=1}^{m} \tau\, \mathbb{E}[\|e_i\|_{V_n}^2] + R^{(m)}. \tag{3.33}$$

Aufgrund der Itô-Isometrie erhalten wir gleichzeitig

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\max_{1\leq l\leq m} Q(t_l)] &= \mathbb{E}\bigg[\max_{1\leq l\leq m} \bigg\{ \sum_{i=0}^{l-1} \bigg\| \sum_{k=1}^{d_1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_k(s)\, \mathrm{d}W^{(k)}(s) \bigg\|_{H_n}^2 \bigg\}\bigg] \\ &= \mathbb{E}\bigg[\sum_{i=0}^{m-1} \bigg\| \sum_{k=1}^{d_1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_k(s)\, \mathrm{d}W^{(k)}(s) \bigg\|_{H_n}^2 \bigg] = \mathbb{E}\bigg[\int_0^T \sum_{k=1}^{d_1} \|F_k(s)\|_{H_n}^2\, \mathrm{d}s \bigg]. \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich unter Zuhilfenahme der Dreiecksungleichung und der Konvexität der Normalparabel, dass

$$\mathbb{E}\bigg[\int_0^T \sum_{k=1}^{d_1} \|F_k(s)\|_{H_n}^2\, \mathrm{d}s \bigg] \leq 2\, P_1^{(m)} + 2\, P_2^{(m)}. \tag{3.34}$$

Aus (3.32) und (3.33) folgt damit die behauptete Abschätzung (3.31).

Schritt 7: Wir zeigen, dass

$$\mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq m} I(t_i)] \leq \frac{1}{2} \mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq m} \|e_i\|_{H_n}^2] + 18\, \mathbb{E}\bigg[\int_0^T \sum_{k=1}^{d_1} \|F_k(s)\|_{H_n}^2\, \mathrm{d}s \bigg]. \tag{3.35}$$

Dafür benutzen wir die Davis-Ungleichung (siehe auch Satz 2.49) und erhalten, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq m} I(t_i)] &\leq \mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq m} |I(t_i)|\,] \\ &= 2\, \mathbb{E}\bigg[\max_{1\leq i\leq m} \bigg| \sum_{k=1}^{d_1} \int_0^{t_i} \langle e(s), F_k(s)\rangle_{H_n}\, \mathrm{d}W^{(k)}(s) \bigg| \bigg] \\ &\leq 2\, \mathbb{E}\bigg[\sup_{t\in[0,T]} \bigg| \sum_{k=1}^{d_1} \int_0^{t} \langle e(s), F_k(s)\rangle_{H_n}\, \mathrm{d}W^{(k)}(s) \bigg| \bigg] \\ &\leq 2\bigg(3\, \mathbb{E}\bigg[\bigg(\sum_{k=1}^{d_1} \int_0^T \big|\langle e(s), F_k(s)\rangle_{H_n}\big|^2\, \mathrm{d}s \bigg)^{1/2} \bigg]\bigg). \end{aligned}$$

Wenden wir die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung an und benutzen die Abschätzung (3.5), so folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq m} I(t_i)] &\leq 3\,\mathbb{E}\Bigg[2\Big(\sum_{k=1}^{d_1}\int_0^T \|e(s)\|_{H_n}^2\cdot\|F_k(s)\|_{H_n}^2\,\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\Bigg] \\
&\leq 3\,\mathbb{E}\Bigg[2\Big(\sum_{k=1}^{d_1}\int_0^T \max_{1\leq i\leq m}\|e_i\|_{H_n}^2\cdot\|F_k(s)\|_{H_n}^2\,\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\Bigg] \\
&= 3\,\mathbb{E}\Bigg[2\Big(\max_{1\leq i\leq m}\|e_i\|_{H_n}^2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\sum_{k=1}^{d_1}\int_0^T \|F_k(s)\|_{H_n}^2\,\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\Bigg] \\
&\leq 3\,\mathbb{E}\Bigg[\varepsilon\max_{1\leq i\leq m}\|e_i\|_{H_n}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{d_1}\int_0^T \|F_k(s)\|_{H_n}^2\,\mathrm{d}s\Bigg] \\
&= 3\,\varepsilon\,\mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq m}\|e_i\|_{H_n}^2] + \frac{3}{\varepsilon}\mathbb{E}\Bigg[\int_0^T\sum_{k=1}^{d_1}\|F_k(s)\|_{H_n}^2\,\mathrm{d}s\Bigg],
\end{aligned}$$

und indem wir $\varepsilon = 1/6$ einsetzen, erhalten wir die Behauptung (3.35).

Schritt 8: In einem letzten Schritt fassen wir zusammen. Setzen wir das im Schritt 7 Gezeigte in (3.31) ein und benutzen (3.34) so erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}[\max_{1\leq l\leq m}\|e_l\|_{H_n}^2] \leq \mathbb{E}[\|e_0\|_{H_n}^2] + \sum_{i=1}^{m}\tau\,\mathbb{E}[\|e_i\|_{V_n}^2] + L\sum_{i=1}^{m}\tau\,\mathbb{E}[\|e_i\|_{H_n}^2] + R^{(m)} + 38\,P_1^{(m)} + 38\,P_2^{(m)}.$$

Berücksichtigen wir die im zweiten Beweisschritt durchgeführten Abschätzungen (insb. (3.20), (3.23) und (3.25)) sowie die Ergebnisse des vierten und fünften Beweisschrittes, so folgt die Behauptung des Satzes. □

Zusammenfassung und Ausblick

Mit dieser Arbeit wurden zwei Ziele verfolgt. Zum einen sollte der Zugang zu stochastischen partiellen Differentialgleichungen durch eine detaillierte Konstruktion des Itô-Integrals im unendlich-dimensionalen Kontext eröffnet werden. Zum anderen sollte eine Klasse stochastischer Evolutionsgleichungen vorgestellt werden und ein numerisches Approximationsschema aus der aktuellen Literatur vorgestellt und auf die Konvergenzrate hin analysiert werden.
Nach einigen Vorbereitungen, haben wir das stochastische Integral bzgl. eines Q-Wiener Prozesses zunächst für eine einfache Klasse $L(U, H)$-wertiger stochastischer Prozesse in Analogie zum Stieltjes-Integral definiert (U und H waren dabei separable Hilberträume). Im weiteren Verlauf konnten wir unter Benutzung funktionalanalytischer Methoden die Menge der möglichen Integranden auf $L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T; L_2(U_0, H))$ erweitern ($U_0 = \mathrm{Q}^{1/2}(U)$). Für jeden vorhersagbaren stochastischen Prozess $\Phi \in L^2(L_2(U_0, H))$ handelt es sich bei dem stochastischen Integral

$$\left(\int_0^t \Phi(s)\,\mathrm{d}W(s) \right)_{t\in[0,T]}$$

um ein quadratisch integrierbares, H-wertiges Martingal, das $\mathbb{P}$-f.s. im Nullpunkt startende, stetige Trajektorjen besitzt. Schließlich wurde die Menge der Integranden noch einmal mittels Lokalisation erweitert.
Bei der Betrachtung stochastischer Evolutionsgleichungen sind wir der Variationsformulierung gefolgt. Unter Monotonie-, Wachstums-, Stetigkeits- und Koerzivitätsbedingungen, die wir an A und B aus der im Mittelpunkt stehenden Gleichung

$$(\bullet) \qquad u(t) = u_0 + \int_0^t A(s, u(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t B(s, u(s))\,\mathrm{d}W(s) \qquad (t \in [0, T]),$$

gestellt haben, wurde ein Lösungsbegriff eingeführt und eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage präsentiert. Anschließend wurde ein implizites Schema zur Approximation der Lösung von $(\bullet)$ vorgestellt und unter weiteren Regularitäts- und Konsistenzbedingungen eine Abschätzung der Konvergenzrate bewiesen. Die Analyse wurde in einem allgemeinen Rahmen durchgeführt. Dies hat den Vorteil, dass bei der Betrachtung konkreter Beispiele der Nachweis, dass die im abstrakten Kontext gestellten Bedingungen erfüllt sind, eine unmittelbare Abschätzung der Konvergenzrate zulässt (vgl. [10, 6; S. 56 ff.]).
Zahlreiche Fragen aus dem Bereich der stochastischen partiellen Differentialgleichungen sind noch unbeantwortet. Ein interessanter Aspekt, den wir zum Schluss herausstellen wollen, ist die Untersuchung der Einsetzbarkeit von adaptiven Approximationsverfahren in diesem Bereich. Besitzt das zu approximierende Objekt eine hohe Besov-Regularität, so weisen diese Verfahren wesentlich bessere Ergebnisse auf, als nicht adaptiv arbeitende Verfahren. Welche Besov-Regularität die Lösungen stochastischer partieller Differentialgleichungen besitzen, ist noch ungeklärt und im Hinblick auf die numerische Behandlung dieser Gleichungen und deren praktischen Einsetzbarkeit von hohem Interesse.

