Vorlesungsskript: Martingale

von

Steffen Dereich

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Version vom 25. Februar 2010

Inhaltsverzeichnis

Bei dem Vorlesungsskript handelt es sich um eine leicht überarbeitete Version der Ausarbeitung zu Martingalen von Michael Scheutzow.

4 Martingale

4.1 Einführung

Definition 4.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum.

(i) Eine aufsteigende Folge von Teil-σ-Algebren $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Filtration.*

(ii) Ein Tupel $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ bestehend aus einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und einer Filtration $(\mathcal{F})_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.*

(iii) Ein stochastischer Prozess $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in einem beliebigen messbaren Raum $(E, \mathcal{E})$ heißt *adaptiert* bzgl. einer Fltration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (kurz $(\mathcal{F}_n)$-adaptiert), wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariale X_n $\mathcal{F}_n$-$\mathcal{E}$-messbar ist.

(iv) Ist für einen stochastischen Prozess X die Zufallsvariable X_1 konstant und jedes X_n $(n \geq 2)$ $\mathcal{F}_{n-1}$-$\mathcal{E}$-messbar so heißt X $(\mathcal{F}_n)$-prävisibel.

Bemerkung 4.2. Wenn wir im folgenden über Filtrationen $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reden, so nehmen wir stillschweigend an, dass diese auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ definiert sind. Führen wir einen Prozess als $(\mathcal{F}_n)$-adaptierten (bzw. prävisiblen) Prozess ein, so nehmen wir insbesondere an, dass $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ ein filtrieter Wahrscheinlichkeitsraum ist, auf dem der Prozess definiert ist. Weiterhin nutzen wir $(E, \mathcal{E})$ als Standardbezeichnung für den Zustandsraum eines stochastischen Prozesses.

Beispiel 4.3. (i) Für einen stochastischen Prozess $\mathbf{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$$

eine Filtration. Wir nennen $(\mathcal{F}_n^X)$ die *von* $\mathbf{X}$ *erzeugte Filtration.*

(ii) Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathcal{F}_n)$-adaptierter Prozess. Sind $F_n : E^n \to E'$ $\mathcal{E}^n$-$\mathcal{E}'$-messbare Funktionen, so ist $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $Y_n = F_n(X_1, \ldots, X_n)$ ein $(\mathcal{F}_n)$-adaptierter Prozess mit Werten in $(E', \mathcal{E}')$.

Definition 4.4. Sei $\mathbf{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein *integrierbarer* $(\mathcal{F}_n)$-adaptierter Prozess.

(i) $\mathbf{X}$ heißt $(\mathcal{F}_n)$-*Martingal*, wenn für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$

$$E[X_m|\mathcal{F}_n] = X_n \quad \text{fast sicher}$$

gilt.

(ii) $\mathbf{X}$ heißt $(\mathcal{F}_n)$-*Submartingal*, wenn für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$

$$E[X_m|\mathcal{F}_n] \geq X_n \quad \text{fast sicher}$$

gilt.

(iii) $\mathbf{X}$ heißt $(\mathcal{F}_n)$-*Supermartingal*, wenn $-\mathbf{X}$ ein Submartingal ist.

Bemerkung 4.5. (i) Die Definition lässt sich direkt auf Prozesse mit allgemeiner Indexmenge $I \subset \mathbb{R}$ verallgemeinern.

(ii) Um zu zeigen, dass ein integrierbarer adaptierter Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein (Sub-)Martinal ist, reicht es zu überprüfen, dass

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \overset{(\geq)}{=} X_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(iii) Jedes $(\mathcal{F}_n)$-(Sub-)Martingal ist auch ein $(\mathcal{F}_n^X)$-(Sub-)Martingal, da

$$E[X_m|\mathcal{F}_n^X] = E[E[X_m|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_n^X] \overset{(\geq)}{=} E[X_n|\mathcal{F}_n^X] = X_n.$$

Beispiel 4.6. (i) Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger integrierbarer Zufallsvariablen mit $E[\xi_n] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathbf{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

ein $(\mathcal{F}_n^\xi)$-Martingal, da (X_n) $(\mathcal{F}_n^\xi)$-adaptiert ist und

$$E[|X_n|] = E[|\xi_1 + \cdots + \xi_n|] \leq E[|\xi_1|] + \cdots + E[|\xi_n|] < \infty \quad \text{(Integrierbarkeit)}$$

und

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[X_n + \xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n + E[\xi_{n+1}] = X_n,$$

wegen der Unabhängigkeit von ξ_{n+1} und $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, gelten. Gilt $E[\xi_n] \geq 0$ statt der obigen Gleichheit, so ist (X_n) ein $(\mathcal{F}_n^\xi)$-Submartingal.

(ii) Ist X eine beliebige integrierbare Zufallsvariable und $(\mathcal{F}_n)$ eine beliebige Filtration, so wird durch $X_n = E[X|\mathcal{F}_n]$ ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal definiert.

(iii) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und sei Q ein endliches Maß auf $\mathcal{F}$, welches absolutstetig bzgl. P ist. Dann ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mittels der Radon-Nikodym Dichte

$$Z_n := \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\bigg|_{\mathcal{F}_n} := \frac{\mathrm{d}Q|_{\mathcal{F}_n}}{\mathrm{d}P|_{\mathcal{F}_n}}$$

ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingl bzgl. P.

Definition 4.7. Ein $(\mathcal{F}_n)$-(Sub-)Martingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt $\mathcal{L}^2$-$(\mathcal{F}_n)$-(Sub-)Martingal (oder kurz $\mathcal{L}^2$-(Sub-)Martingal), wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n quadratintegrierbar ist.