Anhang A

Fourier-Transformation

Im Folgenden sei $(U, \langle .,.\rangle_U)$ stets ein separabler Hilbertraum. Falls klar ist welcher Skalarprodukt gemeint ist, verzichten wir auf eine explizite Erwähnung des Hilbertraumes und schreiben $\langle .,.\rangle$ anstatt $\langle .,.\rangle_U$. Falls nichts weiteres erwähnt wird, stammen die Resultate in diesem Kapitel aus [5, § 1.4].

Definition A.1 (Fourier-Transformation eines Wahrscheinlichkeitsmaßes)**:** Sei $(U, \langle .,.\rangle_U)$ ein separabler Hilbertraum, μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(U, \mathscr{B}(U))$. Ferner sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X\colon \Omega \to U$ eine Zufallsvariable. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\mu}\colon\ U &\to \mathbb{C} \\ \xi &\mapsto \int_U e^{i\langle \xi, x\rangle_U} \mu(\mathrm{d}x) \end{aligned} \tag{A.1}$$

heisst *Fourier-Transformation* des Wahrscheinlichkeitsmaßes μ. Ist μ die Verteilung der Zufallsvariablen X, d.h. $\mu = X(\mathbb{P})$, so wird $\hat{\mu}$ auch Fourier-Transformation oder *charakteristische Funktion* der Zufallsvariablen X genannt.

Bemerkung A.2: *i.)* Da das betrachtete Maß μ in (A.1) endlich ist und für jedes $\xi \in U$

$$\left| e^{i\langle \xi, x\rangle_U} \right| \leq 1 \qquad \text{für alle } x \in U \text{ und } \xi \in U,$$

ist das Integral in (A.1) für jedes $\xi \in U$ definiert. Die obige Definition macht also Sinn.

ii.) In der Literatur wird die Fourier-Transformation im Allgemeinen auf $U = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, definiert. Bezeichnen wir mit $\mathscr{M}_1(\mathbb{R}^d)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}^d$ und mit $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ die Menge der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{C}$, lässt sich zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\colon\ \mathscr{M}_1(\mathbb{R}^d) &\to \mathscr{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \\ \mu &\mapsto \hat{\mu} \end{aligned}$$

injektiv und damit die Fourier-Transformation eindeutig ist (vgl. z.B. [2, § 23]). Da wir jeden Hilbertraum U mit Dimension $d \in \mathbb{N}$, $d < \infty$, mit $\mathbb{R}^d$ identifizieren können, ist auch die Fourier-Transformation auf beliebigen endlichdimensionalen Hilberträumen eindeutig.

Unser Ziel ist zu zeigen, dass die Fourier-Transformation von Wahrscheinlichkeitsmaßen auch auf unendlich-dimensionalen separablen Hilberträumen eindeutig ist. D.h. wir wollen den folgenden Satz beweisen:

Satz A.3: *Seien μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(U, \mathscr{B}(U))$. Falls*

$$\hat{\mu}(\xi) = \hat{\nu}(\xi) \qquad \text{für alle } \xi \in U,$$

so gilt: $\mu = \nu$.
Entsprechen sich die Fourier-Transformationen zweier Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem ganzen Hilbertraum U, so sind diese Maße also gleich.

Für den Nachweis dieses Resultats, beweisen wir zunächst zwei Zwischenresultate. Als erstes zeigen wir:

Satz A.4: *Seien μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(U, \mathscr{B}(U))$, so dass für jede stetige und beschränkte Funktion $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ die Gleichheit:*

$$\int_U \varphi(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int_U \varphi(x)\,\nu(\mathrm{d}x). \tag{A.2}$$

erfüllt ist. Dann gilt: $\mu = \nu$.

Beweis: Wir bezeichnen mit

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{\|x - a\|_U : a \in A\}$$

den Abstand zwischen einem Punkt $x \in U$ und einer Menge $A \subseteq U$. Ferner sei $\mathscr{G}$ das Mengensystem der abgeschlossenen Teilmengen von U. Wir wollen zeigen, dass

$$\mu(C) = \nu(C) \text{ für alle } C \in \mathscr{G} \tag{A.3}$$

gilt. Da $\mathscr{G}$ $\cap$-stabil ist, folgt daraus mit dem Eindeutigkeitssatz für Wahrscheinlichkeitsmaße unmittelbar die Behauptung. Wir zeigen nun die Gültigkeit von (A.3). Dafür wählen wir $C \in \mathscr{G}$ beliebig. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in C \\ 1 - n\operatorname{dist}(x, C) & \text{falls } \operatorname{dist}(x, C) \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{falls } \operatorname{dist}(x, C) \ge \frac{1}{n} \end{cases} \qquad (x \in U).$$

Da die Funktion $\operatorname{dist}(\,.\,, C)$ stetig ist, ist auch $\varphi_n(.)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig. Man sieht leicht, dass

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \mathbb{1}_C(x) \text{ für alle } x \in U$$

und, dass

$$|\varphi_n(x)| \le 1 \text{ für alle } x \in U \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Mit dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \int_U \varphi_n(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int_U \mathbb{1}_C(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \mu(C)$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} \int_U \varphi_n(x)\,\nu(\mathrm{d}x) = \int_U \mathbb{1}_C(x)\,\nu(\mathrm{d}x) = \nu(C).$$

Da (A.2) erfüllt ist und wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt also:

$$\mu(C) = \nu(C).$$

Die Menge $C \in \mathscr{G}$ haben wir beliebig gewählt, so dass wir die Gültigkeit von (A.3) gezeigt haben – und damit auch die Behauptung. $\square$

Mit Hilfe dieses etwas technischen Resultats, geben wir ein weiteres Kriterium an, welches Wahrscheinlichkeitsmaße auf separablen Hilberträumen festsetzt. Für dessen Formulierung, bezeichnen wir mit $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis des unendlich-dimensionalen, separablen Hilbertraumes U. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit:

$$\text{(A.4)} \qquad \mathrm{pr}^{(n)} : U \to \mathrm{pr}^{(n)}(U); \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle_U e_k \mapsto \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle_U e_k$$

die Projektion von U in den von den ersten n Basiselementen aufgespannten Raum:

$$\text{(A.5)} \qquad \mathrm{pr}^{(n)}(U) = \mathrm{span}\,\{e_k : k = 1, \dots, d\}.$$

Dann gilt insbesondere:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{pr}^{(n)}(x) = x \text{ für alle } x \in U.$$

Satz A.5: *Seien μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(U, \mathscr{B}(U))$. Ist*

$$\text{(A.6)} \qquad \mathrm{pr}^{(n)}(\mu) = \mathrm{pr}^{(n)}(\nu) \textit{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

so gilt: $\mu = \nu$.

Beweis: Wir wollen zeigen, dass wenn (A.6) gilt, dann auch die Voraussetzungen des gerade bewiesenen Satzes A.4 erfüllt sind, woraus dann die Behauptung sofort folgt. Sei dazu $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige und beschränkte Funktion mit $|\varphi(x)| \leq C$ für ein $C > 0$. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $\varphi_n := \varphi \circ \mathrm{pr}^{(n)}$ ebenfalls stetig. Wir wenden den Transformationssatz zweimal an, benutzen die Voraussetzung (A.6) und erhalten:

$$\begin{aligned} \int_U \varphi_n(x)\,\mu(\mathrm{d}x) &= \int_U \varphi \circ \mathrm{pr}^{(n)}(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int_U \varphi(y)\ \mathrm{pr}^{(n)}(\mu)(\mathrm{d}y) \\ &= \int_U \varphi(y)\ \mathrm{pr}^{(n)}(\nu)(\mathrm{d}y) = \int_U \varphi \circ \mathrm{pr}^{(n)}(x)\,\nu(\mathrm{d}x) \\ &= \int_U \varphi_n(x)\,\nu(\mathrm{d}x). \qquad \text{(A.7)} \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) \qquad \text{für alle } x \in U$$

sowie

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)| \leq C \qquad \text{für alle } x \in U,$$

was leicht nachzuprüfen ist. Also folgt aus dem Satz über dominierte Konvergenz mit Hilfe der Gleichung (A.7):

$$\int_U \varphi(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \lim_{n\to\infty} \int_U \varphi_n(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \lim_{n\to\infty} \int_U \varphi_n(x)\,\nu(\mathrm{d}x) = \int_U \varphi(x)\,\mu(\mathrm{d}x).$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes A.4 erfüllt und die Behauptung folgt. □

Wir kommen nun zum Nachweis der Eindeutigkeit der Fourier-Transformation für Wahrscheinlichkeitsmaße auf unendlich-dimensionalen Hilberträumen.