Lemma 4.8. *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $\mathcal{L}^2$-Martingal und definiere*

$$\langle X \rangle_n = \sum_{k=1}^{n-1} E[(X_{k+1} - X_k)^2|\mathcal{F}_k] \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

$\langle X \rangle = (\langle X \rangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein $(\mathcal{F}_n)$-prävisibler Prozess und der Prozess $(X_n^2 - \langle X \rangle_n)$ ist ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal. Der Prozess $\langle X \rangle$ heißt quadratische Variation *von (X_n).*

Beweis. Es gilt $E[\langle X\rangle_n] = \sum_{k=1}^{n-1} E[(X_{k+1} - X_k)^2] < \infty$ und

$$E[X_{n+1}^2 - \langle X\rangle_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n^2 - \langle X\rangle_n + \underbrace{E[X_{n+1}^2 - X_n^2 - (X_{n+1} - X_n)^2|\mathcal{F}_n]}_{=2(E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\cdot X_n - X_n^2) = 0}$$

□

Proposition 4.9. *a) Sei* $\mathbf{X}$ *ein* $(\mathcal{F}_n)$*-Martingal,* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvex und* $E[|\varphi(X_n)|] < \infty$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*. Dann ist* $\varphi(\mathbf{X}) := (\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *ein* $(\mathcal{F}_n)$*-Submartingal.*

b) Sei $\mathbf{X}$ *ein* $(\mathcal{F}_n)$*-Submartingal,* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konvex und nichtfallend und* $E[|\varphi(X_n)|] < \infty$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*. Dann ist* $\varphi(\mathbf{X})$ *ein* $(\mathcal{F}_n)$*-Submartingal.*

Beweis. Mit der Jensenschen Ungleichung für bedingte Erwartungen folgt in beiden Fällen für $n \in \mathbb{N}$

$$E[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \geq \varphi(E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]).$$

Im Fall a) ist der letzte Ausdruck gleich $\varphi(X_n)$, im Fall b) $\geq \varphi(X_n)$ (da φ nichtfallend ist). □

4.2 Stoppzeiten und Stoppsätze

Notation 4.10. Wir bezeichnen

$$\bar{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

und verwenden als Standard-σ-Algebra auf $\bar{\mathbb{N}}$ die Potenzmenge $\mathcal{P}(\bar{\mathbb{N}})$. Weiterhin definieren wir für eine gegebene Filtration $(\mathcal{F}_n)$

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n.$$

Definition 4.11. Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration. Eine Abbildung $T : \Omega \to \bar{\mathbb{N}}$ heißt $(\mathcal{F}_n)$-*Stoppzeit*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

gilt.

Bemerkung 4.12. Es ist

$$\{T = \infty\} = \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\{T \leq k\}}_{\in\mathcal{F}_k\subset\mathcal{F}_\infty}\Big)^c \in \mathcal{F}_\infty$$

und somit ist T $\mathcal{F}_\infty$-messbar.

Beispiel 4.13 (Eintrittszeiten)**.** Sei $\mathbf{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(E, \mathcal{E})$-wertiger $(\mathcal{F}_n)$-adaptierter stochastischer Prozess.

(i) Für $A \in \mathcal{E}$ ist $T := T_A := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in A\}$ (mit der Konvention $\inf\emptyset = \infty$) eine $(\mathcal{F}_n)$-Stoppzeit, da

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{\{X_k \in A\}}_{\in\mathcal{F}_k} \in \mathcal{F}_n.$$

(ii) Für eine weitere Stoppzeit S und $A \in \mathcal{E}$ ist $T := \inf\{n > S : X_n \in A\}$ eine Stoppzeit, da

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{1 \leq k < l \leq n} \{S \leq k\} \cap \{X_l \in A\} \in \mathcal{F}_n.$$

Insbesondere sind also Zweiteintrittszeiten Stoppzeiten.

Lemma 4.14. *Für eine Folge $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von $(\mathcal{F}_n)$-Stoppzeiten sind*

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} T_m \quad \textit{und} \quad \inf_{m \in \mathbb{N}} T_m$$

wieder $(\mathcal{F}_n)$-Stoppzeiten.

Beweis.

$$\begin{aligned} \{\sup_m T_m \leq n\} &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \{T_m \leq n\} \in \mathcal{F}_n \\ \{\inf_m T_m \leq n\} &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \{T_m \leq n\} \in \mathcal{F}_n. \end{aligned}$$

□

Wir benötigen ein Konzept zur mathematischen Modellierung der Information, die man bis zu einer Stoppzeit erlangt hat:

Definition 4.15. Für eine $(\mathcal{F}_n)$-Stopzeit T, bezeichne

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

die *von T erzeugte σ-Algebra.* (Es handelt sich hierbei in der Tat um eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}_\infty$ wie man leicht überprüfen kann.)

Bemerkung 4.16 (Konstante Stoppzeiten)**.** Ist $T(\omega) = m \in \mathbb{N} \quad (\forall \omega \in \Omega)$ so gilt

$$\{T \leq n\} = \begin{cases} \emptyset, & n < m \\ \Omega, & n \geq m \end{cases}$$

und somit ist T eine Stoppzeit bzgl. einer beliebigen Filtration. Weiterhin gilt für eine gegebene Filtration $(\mathcal{F}_n)$

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{F}_m.$$

Eine Besonderheit von Filtrationen mit Indexmenge $\mathbb{N}$ offenbart das folgende Lemma.

Lemma 4.17. *(i) Sei $T : \Omega \to \bar{\mathbb{N}}$ eine Abbildung. T ist eine $(\mathcal{F}_n)$-Stoppzeit genau dann wenn*

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Für eine $(\mathcal{F}_n)$-Stoppzeit T liegt $A \in \mathcal{F}_\infty$ genau dann in $\mathcal{F}_T$, wenn

$$\{T = n\} \cap A \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis.

(i) I) Sei T eine Stoppzeit. Dann folgt $\{T = n\} = \{T \leq n\} \cap \{T \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_n$
II) Umkehrung: $\{T \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{T = k\} \in \mathcal{F}_n$.

(ii) analog.

□

Lemma 4.18. *Für zwei Stoppzeiten S, T gilt:*

a) $\{S \leq T\}, \{S = T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.

b) *Gilt $S \leq T$, so folgt $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$*

c) $\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.

d) *Ist $\mathbf{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ adaptiert und X_∞ eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Zufallsvariable, bzw. T $\mathbb{N}$-wertig, dann ist X_T $\mathcal{F}_T$-messbar.*

Beweis.

a) S, T sind $\mathcal{F}_\infty$-messbar und somit sind $\{S \leq T\}$ und $\{S = T\}$ in $\mathcal{F}_\infty$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\{S \leq T\} \cap \{S = n\} = \{S = n\} \cap \{T \geq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{und}$$
$$\{S \leq T\} \cap \{T = n\} = \{S \leq n\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$$

gelten, erhalten wir mit Lemma 4.17, dass $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. Weiterhin ist $\{S = T\} = \{S \leq T\} \cap \{T \leq S\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.

b) $A \in \mathcal{F}_S \Rightarrow A \in \mathcal{F}_\infty$ und $A \cap \{T \leq n\} = \underbrace{A \cap \{S \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.

c) und d) Übungsaufgabe.

□

Beispiel 4.19. Seien T_A und T_C die ersten Eintrittszeiten in messbare Mengen A und C. Dann ist zum Beispiel nach dem obigen Lemma

$$D := \{T_C < T_A\} \in \mathcal{F}_{T_A \wedge T_B}.$$

Ein wichtiges Resultat für Stoppzeiten ist der sogenannte Stoppsatz.

Satz 4.20 (Stoppsatz)**.** *Es seien S, T Stoppzeiten und (X_n) ein Submartingal. In allen der unten angegebenen Fällen gilt*

$$E[X_T | \mathcal{F}_S] \geq X_{S \wedge T}$$

mit Gleichheit, falls (X_n) ein Martingal ist.

(a) T is uniform beschränkt, d.h. $\exists m \in \mathbb{N}$ mit $T(\omega) \leq m$ für alle $\omega \in \Omega$.

(b) Die Folge der Inkremente $(X_{n+1} - X_n)$ ist uniform beschränkt und $E[T] < \infty$ (zur Wohldefiniertheit von X_T kann man z.B. $X_\infty = 0$ definieren).

(c) (X_n) konvergiert in $\mathcal{L}^1$ gegen eine Zufallsvariable X_∞.

Korollar 4.21. *Für zwei Stoppzeiten S, T mit $S < T$ gilt in jedem der drei obigen Fälle*

$$E[X_S] \le E[X_T],$$

wenn (X_n) ein Submartingal ist und mit Gleichheit, wenn (X_n) ein Martingal ist.

Beweis.

$$E[X_T] = E[E[X_T|\mathcal{F}_S]] \ge E[X_S].$$

□

Wir beweisen zunächst den Stoppsatz unter der Annahme (a). Bemerke, dass wir nur den Fall des Submartingals behandeln müssen, da wir für den Martingalfall das Resultat einfach auf $\mathbf{X}$ und $-\mathbf{X}$ anwenden können um Gleichheit zu erhalten.
Wir werden an dieser Stelle den Stoppsatz nur für die Fälle (a) und (b) beweisen. Fall (c) werden wir später beweisen (und im folgenden auch noch nicht nutzen), wenn wir uns $\mathcal{L}^1$-konvergente Submartingale genauer anschauen.
Beweis des Stoppsatzes, Fall (a). (i) Nach Lemma 4.18 ist $X_{S\wedge T}$ $\mathcal{F}_{S\wedge T}$-messbar und damit insbesondere $\mathcal{F}_S$-messbar. Ebenso folgt, dass X_T $\mathcal{F}_T$-messbar ist. Wegen

$$E|X_T| \le E\Big[\max_{1\le i\le N} |X_i|\Big] \le E\Big[\sum_{i=1}^{N} |X_i|\Big] < \infty$$

gilt $X_T \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und ebenso $X_{S\wedge T} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(ii) Zu zeigen bleibt (nach Definition der bedingten Erwartung)

$$\int_B X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P} \ge \int_B X_{S\wedge T} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \tag{1}$$

für alle $B \in \mathcal{F}_S$. Es genügt dabei, die Behauptung für Mengen der Form $A = \{S = k\} \cap B$ ($k \in \bar{\mathbb{N}}$) zu zeigen, da sie wegen der Linearität des Integrals dann auch für $B \in \mathcal{F}_S$ folgt (indem man $B = \bigcup_{k\in\bar{\mathbb{N}}}(B \cap \{S = k\})$ disjunkt zerlegt). Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über $m := \max_{\omega\in\Omega} T(\omega)$.

Ind. Anf. ($m = 1$)**:** Dann ist $T = 1$ und (1) ist trivialerweise erfüllt.

Ind. Schritt ($m - 1 \to m$)**:** Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass (1) für alle T mit $\max_{\omega\in\Omega} T(\omega) \le m-1$ gilt. Wir zeigen, dass dann (1) auch im Fall $\max_{\omega\in\Omega} T(\omega) = m$ folgt. Wir fixieren nun $k \in \bar{\mathbb{N}}$ und unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $m \le k$.
Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_A X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P} &= E[X_T \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{\{S=k\}}] = E[X_{T\wedge k} \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{\{S=k\}}] = E[X_{S\wedge T} \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{\{S=k\}}] \\ &= \int_A X_{S\wedge T} \,\mathrm{d}\mathbb{P}.\end{aligned}$$

2. Fall: $m > k$.
Dann gilt zunächst

$$A \cap \{T = m\} = B \cap \{S = k\} \cap \{T \le m-1\}^c \in \mathcal{F}_{m-1}$$

und

$$\begin{aligned} E[X_T \mathbb{1}_A] &= E[X_T \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{\{S=k\}} \mathbb{1}_{\{T \le m-1\}}] + E[X_m \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{\{S=k\}} \mathbb{1}_{\{T=m\}}] \\ &\ge E[X_T \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{\{S=k\}} \mathbb{1}_{\{T \le m-1\}}] + E[X_{m-1} \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{\{S=k\}} \mathbb{1}_{\{T=m\}}] \\ &= E[X_{T \wedge (m-1)} \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{\{S=k\}}] \ge E[X_{T \wedge (m-1) \wedge S} \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{\{S=k\}}] \\ &= E[X_{T \wedge S} \mathbb{1}_A], \end{aligned}$$

wobei beim ersten "$\ge$" die Submartingaleigenschaft und beim letzten "$\ge$" die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde. Damit ist (1) gezeigt. $\square$