Beweis von Satz A.3: Seien $\mathrm{pr}^{(n)}$ sowie $\mathrm{pr}^{(n)}(U)$ wie in (A.4) sowie (A.5). Dann existiert zu jedem $v \in \mathrm{pr}^{(n)}(U)$ ein $\xi \in U$, so dass $\mathrm{pr}^{(n)}(\xi) = v$. Ferner gilt für $\xi, x \in U$:

$$\begin{aligned}\langle x, \mathrm{pr}^{(n)}(\xi)\rangle &= \langle \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k, \sum_{j=1}^{n}\langle \xi, e_j\rangle e_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k, \sum_{j=1}^{n}\langle \xi, e_j\rangle e_j\rangle \\ &= \langle \mathrm{pr}^{(n)}(x), \mathrm{pr}^{(n)}(\xi)\rangle = \ldots = \langle \mathrm{pr}^{(n)}(x), \xi\rangle.\end{aligned}$$

Fixiere nun $n \in \mathbb{N}$. Für $\xi \in U$ beliebig gilt dann:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(\mathrm{pr}^{(n)}(\xi)) &= \int_U e^{i\langle x, \mathrm{pr}^{(n)}(\xi)\rangle}\,\mu(\mathrm{d}x) = \int_U e^{i\langle \mathrm{pr}^{(n)}(x), \mathrm{pr}^{(n)}(\xi)\rangle}\,\mu(\mathrm{d}x) \\ &= \int_{\mathrm{pr}^{(n)}(U)} e^{i\langle y, \mathrm{pr}^{(n)}(\xi)\rangle}\,\mathrm{pr}^{(n)}(\mu)(\mathrm{d}y) = \widehat{\mathrm{pr}^{(n)}(\nu)}(\mathrm{pr}^{(n)}(\xi))\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\hat{\nu}(\mathrm{pr}^{(n)}(\xi)) &= \int_U e^{i\langle x, \mathrm{pr}^{(n)}(\xi)\rangle}\,\nu(\mathrm{d}x) = \int_U e^{i\langle \mathrm{pr}^{(n)}(x), \mathrm{pr}^{(n)}(\xi)\rangle}\,\nu(\mathrm{d}x) \\ &= \int_{\mathrm{pr}^{(n)}(U)} e^{i\langle y, \mathrm{pr}^{(n)}(\xi)\rangle}\,\mathrm{pr}^{(n)}(\nu)(\mathrm{d}y) = \widehat{\mathrm{pr}^{(n)}(\mu)}(\mathrm{pr}^{(n)}(\xi)).\end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\widehat{\mathrm{pr}^{(n)}(\nu)}(\mathrm{pr}^{(n)}(\xi)) = \widehat{\mathrm{pr}^{(n)}(\mu)}(\mathrm{pr}^{(n)}(\xi)), \quad \text{für alle } \xi \in U,$$

und damit auch:

$$\widehat{\mathrm{pr}^{(n)}(\nu)}(h) = \widehat{\mathrm{pr}^{(n)}(\mu)}(h), \quad \text{für alle } h \in \mathrm{pr}^{(n)}(U).$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}^n$ und damit auf endlichdimensionalen Hilberträumen, folgt, dass

$$\mathrm{pr}^{(n)}(\mu) = \mathrm{pr}^{(n)}(\nu) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

gilt und damit auch $\mu = \nu$, wegen Satz A.5. $\square$

Anhang B

Das Bochner-Integral

In diesem Paragraphen wollen wir das Bochner-Integral, eine Verallgemeinerung des Lebesgue'schen Integralbegriffs für Banachraum-wertige Funktionen, einführen. Dafür sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ stets ein endlicher Maßraum, d.h. $\mathscr{A}$ sei eine σ-Algebra in Ω und μ ein endliches Maß auf $\mathscr{A}$, $\mu(\Omega) = C < \infty$. Mit E bezeichnen wir einen beliebigen separablen Banachraum. Kenntnisse der Lebesgue'schen Integrationstheorie werden vorausgesetzt. Mit $\int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu$ bezeichnen wir das Lebesgue-Integral einer messbaren Abbildung $u\colon (\Omega, \mathscr{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, welche Lebesgue-integrierbar ist.
Wie bei der Konstruktion des Lebesgue-Integrals wollen wir in einem ersten Schritt eine lineare und stetige Abbildung auf einem bestimmten normierten Vektorraum E-wertiger Funktionen definieren. Diese Abbildung werden wir dann Bochner-Integral nennen.

Definition B.1 (einfache Abbildung)**:** Eine Abbildung $u\colon \Omega \to E$ heisst *einfach*, falls sie messbar ist und nur endlich viele Werte annimmt.

Notation: Die Menge der $\mathscr{A}/\mathscr{B}$-messbaren einfachen Abbildungen von Ω nach E bezeichnen wir mit $\mathscr{E}^*(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, d.h.

$$\mathscr{E}^*(\mathscr{A}, \mathscr{B}) := \{u\colon \Omega \to E \mid u \text{ ist } \mathscr{A}/\mathscr{B}\text{-messbar und nimmt nur endlich viele Werte an}\}.$$

Wird aus dem Kontext klar um welche σ-Algebren es sich handelt, so schreiben wir auch kurz $\mathscr{E}^*$ statt $\mathscr{E}^*(\mathscr{A}, \mathscr{B})$.

Bemerkung B.2: Die Menge $\mathscr{E}^*(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ bildet zusammen mit der Addition:

$$\begin{aligned} +\colon \quad \mathscr{E}^* \times \mathscr{E}^* &\to \mathscr{E}^* \\ (u, v) &\mapsto u + v, \end{aligned}$$

wobei $(u + v)(\omega) = u(\omega) + v(\omega)$, $\omega \in \Omega$, und mit der Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned} \cdot\colon \quad \mathbb{R} \times \mathscr{E}^* &\to \mathscr{E}^* \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda u, \end{aligned}$$

wobei $(\lambda u)(\omega) = \lambda \cdot u(\omega)$, $\omega \in \Omega$, einen Vektorraum $(\mathscr{E}^*, +, \cdot)$.

Lemma B.3: *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \|.\|_{\mathscr{E}^*}\colon \quad \mathscr{E}^* &\to [0, \infty) \\ u &\mapsto \|u\|_{\mathscr{E}^*} := \int_\Omega \|u\|_E \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

ist eine Halbnorm auf dem Vektorraum $\mathscr{E}^*$.

Beweis: Ist u eine $\mathscr{A}/\mathscr{B}(E)$-messbare Abbildung, so ist $\|u\|_E$ $\mathscr{A}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbar, da die Norm $\|.\|_E$ eine stetige und damit $\mathscr{B}(E)/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbare Abbildung ist. Aufgrund der Einfachheit von u, nimmt $\|u\|_E$ nur endlich viele Werte in $\mathbb{R}$ an, also ist $\|u\|_E \in \mathscr{E}^*(\mathscr{A}, \mathscr{B}(E))$. Insbesondere ist u wegen der Endlichkeit des Maßes μ Lebesgue-integrierbar. Die restlichen Halbnormeigenschaften folgen aus der Dreiecksungleichung für $\|.\|_E$ sowie aus der Linearität des Lebesgue-Integrals. □

Um einen normierten Vektorraum zu bekommen greifen wir auf das folgende funktionalanalytische Resultat zurück.

Satz B.4: *Es sei* $(X, \|.\|^*)$ *ein halbnormierter Vektorraum. Dann gilt:*

a.) $\mathscr{N} := \{x \in X : \|x\|^* = 0\}$ *ist ein Untervektorraum von* X*.*

b.) Bezeichnen wir mit $[x]_{\mathscr{N}} := \{y \in X : y - x \in \mathscr{N}\}$ *für jedes* $x \in X$ *die zugehörige Äquivalenzklasse von* x *bzgl.* $\mathscr{N}$*, so ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rrcl} \|.\|: & X/\mathscr{N} & \to & [0,\infty) \\ & [x]_{\mathscr{N}} & \mapsto & \|\,[x]_{\mathscr{N}}\,\| := \|x\|^* \end{array}$$

eine Norm auf dem Quotientenvektorraum $X/\mathscr{N} := \{\,[x]_{\mathscr{N}} : x \in X\}$ *von* X *nach* $\mathscr{N}$*.*

c.) Ist $(X, \|.\|^*)$ *vollständig, so ist* $(X/\mathscr{N}, \|.\|)$ *ein Banachraum.*

Beweis: [siehe [21, Lemma I.1.9, S. 18]] □

Definition B.5: Wir definieren $\mathscr{N}_* := \{u \in \mathscr{E}^* : \|u\|_{\mathscr{E}^*} = 0\}$ und setzen:

$$\mathscr{E} := \mathscr{E}(\mathscr{A}, \mathscr{B}) := \mathscr{E}^*(\mathscr{A}, \mathscr{B})/\mathscr{N}_*$$

sowie

$$\|\,[u]_{\mathscr{N}_*}\,\|_{\mathscr{E}} := \|u\|_{\mathscr{E}^*} \qquad (u \in \mathscr{E}^*)\,.$$

Konvention B.6: Aus Übersichtlichkeitsgründen, schreiben wir $u \in \mathscr{E}$ sowohl für einen beliebigen Repräsentanten der Äquivalenzklasse $[u]_{\mathscr{N}_*} \in \mathscr{E}$ als auch für das entsprechende Element $u \in \mathscr{E}^*$.

Bemerkung B.7: Es sei $u \in \mathscr{E}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$. Dann existieren $n \in \mathbb{N}$ messbare, paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ mit $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$ sowie $e_1, \ldots, e_n \in E$, so dass sich u wie folgt schreiben lässt:

$$u(\omega) = \sum_{i=1}^{n} e_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega) \qquad (\omega \in \Omega). \tag{B.1}$$

Wir nennen (B.1) eine *Normaldarstellung* von u. Man beachte, dass diese nicht eindeutig ist. Umgekehrt ist natürlich jede Abbildung, die sich wie in (B.1) schreiben lässt, einfach.