Beweis des Stoppsatzes, Fall (b). Sei $\beta > 0$ eine Konstante sodass für alle $\omega \in \Omega$ und $k \in \mathbb{N}$

$$|X_{k+1}(\omega) - X_k(\omega)| \le \beta.$$

Dann gilt

$$|X_{T \wedge n}| = |X_0 + \sum_{k=2}^{T \wedge n} (X_k - X_{k-1})| \le |X_1| + \underbrace{\sum_{k=2}^{T \wedge n} |X_k - X_{k-1}|}_{\le \beta T}$$

und somit ist $|X_1| + \beta T$ nach Voraussetzung eine integrierbare Majorante für die Zufallsvariablen $(X_{T \wedge n})$. Wir wenden nun den Stoppsatz in der Version (a) an und erhalten mit dem majorisierten Konvergenzsatz:

$$E[X_T | \mathcal{F}_S] \longleftarrow E[X_{T \wedge n} | \mathcal{F}_S] \ge X_{T \wedge S \wedge n} \longrightarrow X_{T \wedge S},$$

wobei die Konvergenz im fast sicheren Sinne gilt. $\square$

Korollar 4.22. *Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein $(\mathcal{F}_n)$-(Sub-)Martingal, T eine Stoppzeit und $Y_n := X_{n \wedge T}$. Dann ist $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein $(\mathcal{F}_n)$-(Sub-)Martingal.*

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ folgt $E[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[X_{(n+1) \wedge T} | \mathcal{F}_n] \overset{(\ge)}{=} Y_n$ aus dem Stoppsatz, indem man dort $S = n$ und $T' = (n+1) \wedge T$ wählt. $\square$

Korollar 4.23 (Charakterisierung von Martingalen mittels Stoppzeiten)**.** *Sei (X_n) ein integrierbarer $(\mathcal{F}_n)$-adaptierter Prozess. Dann sind äquivalent:*

(i) (X_n) ist ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal.

(ii) $E[X_T] = E[X_1]$ für jede uniform beschränkte $(\mathcal{F}_n)$-Stoppzeit T, d.h. mit $\sup_{\omega \in \Omega} T(\omega) < \infty$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): folgt direkt aus Korollar 4.21 mit $S = 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{F}_n$ und $T(\omega) := n \mathbb{1}_{A^c}(\omega) + (n+1) \mathbb{1}_A(\omega)$. T ist eine Stoppzeit, da $\{T \le n\} = A^c \in \mathcal{F}_n$. Weiter gilt:

$$E[X_n \mathbb{1}_{A^c}] + E[X_{n+1} \mathbb{1}_A] = E[X_T] = E[X_1] = E[X_n] = E[X_n \mathbb{1}_{A^c}] + E[X_n \mathbb{1}_A].$$

Also folgt
$$E[X_{n+1}\mathbb{1}_A] = E[X_n\mathbb{1}_A]$$
für alle $A \in \mathcal{F}_n$ und somit $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ fast sicher. $\square$

Anwendung 4.24. Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die in 0 gestartete symmetrische Irrfahrt. Diese kann zum Beispiel mithilfe von unabängigen Zufallsvariablen $X_2, \dots$ mit $\mathbb{P}(X_k = \pm 1) = \frac{1}{2}$ mittels

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} X_k$$

definiert werden. Wir setzen $T = T_{\{1\}} = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 1\}$. Nach dem Gesetz des iterierten Logarithmus ist T fast sicher endlich und es gilt

$$E[\underbrace{S_T}_{=1}|\mathcal{F}_1] = 1 \neq 0 = S_1$$

Es muss also $E[T] = \infty$ gelten, da sonst der Stoppsatz (Version (b)) Gleicheit in der letzten Formel liefern würde.

4.3 Der Martingalkonvergenzsatz

Im folgenden wollen wir ein Kriterium für die Konvergenz eines Submartingals (X_n) herleiten. Hierzu betrachten wir die *Zahl der Upcrossings eines Intervalls* $[a, b]$. Für gegebene reelle Zahlen a, b mit $a < b$ setzen wir
$$\tau_1 = \inf\{t \in \mathbb{N} : X_t \leq a\}$$
und für $k = 1, 2, \dots$ sei

$$\sigma_k = \inf\{t > \tau_k : X_t \geq b\} \quad \text{und} \quad \tau_{k+1} = \inf\{t > \sigma_k : X_t \leq a\},$$

wobei das Infimum über eine leere Menge als ∞ definiert wird. Dann heißt

$$U(a, b, N) = U_{\mathbf{X}}(a, b, N) = \max\{k : \sigma_k \leq N\}$$

Zahl der *Upcrossings des Intervalls* $[a, b]$ *von* X *bis zur Zeit* N.

Wie die folgende Abschätzing zeigt können wir die Zahl der Upcrossings mithilfe des ersten Moments nach oben abschätzen.

Satz 4.25 (Doob'sche Upcrossingungleichung)**.** *Sei* $\mathbf{X}$ *ein* $(\mathcal{F}_n)$*-Submartingal und* $N \in \mathbb{N}$*. Dann gilt für* $a < b$
$$E[U_{\mathbf{X}}(a, b, N)] \leq \frac{E[(X_N - a)^+]}{b - a}.$$

Beweis. Wir bemerken, dass $U_{\mathbf{X}}(a,b,N)$ der Zahl der Upcrossings des Submartingals $\mathbf{X}' = ((X_n-a)^+)_{n\in\mathbb{N}}$ des Intervalls $[0,b-a]$ entspricht. Wir definieren die Stoppzeiten (τ_k) und (σ_k) wie oben und erhalten mithilfe der Nichtnegativität von $\mathbf{X}'$ und des Stoppsatzes (a):

$$\underbrace{E[X'_N - X'_{\tau_1\wedge N}]}_{\leq E[X'_N]=E[(X_N-a)^+]} = \underbrace{E[\sum_{k=1}^{N}(X'_{\sigma_k\wedge N} - X'_{\tau_k\wedge N})]}_{\geq (b-a)\cdot U(a,b,N)} + \sum_{k=1}^{N}\underbrace{E[(X'_{\tau_{k+1}\wedge N} - X'_{\sigma_k\wedge N})]}_{\geq 0\text{ (Stoppsatz)}}.$$