Definition B.8 (Bochner-Integral einer einfachen Abbildung)**:** Es sei $\sum_{i=1}^n e_i \mathbb{1}_{A_i}$ eine Normaldarstellung von $u \in \mathscr{E}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$. Dann heisst:

$$\mathrm{int}_\mu(u) := \sum_{i=1}^{n} e_i\, \mu(A_i) \tag{B.2}$$

Integral oder *μ-Integral* oder *Bochner-Integral* von u bezüglich μ.

Der folgende Satz liefert uns die Wohldefiniertheit des gerade für einfache, messbare Abbildungen definierten Bochner-Integrals und einige wichtige Eigenschaften.

Satz B.9: *Es seien $\sum_{i=1}^n e_i \mathbb{1}_{A_i}$ sowie $\sum_{k=1}^m f_k \mathbb{1}_{B_k}$ zwei Normaldarstellungen derselben einfachen Abbildung $u \in \mathscr{E}(\mathscr{A},\mathscr{B})$. Dann gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} e_i\, \mu(A_i) = \sum_{k=1}^{m} f_k\, \mu(B_k). \tag{B.3}$$

D.h. die Abbildung:

$$\begin{aligned} \operatorname{int}_\mu\colon\ (\mathscr{E}, \|.\|_{\mathscr{E}}) &\to (E, \|.\|_E) \\ u &\mapsto \operatorname{int}_\mu(u) \end{aligned} \tag{B.4}$$

ist wohldefiniert. Diese ist zudem linear und wegen

$$\|\operatorname{int}_\mu(u)\|_E \leq \int_\Omega \|u\|_E \mathrm{d}\mu = \|u\|_{\mathscr{E}} \qquad (u \in \mathscr{E}) \tag{B.5}$$

stetig.

Beweis: Auf einen Beweis der Gleichheit (B.3) verzichten wir an dieser Stelle und verweisen darauf, dass er analog zum Beweis von Lemma 9.1 in [20] geführt werden kann. Die Linearität kann ebenfalls analog zum Beweis von Properties 9.3 in [20] nachgewiesen werden. Die obige Dreiecksungleichung (B.5) sehen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \|\operatorname{int}_\mu(u)\|_E &= \Big\|\operatorname{int}_\mu\Big(\sum_{i=1}^n e_i \mathbb{1}_{A_i}\Big)\Big\|_E = \Big\|\sum_{i=1}^n e_i\, \mu(A_i)\Big\|_E \leq \sum_{i=1}^n \|e_i\|_E\, \mu(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \|e_i\|_E \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i} \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_E \mathbb{1}_{A_i}\Big) \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \|u\|_E \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Linearität des Lebesgue'schen Integrals benutzt und die Tatsache, dass die Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ paarweise disjunkt sind und damit

$$\|u(\omega)\|_E = \sum_{i=1}^n \|e_i\|_E \mathbb{1}_{A_i}(\omega) \qquad (\omega \in \Omega)$$

gilt. □

Wir können nun das Bochner-Integral auf der (abstrakten) Vervollständigung $\overline{\mathscr{E}}$ von $\mathscr{E}$ stetig und linear fortsetzten. Wir wollen im Folgenden eine genaue Gestalt der Vervollständigung von $\mathscr{E}$ angeben. Zunächst definieren wir dafür geeignete Funktionenräume und zeigen, dass sie vollständig sind.

Definition B.10 ($\mathscr{L}^p$; L^p)**:** Es sei $p \in [1, \infty)$.

i.) Wir definieren den Raum:

$$\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E) := \Big\{u\colon \Omega \to E \,\Big|\, u \text{ ist } \mathscr{A}/\mathscr{B}\text{-messbar und } \int_\Omega \|u\|_E^p \,\mathrm{d}\mu < \infty\Big\},$$

und die Halbnorm:

$$\begin{aligned} \|.\|_p : \quad \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E) &\to [0, \infty) \\ u &\mapsto \|u\|_p := \sqrt[p]{\int_\Omega \|u\|_E^p \mathrm{d}\mu}\,. \end{aligned}$$

Notation: Wir schreiben auch $\|.\|_{p,E}$ oder $\|.\|_{\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;E)}$ anstatt $\|.\|_p$, wenn wir spezifizieren wollen um welche Räume es sich genau handelt.

ii.) Wir betrachten die Menge:

$$\begin{aligned} \mathscr{N}_0 &:= \left\{u \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E) : \ \|u\|_p = 0\right\} \\ &= \left\{u \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E) : \ \mu(\{\omega \in \Omega : \ u(\omega) \neq 0\}) = 0\right\}, \end{aligned}$$

und setzen:

$$L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E) := \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)/\mathscr{N}_0.$$

Auf diesem Raum definieren wir die Norm:

$$\|\,[u]_{\mathscr{N}_0}\,\|_{L^p} := \|u\|_p \qquad (u \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)).$$

Konvention B.11: Um die Übersichtlichkiet zu wahren, schreiben wir $u \in L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$ sowohl für die Äquivalenzklasse $[u]_{\mathscr{N}_0} \in L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$ als auch für einen beliebigen Räpräsentanten $u \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$. Wir sagen dann, u sei *p-fach Bochner-integrierbar* oder *p-fach μ-integrierbar* oder einfach *p-fach integrierbar*. Für $p = 1$ sagen wir u sei integrierbar und für $p = 2$ auch u sei *quadratisch integrierbar*.

Bemerkung B.12: Setzen wir $(\mathbb{R}, |.|)$ anstatt $(E, \|.\|_E)$ in die obige Definition ein, so handelt es sich bei $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; \mathbb{R})$ um den Raum der p-fach Lebesgue-integrierbaren Funktionen sowie bei $L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; \mathbb{R})$ um den entsprechenden Quotientenraum.

Um die Vollständigkeit dieser Räume nachzuweisen, benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

Lemma B.13: *Es sei $p \in [1, \infty)$. Ferner sei $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$. Dann gilt:*

$$\left(\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \|u_i\|_E\Big)^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|u_i\|_{p,E}. \tag{B.6}$$

Beweis: Für $N \in \mathbb{N}$ beliebig erhalten wir mit Hilfe der Minkowsky'schen Ungleichung:

$$\left(\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{N} \|u_i\|_E\Big)^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^{N} \Big\|\|u_i\|_E\Big\|_{p,\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{N} \|u_i\|_{p,E}$$

und durch Supremumsbildung:

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left(\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{N} \|u_i\|_E\Big)^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|u_i\|_{p,E}. \tag{B.7}$$

Ferner ist $\left(\sum_{i=1}^N \|u_i\|_E\right)_{N\in\mathbb{N}}$ eine monoton gegen $\sum_{i=1}^\infty \|u_i\|_E$ steigende Folge positiver, messbarer Abbildungen und die Funktion:

$$[0, \infty] \ni x \mapsto x^\alpha \in [0, \infty]$$

ist für $\alpha > 0$ stetig und monoton steigend. Daraus folgt mit Hilfe des Satzes von Beppo Levi:

$$\begin{aligned}\sup_{N\in\mathbb{N}}\Big(\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^{N}\|u_i\|_E\Big)^p \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} &= \Big(\sup_{N\in\mathbb{N}}\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^{N}\|u_i\|_E\Big)^p \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}\\ &= \Big(\int_\Omega \sup_{N\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{i=1}^{N}\|u_i\|_E\Big)^p \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} = \Big(\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\|u_i\|_E\Big)^p \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p},\end{aligned}$$

und durch Einsetzen in (B.7) erhalten wir die Behauptung. □

Satz B.14 (von Riesz-Fischer)**:** *Es sei $p \in [1,\infty)$. Dann ist $(L^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;E),\|.\|_{L^p})$ ein Banachraum.*

Beweis: Bei dem folgenden Beweis handelt es sich um eine Anpassung des Beweises für den Fall $E = \mathbb{R}$, wie er sich z.B. in [20, Theorem 12.7, S. 110] findet. Wir zeigen, dass der Raum $(\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;E),\|.\|_p)$ vollständig ist. Aus Satz B.4 folgt dann, dass $(L^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;E),\|.\|_{L^p})$ ein Banachraum ist. Nunmehr, sei $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;E)$ eine Cauchy-Folge, d.h. zu $\varepsilon > 0$ beliebig, existiere ein $M_0 = M_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n,m \geq M_0$ gilt:

$$\|u_n - u_m\|_p \leq \varepsilon.$$

Dann existiert eine Teilfolge $(u_{N_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|u_{N_{k+1}} - u_{N_k}\|_p \leq 2^{-k}.$$

Wir setzen $u_{N_0} \equiv 0$ und schreiben diese Teilfolge als Teleskopsumme auf:

$$u_{N_k} = \sum_{i=0}^{k-1} u_{N_{i+1}} - u_{N_i} \qquad (k \in \mathbb{N})\,.$$