Division durch $b-a$ liefert nun die gewünschte Ungleichung. $\square$

Satz 4.26 (Martingalkonvergenzsatz)**.** *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathcal{F}_n)$-Submartingal mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] < \infty$. Dann existiert eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare integrierbare Zufallsgröße X_∞, sodass*

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n \textit{ fast sicher.}$$

Weiter gilt

$$E[|X_\infty|] \leq \liminf_{n\to\infty} E[|X_n|].$$

Bemerkung 4.27. (a) Für ein $(\mathcal{F}_n)$-Submartingal ist $n \mapsto EX_n$ nichtfallend. Daher gilt

$$E|X_n| = 2EX_n^+ - EX_n \leq 2EX_n^+ - EX_1.$$

Außerdem gilt

$$E|X_n| \geq EX_n^+.$$

Daher ist die Bedingung $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] < \infty$ äquivalent zu $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|] < \infty$.

(b) Die Bedingung $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^+] < \infty$ ist automatisch für nichtpositive Submartingale erfüllt. Daher konvergiert *jedes* nichtpositive Submartingal (und somit jedes nichtnegative Supermartingal) fast sicher.

Beweis des Martingalkonvergenzsatzes. Sei $a < b$. Aus der Doob'schen Upcrossingungleichung folgt mittels monotoner Konvergenz für die Gesamtzahl der Upcrossings $U_{\mathbf{X}}(a,b)$ über $[a,b]$

$$E[U_{\mathbf{X}}(a,b)] = \lim_{N\to\infty} E[U_{\mathbf{X}}(a,b,N)] \leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{E[(X_N-a)^+]}{b-a} < \infty$$

und damit ist

$$\mathcal{N} := \{\omega\in\Omega : U_{\mathbf{X}(\omega)}(q_1,q_2) < \infty \text{ für alle } q_1 < q_2, q_1,q_2\in\mathbb{Q}\}^c$$

eine $\mathbb{P}$-Nullmenge. Für jedes $\omega \notin \mathcal{N}$ gilt offenbar, dass

$$X_\infty(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$$

existiert, eventuell aber ∞ oder $-\infty$ ist. (Dies gilt da $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ versehen mit der Standardtopologie kompakt ist und die Nichtkonvergenz in $\bar{\mathbb{R}}$ gleichbedeutend ist mit der Existenz mehrerer Häufungspunkte. Würde die Folge nicht konvergieren so gäbe es mindestens zwei Häufungspunkte $a' < b'$ und jedes abgeschlossene Intervall in (a',b') hätte ∞-viele Upcrossings.)

Aus dem Lemma von Fatou folgt zusammen mit obiger Bemerkung

$$E|X_\infty| \leq \liminf_{n\to\infty} E|X_n| < \infty.$$

Insbesondere ist also X_∞ integrierbar und damit fast sicher endlich. Die $\mathcal{F}_\infty$-Messbarkeit lässt sich gegebenenfalls nach Abänderung auf einer Nullmenge sicherstellen. Konkret ist

$$X_\infty(\omega) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) & \text{wenn der Grenzwert in } \mathbb{R} \text{ existiert.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathcal{F}_\infty$-messbar. □

Mithilfe des Martingalkonvergenzsatzes beweisen wir nun ein *starkes Gesetz der großen Zahlen.*

Satz 4.28 (Starkes Gesetz der großen Zahlen)**.** *Seien $X_1, X_2 \dots$ unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit endlichen zweiten Momenten und (a_n) eine monoton wachsende unbeschränkte Folge positiver Zahlen. Falls*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{var}(X_i)/a_i^2 < \infty,$$

so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i) = 0 \textit{ fast sicher.}$$

Zum Beweis nutzen wir das Kronecker Lemma:

Lemma 4.29 (Kronecker Lemma)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge positiver Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/a_n$ in $\mathbb{R}$, so folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} b_i = 0.$$

Der Beweis dieses Lemmas sei als Übungsaufgabe dem Leser überlassen.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $Y_n = \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i)/a_i$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Dann ist (Y_n) ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal mit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E[Y_n^2] = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i)/a_i^2 < \infty.$$

Da $\sup_{n\in\mathbb{N}} E|Y_n| \leq 1+\sup_{n\in\mathbb{N}} E[Y_n^2]$ endlich ist, folgt mit dem Martingalkonvergenzsatz (Satz 4.26), dass (Y_n) fast sicher konvergiert. Nun folgt die Aussage mit dem Kronecker Lemma. □

Bemerkung 4.30. Offenbar kann man bei dem starken Gesetz die Unabhängigkeit der X_i durch die schwächere Bedingung

$$E[X_{n+1} - E[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n]] = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ersetzen, ohne dass der Beweis zu ändern ist. Man sagt, dass $(X_n - E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Martingaldifferenzfolge* ist, da dann $S_n := \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i)$ ein Martingal ist.

4.4 Gleichgradige Integrierbarkeit und die Konvergenz in $\mathcal{L}^p$

Bevor wir uns wieder den Martingalen zuwenden, wollen wir in diesem Abschnitt nochmals näher auf den Zusammenhang zwischen der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und der $\mathcal{L}^p$ Konvergenz eingehen. Wir haben bereits festgestellt, dass die $\mathcal{L}^p$-Konvergenz die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert und dass der Umkehrschluss jedoch im allgemeinen nicht stimmt. Wir benötigen eine Zusatzannahme.