Mit Hilfe von Lemma B.13 erhalten wir:

$$\Big(\int_\Omega\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\|u_{N_{i+1}} - u_{N_i}\|_E\Big)^p \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} \leq \sum_{i=0}^{\infty}\|u_{N_{i+1}} - u_{N_i}\|_p \leq \|u_{N_1}\|_p + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} < \infty.$$

Daraus ergibt sich die Existenz einer μ-Nullmenge $N \in \mathscr{A}$, $\mu(N) = 0$, so dass für alle $\omega \in \Omega\backslash N$:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\|u_{N_{i+1}}(\omega) - u_{N_i}(\omega)\|_E < \infty$$

gilt. Da E ein Banachraum ist, impliziert die absolute Konvergenz einer Reihe ihre Konvergenz, so dass wir für jedes $\omega \in \Omega\backslash N$ die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_{N_{i+1}}(\omega) - u_{N_i}(\omega) \in E$$

erhalten. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$\tilde{u}_{N_k}(\omega) := \mathbb{1}_{\Omega\backslash N}(\omega)\, u_{N_k}(\omega) \qquad (\omega \in \Omega).$$

Dann ist die Abbildung:

$$\Omega \ni \omega \mapsto u(\omega) := \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{u}_{N_{i+1}}(\omega) - \tilde{u}_{N_i}(\omega) = \lim_{k\to\infty} \tilde{u}_{N_k}(\omega) \in E$$

als Grenzwert messbarer Abbildungen wieder messbar. Zudem gilt:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|u\|_E^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \Big\| \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{u}_{N_{i+1}} - \tilde{u}_{N_i} \Big\|_E^p \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \|\tilde{u}_{N_{i+1}} - \tilde{u}_{N_i}\|_E \Big)^p \,\mathrm{d}\mu \\ &\le \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \|\tilde{u}_{N_{i+1}} - \tilde{u}_{N_i}\|_p \Big)^p = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \|u_{N_{i+1}} - u_{N_i}\|_p \Big)^p \le \Big(\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \Big)^p < \infty,\end{aligned}$$

also ist $u \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$, wobei das Lemma B.13 sowie die Tatsache, dass

$$\|u_{N_{i+1}} - u_{N_i}\|_p = \|\tilde{u}_{N_{i+1}} - \tilde{u}_{N_i}\|_p, \qquad \text{für alle } i \in \mathbb{N},$$

gilt, in die obige Rechnung einfließt. Gleichzeitig gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \|u - u_{N_k}\|_p = 0,$$

denn:

$$\begin{aligned}\|u - u_{N_k}\|_p &= \Big(\int_\Omega \|u - u_{N_k}\|_E^p \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} = \Big(\int_\Omega \|u - \tilde{u}_{N_k}\|_E^p \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} \\ &= \Big(\int_\Omega \Big\| \sum_{i=k+1}^{\infty} \tilde{u}_{N_{i+1}} - \tilde{u}_{N_i} \Big\|_E^p \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} \le \Big(\int_\Omega \Big(\sum_{i=k+1}^{\infty} \|\tilde{u}_{N_{i+1}} - \tilde{u}_{N_i}\|_E \Big)^p \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} \\ &\le \sum_{i=k+1}^{\infty} \|\tilde{u}_{N_{i+1}} - \tilde{u}_{N_i}\|_p = \sum_{i=k+1}^{\infty} \|u_{N_{i+1}} - u_{N_i}\|_p \le \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i}.\end{aligned}$$

Da $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$-Cauchy-Folge ist, folgt daraus für jedes $\varepsilon > 0$, die Existenz eines $M_0 = M_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sowie einer Zahl $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j \ge M_0$ und für alle $k \ge k_0$ gilt:

$$\|u - u_j\|_p \le \underbrace{\|u_j - u_{N_k}\|_p}_{\le \varepsilon/2} + \underbrace{\|u_{N_k} - u\|_p}_{\le \varepsilon/2} \le \varepsilon.$$

Insgesamt, haben wir eine Abbildung $u \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$ gefunden, so dass

$$\lim_{i\to\infty} \|u - u_i\|_p = 0,$$

gilt und damit die Vollständigkeit des Raumes $(\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E), \|.\|_p)$ nachgewiesen. □

Korollar B.15: *Es sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$ für ein $p \in [1, \infty)$. Konvergiert diese Folge in der $\|.\|_{L^p}$-Norm gegen ein $u \in L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$, so existiert eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ welche μ-f.ü. gegen u konvergiert.*

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem ersten Teil des Beweises von Satz B.14. □

Bemerkung B.16: Wir wollen nun $\mathscr{E}$ als Teilmenge von $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$ verstehen. Dies geht allerdings nicht ohne weiteres, denn für $u \in \mathscr{E}^*$ gilt im Allgemeinen:

$$[u]_{\mathcal{N}_*} = \{v \in \mathscr{E}^* : \|v\|_{\mathscr{E}^*} = 0\} \subsetneq \{v \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E) : \|v\|_{L^1} = 0\} = [u]_{\mathcal{N}_0} .$$

Wir können aber $\mathscr{E}$ isometrisch in $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$ einbetten; genauer: die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} j\colon & \mathscr{E} & \to & L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E) \\ & [u]_{\mathcal{N}_*} & \mapsto & [u]_{\mathcal{N}_0} \end{array}$$

ist linear, stetig und isometrisch. Aus Übersichtlichkeitsgründen, schreiben wir trotzdem weiterhin $\mathscr{E}$ anstatt $j(\mathscr{E}) \subseteq L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$ und behalten auch alle anderen Bezeichnungen bei.

Der Charme der einfachen Abbildungen liegt nicht nur darin, dass sie sehr einfach zu handhaben sind, sondern eben auch in ihrer Mächtigkeit: Jede messbare Funktion lässt sich als (majorisierter) punktweiser Grenzwert von einfachen Abbildungen schreiben, wie der folgende Satz zeigt.

Satz B.17: *Es sei $u\colon \Omega \to E$ eine messbare Funktion. Dann existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{E}$ einfacher Abildungen, so dass gilt:*

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n \qquad (\mu\text{-f.ü.})$$

und

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_E \leq \|u\|_E \qquad (\mu\text{-f.ü.}) .$$

Beweis: Siehe hierfür [3, Proposition E.2, S. 351] sowie Definition B.5. □

Korollar B.18: *Zu jeder Bochner-integrierbaren Abbildung $u \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$, existiert eine Folge einfacher Abbildungen, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{E}$, so dass gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^1} = 0.$$

$\mathscr{E}$ liegt also dicht in $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$.

Beweis: Es sei $u \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$. Dann existiert nach obigem Satz B.17 eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{E}$, so dass:

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_E = 0 \qquad (\mu\text{-f.ü.})$$

sowie

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u - u_n\|_E \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} (\|u_n\|_E + \|u\|_E) \leq 2\|u\|_E \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; \mathbb{R}) \qquad (\mu\text{-f.ü.}) .$$

Der Lebesgue'sche Satz über dominierte Konvergenz liefert dann:

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^1} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|u_n - u\|_E \, \mathrm{d}\mu = 0$$

und damit die Behauptung. □

Bevor wir das Bochner-Integral für Funktionen aus $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$ definieren, wollen wir an das folgende funktionalanalytische Resultat erinnern, das wir für unsere Definition (und für andere Ergebnisse in dieser Arbeit) gebrauchen werden.

Satz B.19: *Ist D ein dichter Untervektorraum des normierten Raumes X, Y ein Banachraum und $T : D \to Y$ eine stetige, lineare Abbildung, so existiert genau eine stetige und lineare Abbildung $\hat{T} : X \to Y$, so dass $\hat{T}\big|_D = T$. Zusätzlich gilt: $\|\hat{T}\|_{L(D,Y)} = \|T\|_{L(X,Y)}$.*

Beweis: [siehe [21, Satz II.1.5, S. 48]] □

Bemerkung/Definition B.20 (Bochner-Integral)**:** Wir sind nun am Ziel angekommen. Wir haben nämlich gezeigt dass $(\mathscr{E}, \|.\|_{\mathscr{E}})$ dicht in $(L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E), \|.\|_{L^1})$ liegt und, dass $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$ ein Banachraum ist. Die Abbildung int_μ aus (B.4) lässt sich damit auf genau einer Weise linear und stetig auf $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$ fortsetzen. Genauer: es existiert genau eine lineare und stetige Abbildung:

$$\text{(B.8)} \qquad \begin{array}{rccl} \mathrm{INT}_\mu : & L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E) & \to & E \\ & u & \mapsto & \mathrm{INT}_\mu(u), \end{array}$$

so dass $\mathrm{INT}_\mu\big|_{\mathscr{E}} = \mathrm{int}_\mu$ gilt. Für $u \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$ schreiben wir auch:

$$\text{(B.9)} \qquad \int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu := \mathrm{INT}_\mu(u)$$

und sagen $\int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu \in E$ sei das *Bochner-Integral* oder das *μ-Integral* oder einfach das *Integral* von u.
Zusätzlich gilt, wegen dem obigen Satz B.19, die Dreiecksungleichung:

$$\text{(B.10)} \qquad \Big\| \int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu \Big\|_E \leq \int_\Omega \|u\|_E \, \mathrm{d}\mu \qquad \big(u \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)\big).$$

Eine wichtige Eigenschaft des Bochner-Integrals ist die Invarianz unter linearen Abbildungen in separablen Banachräumen, was wir jetzt zeigen wollen.

Satz B.21: *Es seien $(E, \|.\|_E)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ zwei separable Banachräume, $u \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$, sowie $\varphi \in L(E, Y)$ eine stetige lineare Abbildung von E nach Y. Dann ist $\varphi \circ u \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; Y)$ und es gilt:*

$$\text{(B.11)} \qquad \int_\Omega \varphi \circ u \, \mathrm{d}\mu = \varphi\Big(\int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu \Big).$$

Beweis: Überlegen wir uns zunächst, warum $\varphi \circ u \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; Y)$ gilt. Nun, für $\omega \in \Omega$ gilt:

$$\|\varphi \circ u(\omega)\|_Y \leq \|\varphi\|_{L(E,Y)} \cdot \|u(\omega)\|_E,$$

mit $\|\varphi\|_{L(E,Y)} \in \mathbb{R}$, da $\varphi \in L(E, Y)$. Also ist:

$$\int_\Omega \|\varphi \circ u(\omega)\|_Y \, \mu(\mathrm{d}\omega) \leq \int_\Omega \|\varphi\|_{L(E,Y)} \cdot \|u(\omega)\|_E \, \mu(\mathrm{d}\omega) \leq \|\varphi\|_{L(E,Y)} \cdot \int_\Omega \|u(\omega)\|_E \, \mu(\mathrm{d}\omega) < \infty,$$

denn $u \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$. Damit ist $\varphi \circ u \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; Y)$. Die Gleichheit (B.11) zeigen wir in zwei Schritten. Zunächst sei $\sum_{i=1}^n e_i \mathbb{1}_{A_i}$ eine Normaldarstellung von $u \in \mathscr{E}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi \circ u \, \mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \varphi\Big(\sum_{i=1}^n e_i \mathbb{1}_{A_i}\Big) \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)\, \mathbb{1}_{A_i} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)\, \mu(A_i) \\ &= \varphi\Big(\sum_{i=1}^n e_i\, \mu(A_i)\Big) = \varphi\Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^n e_i \mathbb{1}_{A_i} \, \mathrm{d}\mu\Big) = \varphi\Big(\int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu\Big).\end{aligned}$$

Schließlich, sei $u \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu; E)$ beliebig. Dann existiert nach Satz B.17 und Korollar B.18 eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{E}$, so dass $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_E = 0$, μ-f.ü., und $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^1} = 0$ gilt. Aufgrund der Dreiecksungleichung (vgl. (B.10)), ist dann auch:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu.$$

Nunmehr, aufgrund dieser Tatsachen und dem oben bereits Gezeigten, folgt:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi \circ u \, \mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \varphi\Big(\lim_{n\to\infty} u_n\Big) \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi(u_n) \, \mathrm{d}\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi\Big(\int_\Omega u_n \, \mathrm{d}\mu\Big) = \varphi\Big(\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, \mathrm{d}\mu\Big) = \varphi\Big(\int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu\Big).\end{aligned}$$

$\square$

Anhang C
Gelfand-Dreier

Bei der Variationsformulierung (stochastischer) partieller Differentialgleichungen steht der Begriff des *Gelfand-Dreiers* [engl.: *Gelfand-triple* oder *normal triple*] im Mittelpunkt. Was darunter zu verstehen ist, wollen wir hier darstellen. Wir führen zunächst einige grundlegende Definitionen auf.

Definition C.1 ((dichte) Einbettung)**:** Es seien $(U_1, \|.\|_{U_1})$ und $(U_2, \|.\|_{U_2})$ zwei normierte Vektorräume.

i.) Eine injektive, lineare und stetige Abbildung $j\colon U_1 \to U_2$ heisst *Einbettung*.

ii.) Eine Einbettung $j\colon U_1 \to U_2$ heisst *dicht*, falls das Bild von U_1 unter dieser Abbildung, $j(U_1)$, dicht in U_2 liegt, d.h. wenn

$$\overline{j(U_1)}^{\|.\|_{U_2}} = U_2$$

gilt.

iii.) Der Raum U_1 heisst (dicht) in U_2 *eingebettet*, falls eine (dichte) Einbettung von U_1 nach U_2 existiert.

Bezeichnung C.2: Sind $(U_1, \|.\|_{U_1})$ und $(U_2, \|.\|_{U_2})$ zwei normierte Vektorräume, so schreiben wir

$$U_1 \hookrightarrow U_2,$$

falls U_1 in U_2 eingebettet ist und

$$U_1 \hookrightarrow_{\mathrm{D}} U_2,$$

falls sie sogar dicht eingebettet sind. Wollen wir die Einbettung $j\colon U_1 \to U_2$ spezifizieren, so schreiben wir diese über dem Pfeil, d.h.

$$U_1 \overset{j}{\hookrightarrow} U_2 \qquad \text{bzw.} \qquad U_1 \overset{j}{\hookrightarrow}_{\mathrm{D}} U_2.$$

In diesem Fall schreiben wir gelegentlich auch einfach x anstatt $j(x) \in U_2$ für beliebiges $x \in U_1$ sowie U_1 anstatt $j(U_1)$ und benutzen auch die Notation $U_1 \subseteq U_2$ anstelle von $U_1 \hookrightarrow U_2$. Die Berechtigung für diese Schreibeweisen ist die Injektivität der Einbettung.

Wir interessieren uns nun dafür wie die Dualräume zweier dicht ineinander eingebetteter Räume zueinander in Beziehung stehen. Im Allgemeinen können wir nämlich nicht sagen, dass diese ebenfalls dicht ineinander eingebettet sind. Dies ist allerdings der Fall, wenn die betrachteten Räume bestimmte Bedingungen erfüllen. Welche das sind, sehen wir jetzt.

Definition C.3 (reflexiver Banachraum)**:** Ein Banachraum U_1 heisst *reflexiv*, wenn die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} i_{U_1}\colon\ U_1 &\to U_1^{**} \\ x &\mapsto i_{U_1}(x) := i_x \end{aligned}$$

surjektiv ist. Dabei bezeichnet i_x für jedes $x \in U_1$ die lineare und stetige Abbildung

$$\begin{aligned} i_x\colon\ U_1^* &\to \mathbb{R} \\ u^* &\mapsto i_x(u^*) := u^*(x), \end{aligned}$$

während es sich bei $U_1^{**} := L(U_1^*, \mathbb{R})$ um den Bidualraum von U_1 handelt.

Zwischen reflexiven Banachräumen und deren Dualräume gelten die folgenden Beziehungen.

Bemerkung C.4: Es sei $(U_1, \|.\|_{U_1})$ ein Banachraum.

i.) Der Dualraum U_1^* ist genau dann reflexiv, wenn U_1 selbst reflexiv ist (vgl. z.B. [21, Satz III.3.4]).

ii.) Ist der Dualraum U_1^* separabel, so ist der Banachraum selbst ebenfalls separabel. Die Rückrichtung dieser Aussage gilt allerdings im Allgemeinen nicht. Es sei denn der separable Banachraum U_1 ist reflexiv, dann ist es nämlich auch sein Dualraum U_1^* (vgl. z.B. [21, Satz III.3.5]).

Einen zur Dualität von Räumen analogen Begriff für Operatoren führen wir ebenfalls ein.

Definition C.5 (dualer Operator)**:** Es sei $T \in L(U_1, U_2)$ ein linearer und stetiger Operator zwischen zwei normierten Räumen U_1 und U_2. Dann heisst der eindeutig bestimmte lineare und stetige Operator $T' \in L(U_2^*, U_1^*)$ welcher

$$(T'(y^*))(x) = y^*(T(x)) \text{ für alle } x \in U_1 \text{ und } y^* \in U_2^*$$

erfüllt, der zu T *duale* Operator.

Mit Hilfe dieser beiden Begriffe lässt sich das Versprochene realisieren.

Satz C.6: *Es seien U_1 und U_2 zwei dicht ineinander eingebettete Banachräume, $U_1 \overset{j}{\hookrightarrow}_{\mathrm{D}} U_2$. Ist U_1 reflexiv, so handelt es sich bei dem dualen Operator von j ebenfalls um eine dichte Einbettung, d.h. es gilt:*

$$U_2^* \overset{j'}{\hookrightarrow}_{\mathrm{D}} U_1^*.$$

Beweis: [siehe [7, Lemma A.1]] □

Bemerkung C.7: Es seien U_1 und U_2 zwei Banachräume.

i.) Ist U_1 separabel und gilt $U_1 \hookrightarrow_{\mathrm{D}} U_2$, so ist U_2 ebenfalls separabel.

ii.) Sind die beiden Räume separabel und gilt $U_1 \overset{j}{\hookrightarrow} U_2$, so ist das Bild von U_1 unter j eine Borel'sche Menge, d.h. es gilt $j(U_1) \in \mathscr{B}(U_2)$. Damit gilt auch:

$$\mathscr{B}(j(U_1)) = \mathscr{B}(U_2) \cap j(U_1) \subseteq \mathscr{B}(U_2).$$

Dies folgt z.B. aus [3, Theorem 8.3.7].