Definition 4.31. Eine Familie reeller Zufallsgrößen $\{X_t : t \in I\}$ (I beliebige Indexmenge) heißt *gleichgradig (oder gleichmäßig oder gleichförmig) integrierbar*, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} \int_{\{|X_t|\geq n\}} |X_t| \, \mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

Bemerkung 4.32.

a) Ist X eine integrierbare ZV, dann ist $\{X\}$ gleichgradig integrierbar.

b) Jede endliche Menge integrierbarer ZV auf einem Wahrscheinlichkeitsraum ist gleichgradig integrierbar.

c) Sind $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ Mengen gleichgradig integrierbarer ZV auf einem Wahrscheinlichkeitsraum, dann gilt dies auch für die Vereinigung $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$.

d) Existiert zu einer Familie $\mathcal{M}$ von ZV eine integrierbare Majorante, dann ist $\mathcal{M}$ gleichgradig integrierbar.

e) Ist X integrierbar, dann ist $\{Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) : \mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(X)\}$ gleichgradig integrierbar.

f) Die gleichgradige Integrierbarkeit ist ausschließlich eine Annahme an die *Verteilungen* der Zufallsvariablen.

Proposition 4.33. *Sei $\{X_t : t \in I\}$ eine Familie reeller Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\{X_t : t \in I\}$ *ist gleichgradig integrierbar.*

(ii) $\sup_{t\in I} E|X_t| < \infty$ *und für alle* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $\delta > 0$*, so dass für alle* $A \in \mathcal{F}$ *mit* $\mathbb{P}(A) < \delta$ *und alle* $t \in I$ *gilt:* $E|X_t \mathbb{1}_A| < \varepsilon$.

(iii) Es existiert eine nichtnegative nichtfallende konvexe Funktion

$$G : [0,\infty) \to [0,\infty) \text{ mit } \lim_{x\to\infty} \frac{G(x)}{x} = \infty \text{ und } \sup_t E[G(|X_t|)] < \infty.$$

(iv) Es existiert eine nichtnegative messbare Funktion $G : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *mit*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{G(x)}{x} = \infty \text{ und } \sup_t E[G(|X_t|)] < \infty.$$

Beweis. **(i)⇒(ii):** Sei $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\sup_t \int_{\{|X_t| \geq n\}} |X_t| \, \mathrm{d}\mathbb{P} < \infty$. Dann folgt $\sup_t E|X_t| \leq \sup_t E(\mathbb{1}_{\{|X_t| \geq n\}} |X_t|) + n < \infty$. Sei weiter $\varepsilon > 0$. Wähle $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\sup_t E(\mathbb{1}_{\{|X_t| \geq n\}} |X_t|) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2n}$. Dann folgt für $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A) < \delta$:

$$
\begin{aligned}
E|X_t \mathbb{1}_A| &= E[|X_t| \mathbb{1}_{A \cap \{|X_t| \geq n\}}] + E[|X_t| \mathbb{1}_{A \cap \{|X_t| < n\}}] \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + n\mathbb{P}(A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

(i)⇒(iii): Sei $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge positiver Zahlen, so dass $N_1 = 0$,

$$
N_k \uparrow \infty \text{ und } C := \sup_t \sum_{k=1}^{\infty} k \, E[|X_t| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_t| \geq N_k\}}] < \infty.
$$

Definiere die stetige Funktion G durch $G(0) = 0$ und $G'(x) = \left(k - \frac{N_{k+1} - x}{N_{k+1} - N_k}\right)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [N_k, N_{k+1}]$. Dann ist G konvex, nichtfallend und erfüllt $\lim_{x \to \infty} G(x)/x = \infty$. Weiter folgt

$$
\begin{aligned}
E[G(|X_t|)] &= \int_\Omega \int_0^\infty G'(y) \mathbb{1}_{\{|X_t| \geq y\}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} \int_{N_k}^{N_{k+1}} \underbrace{G'(y)}_{\leq k} \mathbb{1}_{\{|X_t| \geq y\}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\leq \int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} k(|X_t| - N_k) \cdot \mathbb{1}_{\{|X_t| \geq N_k\}} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} k \, E[|X_t| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_t| \geq N_k\}}] \leq C < \infty.
\end{aligned}
$$

(iii)⇒(iv): klar.
(iv)⇒(i): Sei $n \in \mathbb{N}$ und $M_n := \inf_{x \geq n} \frac{G(x)}{x}$. Dann folgt

$$
\sup_t \int_{\{|X_t| \geq n\}} |X_t| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \frac{1}{M_n} \sup_t \int_\Omega G(|X_t|) \, \mathrm{d}\mathbb{P}.
$$

(ii)⇒(i): Sei $\varepsilon > 0$ und $n = n(\varepsilon) > \frac{1}{\delta} \sup_{t \in I} E|X_t|, n < \infty$.
Wegen $E|X_t| \geq n \, \mathbb{P}\{|X_t| \geq n\}$ folgt $\mathbb{P}\{|X_t| \geq n\} < \delta$, also folgt aus (ii) $E[\mathbb{1}_{\{|X_t| \geq n\}} |X_t|] < \varepsilon$. □

Bemerkung 4.34. a) Ein wichtiger Spezialfall ist $G(x) = x^p$ für $p > 1$.

b) Aus $\sup_{t \in I} E|X_t| < \infty$ folgt *nicht* die gleichgradige Integrierbarkeit der Familie $\{X_t : t \in I\}$! Ein Beispiel dafür ist $I = \mathbb{N}, (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ und $X_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}$.

Für den Beweis des folgenden Satzes wird sich das folgende Lemma als nützlich erweisen, dessen Beweis dem Leser überlassen ist.

Lemma 4.35. *Eine Folge reeller Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist gleichgradig integrierbar genau dann wenn alle X_n integrierbar sind und* $\lim_{c \to \infty} \limsup_{n \to \infty} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| \geq c\}}] = 0$.

Der folgende Satz zeigt (auch außerhalb der Martingaltheorie) die Nützlichkeit des Begriffs der gleichgradigen Integrierbarkeit.