Definition C.8 (Gelfand-Dreier)**:** Es sei $(V, \|.\|_V)$ ein reflexiver separabler Banachraum, der in einem Hilbertraum $(H, \langle ., .\rangle_H)$ dicht eingebettet ist. Dann heisst das Tripel (V, H, V^*) *Gelfand-Dreier*.

Bemerkung C.9: Es sei (V, H, V^*) ein Gelfand-Dreier und es gelte $V \overset{j}{\hookrightarrow}_{\mathrm{D}} H$. Identifizieren wir den Dualraum H^* von H unter Zuhilfenahme des Riesz'schen Isomorphismus mit sich selbst, so ergibt sich aus den obigen Sätzen und Bemerkungen folgende Situation:

$$V \overset{j}{\hookrightarrow}_{\mathrm{D}} H \cong H^* \overset{j'}{\hookrightarrow}_{\mathrm{D}} V^*.$$

Dabei sind alle aufgeführten Räume separabel. Bezeichnen wir mit ${}_V\langle ., .\rangle_{V^*}$ die Dualform von V und V^*,

$${}_V\langle v, v^*\rangle_{V^*} := v^*(v) \text{ für alle } v^* \in V^* \text{ und } v \in V,$$

so gilt:

$${}_V\langle v, h\rangle_{V^*} = \langle v, h\rangle_H \text{ für alle } h \in H \text{ und } v \in V.$$

Anhang D

Das Lemma von Gronwall (eine diskrete Version)

In diesem Abschnitt soll ein diskretes Analogon zum Lemma von Gronwall vorgestellt werden.

Lemma D.1 (Diskrete Gronwall-Ungleichung)**:** *Es seien* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zwei reelle nicht-negative Folgen sowie eine Konstante* $C \geq 0$*, so dass*

$$a_k \leq C + \sum_{j=1}^{k-1} b_j \cdot a_j \text{ für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{D.1}$$

Dann gilt:

$$a_k \leq C \cdot \prod_{j=1}^{k-1}(1 + b_j) \leq C \cdot \exp\left(\sum_{j=1}^{k-1} b_j\right).$$

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ definiere:

$$d_k := C + \sum_{j=1}^{k-1} b_j \cdot a_j.$$

Wegen der Voraussetzung (D.1) gilt $a_k \leq d_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus ergibt sich

$$d_{k+1} - d_k = b_k \cdot a_k \leq b_k \cdot d_k$$

und damit

$$d_{k+1} \leq (1 + b_k) \cdot d_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Setzen wir das rekursiv ein, so erhalten wir für beliebiges $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_k \leq d_k \leq (1 + b_k) \cdot d_{k-1} \leq \cdots \leq \prod_{j=1}^{k-1}(1 + b_j) \cdot d_1 &= \prod_{j=1}^{k-1}(1 + b_j) \cdot C \\ \leq \prod_{j=1}^{k-1} \exp(b_j) \cdot C &= \exp\left(\sum_{j=1}^{k-1} b_j\right) \cdot C, \end{aligned}$$

wobei wir die Tatsache benutzt haben, dass für $x \geq 0$

$$1 + x \leq \exp(x)$$

gilt. □

Symbolverzeichnis

In der folgenden Tabelle sind einige in dieser Arbeit verwendeten Notationen aufgelistet.

Allgemeines

$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen; $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen (ohne Null)
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen (mit Null)
$a \wedge b$	$\min\{a,b\}$
$a \vee b$	$\max\{a,b\}$
$\cong$	Isometrisch isomorph
$\equiv$	Überall gleich
$\times$	Karthesisches Produkt
$\oplus$	Direkte Summe
$\lVert . \rVert_{\mathbb{U}}$	Norm auf einem normierten Raum $\mathbb{U}$
$\langle ., . \rangle_{\mathbb{U}}$	Skalarpordukt auf einem Hilbertraum $\mathbb{U}$
$\mathbb{U}^*$	Dualraum eines normierten Raumes $\mathbb{U}$; $\mathbb{U}^* = L(\mathbb{U},\mathbb{R})$
$\mathbb{U}^{**}$	Bidualraum eines normierten Raumes $\mathbb{U}$; $\mathbb{U}^{**} = L(\mathbb{U}^*,\mathbb{R})$
${}_{\mathbb{U}}\langle ., . \rangle_{\mathbb{U}^*}$	Duale Paarung zwischen einem normierten Raum $\mathbb{U}$ und seinem Dualraum $\mathbb{U}^*$
$\lvert . \rvert$	Betragsfunktion
A^c	Komplement einer Menge A
$\overline{A}$	Abschluss einer Menge A
$\overline{A}^{\lVert . \rVert_{\mathbb{U}}}$	Abschluss einer Menge A bzgl. der Norm $\lVert . \rVert_{\mathbb{U}}$
$f(\mathbb{U})$	Bild eines Raumes U unter einer Funktion f
$f\big\vert_{\mathbb{V}}$	Auf $\mathbb{V}$ eingeschränkte Funktion f
$\mathscr{C}(A,E)$	Menge der stetigen Funktionen von A nach E
$\lVert u \rVert_\infty$, $\lVert u \rVert_{\infty,E}$	Supremumsnorm einer Funktion $u \in \mathscr{C}([0,T],E)$, $T > 0$ (s. Seite 18)
$\hookrightarrow$	Stetig eingebettet (s. Seite 129)
$\overset{j}{\hookrightarrow}$	Stetig eingebettet mit Einbettung j (s. Seite 129)
$\hookrightarrow_{\mathrm{D}}$	Stetig und dicht eingebettet (s. Seite 129)
$\overset{j}{\hookrightarrow}_{\mathrm{D}}$	Stetig und dicht eingebettet mit Einbettung j (s. Seite 129)
(V,H,V^*)	Gelfand-Dreier (s. Seite 131)
$\mathrm{pr}^{(n)}$	Projektion auf die ersten n Koordinaten (s. Seite 117)
$\exp$, e	Exponentialfunktion
∇	Gradient

Δ	Laplace-Operator (auf dem Sobolev-Raum $W_2^1(\mathbb{R}^d)$ fortgesetzt)

Operatoren und Klassen von Operatoren

$L(U,H)$	Menge der linearen und beschränkten Operatoren von U nach H
$L(U)$	Menge der linearen und beschränkten Operatoren von U nach U
$L_1(U,H)$	Menge der nuklearen Operatoren von U nach H
$L_1(U)$	Menge der nuklearen Operatoren von U nach U
$L_2(U,H)$	Menge der Hilbert-Schmidt-Operatoren von U nach H
$L_2(U)$	Menge der Hilbert-Schmidt-Operatoren von U nach U
$\langle .,. \rangle_{L_2(U,H)}$, $\langle .,. \rangle_{L_2}$	Hilbert-Schmidt-Skalarpordukt (s. Seite 8)
$\lVert . \rVert_{L_2(U,H)}$, $\lVert . \rVert_{L_2}$	Hilbert-Schmidt-Norm (s. Seite 9)
$L^+(U)$	Menge der positiven und symmetrischen Operatoren von U nach U
$\mathrm{T{\scriptsize R}}(U)$	Menge der positiven und symmetrischen Operatoren von U nach U mit endlicher Spur (s. Seite 14)
$\operatorname{tr} T$	Spur eines nuklearen Operators $T \in L_1(U)$ (s. Seite 6)
$\lVert . \rVert_{L(U,H)}$	Operatornorm (s. Seite 5)
T^*	(Hilbertraum-)adjungierter Operator von $T \in L(U,H)$ (s. Seite 5)
T^{-1}	Pseudo-Inverse eines Operators $T \in L(U,H)$ (s. Seite 15)
$\mathrm{Ker}(T)$	Kern eines Operators $T \in L(U,H)$
$\mathrm{Ker}(T)^\perp$	Das orthogonale Komplement des Kernes von $T \in L(U,H)$
U_0	Bildraum von U unter $\mathrm{Q}^{1/2}$; $\mathrm{Q} \in \mathrm{T{\scriptsize R}}(U)$ (s. Seite 72)
L_2^0	$L_2(U_0,H)$ (s. Seite 72)
$L(U,H)_0$	Menge der auf U_0 eingeschränkten Operatoren aus $L(U,H)$
j'	Dualer Operator eines Operators j (s. Seite 130)