Satz 4.36 (Charakterisierung der $\mathcal{L}^p$-Konvergenz)**.** *Seien $p \in [1, \infty)$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann sind äquivalent:*

(i) $X_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *in* $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

(ii) α*)* $X_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *in Wahrscheinlichkeit und*
β*)* $\{|X_n|^p : n \in \mathbb{N}\}$ *ist gleichgradig integrierbar.*

(iii) α*)* $X_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ *in Wahrscheinlichkeit,*
β*)* $\lim_{n\to\infty} E|X_n|^p = E|X|^p$ *und*
γ*)* $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Beweis. (i)⇒(iii):
α) und γ) sind klar.
β) Aus der Dreiecksungleichung für die L^p-norm folgt

$$|(E[|X_n|^p])^{1/p} - (E[|X|^p])^{1/p}| \leq \|X_n - X\|_p \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(iii)⇒(ii):
Für $k > 0$ folgt:

$$\begin{aligned} E[|X_n|^p \mathbb{1}_{\{|X_n|^p \geq k\}}] &\leq \underbrace{E[|X_n|^p]}_{\to E[|X|^p]} - E[\underbrace{|X_n|^p \wedge (k - |X_n|^p)^+}_{\text{beschränkt}}] \\ &\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} E[|X|^p - |X|^p \wedge (k - |X|^p)^+] \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

wobei wir für den 1. Term die Annahme und für den zweiten den majorisierten Konvergenzsatz verwandt haben. Mit Lemma 4.35 folgt nun die Behauptung.

(ii)⇒(i):
Wegen $E(|X|^p) \leq \liminf_{n\to\infty} E(|X_n|^p)$ (Fatou!) ist $\mathcal{M} = \{|X|^p\} \cup \{|X_n|^p : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar. Also existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $E(\mathbb{1}_A |Y|) < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$ für alle $Y \in \mathcal{M}$ und $\mathbb{P}(A) < \delta$. Weiter existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\mathbb{P}\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{3}\} < \delta$ für alle $n \geq N$. Damit gilt für $n \geq N$

$$\|X_n - X\|_p \leq \|\mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon/3\}}(|X_n| + |X|)\|_p + \|\mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon/3\}}|X_n - X|\|_p \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Proposition 4.37. *Sei $p \geq 1$ und $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann ist $\{|E(X|\mathcal{G})|^p : \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ Teil-σ-Algebra$\}$ gleichgradig integrierbar.*

Beweis. $\{|X|^p\}$ ist gleichgradig integrierbar, also existiert eine konvexe Funktion G, wie in (iii) von Proposition 4.33 mit $E[G(|X|^p)] < \infty$. Da $x \mapsto H(x) := G(|x|^p)$ konvex ist, folgt mittels Jensen für jede Teil-σ-Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

$$E[G(|E[X|\mathcal{G}]|^p)] = E[H(E[X|\mathcal{G}])] \leq E[G(|X|^p)].$$

Die Aussage folgt mit Proposition 4.33. □

4.5 Reguläre Martingale

Eine Frage, die oft interessiert, ist die folgende: Unter welchen Bedingungen konvergiert (X_n) in $\mathcal{L}^1$ gegen X_∞? Wir haben bereits gesehen, dass dies nicht immer gilt.

Definition 4.38. Ein $(\mathcal{F}_n)$-Submartingal (Supermartingal, Martingal), das in $\mathcal{L}^1$ konvergiert, heißt *regulär.*

Satz 4.39. *Sei (X_n) ein reguläres $(\mathcal{F}_n)$-(Sub-)Martingal. Dann konvergiert (X_n) auch fast sicher, und für den Grenzwert X_∞ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$X_n \overset{(\leq)}{=} E[X_\infty|\mathcal{F}_n] \ \ \textit{fast sicher.}$$

Beweis. Aus der $\mathcal{L}^1$-Konvergenz von (X_n), folgt $\sup_{n\in\mathbb{N}} E|X_n| < \infty$. Somit konvergiert nach dem Martingalkonvergenzsatz (X_n) fast sicher gegen eine Zufallsvariable X_∞. Diese ist auch der $\mathcal{L}^1$-Limes der Folge, da beide Konvergenzarten die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit implizieren und der Limes (in Wahrscheinlichkeit) bis auf $\mathbb{P}$-Nullmengen eindeutig ist.
Sei $\delta > 0$. Dann gilt für $m > n$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E[X_\infty|\mathcal{F}_n] - X_n < -\delta) &\leq \mathbb{P}(E[X_\infty|\mathcal{F}_n] - E[X_m|\mathcal{F}_n] < -\delta) \\
&\leq \mathbb{P}(|E[X_\infty|\mathcal{F}_n] - E[X_m|\mathcal{F}_n]| > \delta) \\
&\leq \frac{E|E[X_\infty - X_m|\mathcal{F}_n]|}{\delta} \leq \frac{E(E[|X_\infty - X_m||\mathcal{F}_n])}{\delta} \\
&= \frac{E|X_\infty - X_m|}{\delta} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Also folgt $E[X_\infty|\mathcal{F}_n] \geq X_n$ fast sicher. Ist (X_n) ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal, dann sind (X_n) und $(-X_n)$ $(\mathcal{F}_n)$-Submartingale, und somit gilt

$$X_n = E[X_\infty|\mathcal{F}_n] \ \ \text{fast sicher.}$$

□

Als notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Regularität eines Martingals wird sich die gleichgradige Integrierbarkeit von $\mathbf{X} = (X_n)$ herausstellen.

Satz 4.40 (Charakterisierung regulärer Martingale)**.** *Sei (X_n) ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

a) *(X_n) ist regulär.*

b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} E|X_n| < \infty$ *und für den fast sicheren Limes X_∞ gilt $X_\infty \in L^1$ und $X_n = E[X_\infty|\mathcal{F}_n]$ fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$.*

c) *Es existiert $X' \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $X_n = E[X'|\mathcal{F}_n]$ fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$.*

d) *$\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichgradig integrierbar.*

Beweis. **a)** $\Rightarrow$ **b):** gilt nach Satz 4.39

b) $\Rightarrow$ **c):** klar.

c) $\Rightarrow$ **d):** dies wurde bereits in Proposition 4.37 gezeigt.

d) $\Rightarrow$ **a):** Die gleichgradige Integrierbarkeit impliziert $\sup_{n\in\mathbb{N}} E|X_n| < \infty$, also konvergiert X_n fast sicher gegen eine Zufallsgröße X_∞ (nach dem Martingalkonvergenzsatz). Aus dem Charakterisierungssatz der $\mathcal{L}^p$-Konvergenz (Satz 4.36) folgt, dass (X_n) regulär ist. $\square$

Bemerkung 4.41. Ist (X_n) ein $(\mathcal{F}_n)$-Submartingal, und ersetzt man im vorhergehenden Satz alle "=" durch "$\leq$", dann gilt a) $\Leftrightarrow$ d) $\Rightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c).