Maß- und Wahrscheinlichkeitstheoretische Bezeichnungen

$\mathscr{P}(S)$	Menge aller Teilmengen von S
$K_\varepsilon(x)$	Offene Kugel um den Punkt x mit Radius $\varepsilon > 0$ (s. Seite 17)
$\mathscr{O}_E$	Standardtopologie auf einem normierten Raum $(E, \lVert . \rVert_E)$
$\mathcal{B}(E)$	Borel'sche σ-Algebra in E
$\sigma(\mathscr{G})$, $\sigma_E(\mathscr{G})$	Die von einem Mengensystem $\mathscr{G}$ erzeugte σ-Algebra (in E)
$\mathbb{1}_A$	Indikatorfunktion einer Menge A
$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$	Wahrscheinlichkeitsraum;
$\mathscr{A}$	σ-Algebra (in Ω)
$\mathbb{P}$	Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{A}$
$\mathbb{E}$	Erwartungswertoperator
$\mathbb{E}(X\|\mathscr{G})$	Bedingte Erwartung von X unter $\mathscr{G}$ (s. Kapitel 1.3.2)
$\mathbb{V}$	Varianz
$\mathscr{M}_1(\mathbb{R}^d)$	Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}^d$; $d \in \mathbb{N}$
$u(\mu)$, $\mu \circ u^{-1}$	Bildmaß eines Maßes μ unter einer messbaren Abbildung u
$\hat{\mu}$	Fourier-Transformation eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ (s. Anhang A)
$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$	Produkt-σ-Algebra zweier σ-Algebren
$\mu \otimes \nu$	Produktmaß zweier σ-endlicher Maße μ und ν
$\bigotimes_{i \in I} \mathscr{A}_i$	Produkt-σ-Algebra der σ-Algebren $(\mathscr{A}_i)_{i \in I}$

$\bigotimes_{i\in I}\mathbb{P}_i$	Produkt-Maß (nach Kolmogorov) der Maße $(\mathbb{P}_i)_{i\in I}$
$(\mathscr{F}_t^X)_{t\in I}$	Natürliche Filtration eines stochastischen Prozesses $(X_t)_{t\in I}$
$\mathscr{M}_T^2(E)$	Menge der quadratisch integrierbaren Martingale auf $[0,T]$ mit Werten in einem separablen Banachraum E (s. Seite 36)
$\mathscr{P}_T$	σ-Algebra der vorhersagbaren Ereignisse (s. Seite 24)
δ_x	Dirac-Maß in einem Punkt x
λ^d	Lebesgue'sches Maß auf $\mathbb{R}^d$; $d\in\mathbb{N}$
λ_T^1	Auf $[0,T]$ eingeschränktes Lebesgue'sches Maß ($T>0$)
$\mathbb{P}_T$	Einschränkung des Maßes $\lambda_T^1\otimes\mathbb{P}$ auf $\mathscr{P}_T$
ν_{m,σ^2}, $\nu(m,\sigma^2)$	Gauß'sches Maß auf $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mit Erwartungswert $m\in\mathbb{R}$ und Standardabweichung $\sigma>0$ (s. Seite 42)
g_{m,σ^2}	Dichte des Gauß'sches Maßes ν_{m,σ^2}
$\mathscr{N}_1$	Menge aller Gauß'schen Maße (Normalverteilungen) auf $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$
$N(m,\mathrm{Q})$	Gauß'sches Maß auf $(U,\mathscr{B}(U))$; $m\in U$, $\mathrm{Q}\in\mathrm{Tr}(U)$ (s. Seite 49)
$\sim$	Verteilt; hat die Verteilung
$(W(t))_{t\in[0,T]}$	Q-Wiener Prozess mit $\mathrm{Q}\in\mathrm{Tr}(U)$; $T>0$ (s. Seite 54)
$\mathscr{E}^*$, $\mathscr{E}^*(\mathscr{F},\mathscr{B})$	Menge der einfachen Abbildungen (s. Seite 62 sowie 119)
$\mathscr{E}$, $\mathscr{E}(\mathscr{F},\mathscr{B})$	Äquivalenzklassenvektorraum der Menge der einfachen Abbildungen (s. Seite 120)
$\int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu$	Lebesgue- oder Bochner-Integral bzgl. eines Maßes μ (s. Anhang B)
$\mathrm{int}_\mu(u)$	Bochner-Integral einer einfachen Abbildung $u\in\mathscr{E}$ bzgl. μ (s. Seite 120)
$\mathrm{INT}_\mu(u)$	Bochner-Integral einer Abbildung $u\in L^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;E)$ bzgl. μ (s. Seite 126)
$\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;E)$	Raum der p-fach Bochner-integrierbaren Abbildungen auf $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ mit Werten in einem separablen Banachraum E; $p\geq 1$ (s. Seite 121)
$L^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;E)$	Äquivalenzklassenvektorraum von $\mathscr{L}^p(\Omega,\mathscr{A},\mu;E)$; $p\geq 1$ (s. Seite 122)
$\|.\|_p$	$\|.\|_{L^p}$ ($p\geq 1$)
$W_2^l(\mathbb{R}^d)$, $l\in\mathbb{N}$	L^2-Sobolev-Raum der Ordnung $l\in\mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}^d$; $d\in\mathbb{N}$
$\int_0^t u(s)\mathrm{d}s$	Lebesgue- bzw. Bochner-Integral der Funktion u auf $(0,t)$ bzgl. des Lebesgue'schen Maßes λ^1

Im Zusammenhang mit dem Stochastischen Itô-Integral benutzte Bezeichnungen

$\mathscr{E}_T$	Menge der elementaren Prozesse (s. Seite 62 f.)
int_Φ^W	Stochastisches (Itô-)Integral des elementaren Prozesses Φ bzgl. des Q-Wiener Prozesses W (s. Seite 63)
int^W	Stochastisches (Itô-)Integral als (isometrische) Abbildung auf der Menge der elementaren Prozesse (s. Seite 67 sowie Seite 72)
$\|.\|_T$	Norm auf der Menge der elementaren Prozesse (s. Seite 71)
U_0	Bildraum von U unter $\mathrm{Q}^{1/2}$; $\mathrm{Q}\in\mathrm{Tr}(U)$ (s. Seite 72)
L_2^0	$L_2(U_0,H)$ (s. Seite 72)
$L(U,H)_0$	Menge der auf U_0 eingeschränkten Operatoren aus $L(U,H)$ (s. Seite 72)
Int^W	Stochastisches (Itô-)Integral auf $L^2(\Omega_T,\mathscr{P}_T,\mathbb{P}_T;L_2^0)$ (s. Seite 75 f.)

$\mathscr{N}_W^T$	Menge der bzgl. W stochastisch integrierbaren Prozesse (s. Seite 81)
$\mathrm{I\scriptstyle NT}_{\Phi}^{W}$	Stochastisches (Itô-)Integral eines Prozesses $\Phi \in \mathscr{N}_W^T$ bzgl. W (s. Seite 88)
$\int_0^{\cdot} \Phi(s)\,\mathrm{d}W(s)$	Stochastisches (Itô-)Integral eines integrierbaren Prozesses Φ bzgl. W

Literaturverzeichnis

[1] Heinz Bauer. *Maß- und Integrationstheorie*. de Gruyter Lehrbuch, 1992.

[2] Heinz Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. de Gruyter Lehrbuch, 2002.

[3] Donald L. Cohn. *Measure Theory*. Birkhäuser, 1980.

[4] Rama Cont. Modeling Interest Rate Dynamics: An Infinite-Dimensional Approach, 1999.

[5] Giuseppe Da Prato. *An Introduction to Infinite-Dimensional Analysis*. Springer, 2006.

[6] Giuseppe Da Prato, Jerzy Zabczyk. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Cambridge University Press, 1992.

[7] Stephan Dahlke, Gabriele Steidl, Gerd Teschke. Weighted Coorbit Spaces and Banach Frames on Homogeneous Spaces. *J. Fourier Anal. Appl.*, 10(5):507–539, 2004.

[8] Katja Frieler, Claudia Knoche. *Solutions of Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensional Hilbert-Spaces and Their Dependence on Initial Data*. Diplomarbeit, Universität Bielefeld, BiBoS-Preprint E02-04-083, 2001.

[9] István Gyöngy, Annie Millet. On Discretization Schemes for Stochastic Evolution Equations. *Potential Anal.*, 23:99–134, 2005.

[10] István Gyöngy, Annie Millet. Rate of Convergence of Space Time Approximations for Stochastic Evolution Equations. *Potential Anal.*, 30(1):29–64, 2009.

[11] Wolfgang Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner, 1996.

[12] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1988.

[13] Nikolai V. Krylov, Boris L. Rozovskii. Stochastic Evolution Equations. *J. Sov. Math.*, 16:1233–1277, 1981.

[14] Reinhold Meise, Dietmar Vogt. *Einführung in die Funktionalanalysis*. Vieweg, 1992.

[15] Étienne Pardoux. *Équations aux dérivées partielles stochastiques nonlinéares monotones. Étude de solutions fortes de type Itô*. Thèse Doct. Sci. Math. Univ. Paris Sud, 1975.

[16] Claudia Prévôt, Michael Röckner. *A Concise Course on Stochastic Partial Differential Equations*. Springer, 2007.

[17] Michael Reed, Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Analysis I: Functional Analysis*. Academic Press, 1972.

[18] Christian Roth. *Stochastische Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung*. Dissertation, Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 2002.

[19] Boris L. Rozovskii. *Stochastic Evolution Systems: Linear Theory and Applications to Non-linear Filtering*. Kluwer Academic Publishers, 1990.

[20] René L. Schilling. *Measures, Integrals and Martingales*. Cambridge University Press, 2005.

[21] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2005.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit von mir selbstständig verfasst wurde und dabei keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet wurden.

(Petru A. Cioica) Marburg, den 1.12.2009