Satz 4.42. *Sei $p > 1$ und (X_n) ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal. Gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|^p] < \infty$, so ist (X_n) regulär und (X_n) konvergiert in $\mathcal{L}^p$.*

Beweis. Wählt man $G(x) = x^p$ so folgt die gleichgradige Integrierbarkeit mittels Proposition 4.33. Sei X_∞ der (fast sichere und $\mathcal{L}^1$) Grenzwert von (X_n). Dann gilt $X_n = E[X_\infty|\mathcal{F}_n]$. Nach Fatou folgt $E[|X_\infty|^p] \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|^p] < \infty$ und mit Jensen (angewandt auf $x \mapsto |x|^p$)

$$E[|X_n|^p] = E[|E[X_\infty|\mathcal{F}_n]|^p] \leq E[E[|X_\infty|^p|\mathcal{F}_n]] = E[|X_\infty|^p].$$

Somit folgt $\lim_{n\to\infty} E[|X_n|^p] = E[|X_\infty|]$ und aus dem Chaharakterisierungssatz der $\mathcal{L}^p$-Konvergenz (Satz 4.36) folgt die $\mathcal{L}^p$-Konvergenz. $\square$

Bemerkung 4.43. Die vorhergehende Aussage ist falsch für $p = 1$ bzw. für den Fall, dass (X_n) nur ein $(\mathcal{F}_n)$-Submartingal ist. Als Beispiel mit $p = 2$ wähle $X_1 \equiv -2^{1/2}$ und

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = -2^{(n+1)/2}|X_n < 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0|X_n < 0) = 1/2 \text{ und } \mathbb{P}(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = 1.$$

Es folgt $E[X_n^2] = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $E[X_{n+1}|X_n = -2^{n/2}] = -2^{(n+1)/2} \cdot 1/2 > -2^{n/2}$ und somit ist (X_n) ein Submartingal. (X_n) konvergiert fast sicher gegen $X_\infty \equiv 0$, aber **nicht** in $\mathcal{L}^2$!

Proposition 4.44. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $X_n := E[X|\mathcal{F}_n]$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = E[X|\mathcal{F}_\infty] \quad \textit{fast sicher und in } \mathcal{L}^1.$$

Beweis. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Proposition 4.37 ein gleichgradig integrierbares (und damit reguläres) Martingal. Damit konvergiert (X_n) fast sicher und in $\mathcal{L}^1$ gegen eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare integrierbare Zufallsvariable X_∞.

Es verbleibt zu zeigen, dass $X_\infty = E[X|\mathcal{F}_\infty]$, d.h. dass für alle $A \in \mathcal{F}_\infty$

$$\int_A X_\infty \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

ist. Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller $A \in \mathcal{F}_\infty$, für die dies gilt. $\mathcal{A}$ ist ein Dynkinsystem. Weiterhin folgt aus $X_n = E[X_\infty|\mathcal{F}_n] = E[X|\mathcal{F}_n]$, dass für $A \in \mathcal{F}_n$

$$\int_A X_\infty \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

gilt und somit $\mathcal{A}$ den $\cap$-stabilen Erzeuger $\mathcal{M} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ von $\mathcal{F}_\infty$ enthält. Es folgt $\mathcal{A} = \mathcal{F}_\infty$. $\square$

4.6 Beweis des Stoppsatzes für reguläre Martingale (Satz 4.20)

Zum Beweis nutzen wir das folgende Lemma.

Lemma 4.45. *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein reguläres $(\mathcal{F}_n)$-Submartingal und T eine Stoppzeit, dann ist $\{X_{T\wedge n}, n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar.*

Beweis. Sei X_∞ der (fast sichere und $\mathcal{L}^1$) Limes von (X_n). Wir zeigen zunächst, dass X_T eine integrierbare Zufallsvariable ist. Nach Fatou gilt

$$E[|X_T|] \leq \liminf_{n\to\infty} E[|X_{n\wedge T}|]. \tag{2}$$

Nach Proposition 4.9 ist $(X_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathcal{F}_n)$-Submartingal und wegen des Stoppsatzes für beschränkte Stoppzeiten gilt

$$E[X_{n\wedge T}^+] \leq E[X_n^+] \leq E[|X_n|] \leq C < \infty$$

für eine von n unabhängige Konstante C (da (X_n) regulär ist). Weiterhin ist wegen des Stoppsatzes $(X_{n\wedge T})$ (Korollar 4.22) wieder ein Submartingal, sodass

$$E[|X_{n\wedge T}|] = 2E[X_{n\wedge T}] - E[X_{n\wedge T}] \leq 2C - E[X_1].$$

Wegen (2) ist nun X_T in $\mathcal{L}^1$.

Somit ist $\{X_T\} \cup \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar und für eine Funktion G wie in Proposition 4.33 folgt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E[G(|X_{T\wedge n}|)] \leq E[G(|X_T|)] + \sup_{n\in\mathbb{N}} E[G(|X_n|)] < \infty.$$

$\square$

Beweis des Stoppsatzes, Teil (c). Sei (X_n) ein reguläres $(\mathcal{F}_n)$-Submartingal und S und T Stoppzeiten. Für $n \in \mathbb{N}$ wenden wir den Stoppsatz für $T' = T \wedge n$ und S an:

$$E[X_{T\wedge n}|\mathcal{F}_S] \geq X_{S\wedge T\wedge n} \quad \text{fast sicher.} \tag{3}$$

Nach dem vorhergehenden Lemma ist $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig und konvergiert damit in $\mathcal{L}^1$ gegen X_T. Da die bedingte Erwartung eine Kontraktion auf $\mathcal{L}^1$ ist, folgt dass $\lim_{n\to\infty} E[X_{T\wedge n}|\mathcal{F}_S] = E[X_T|\mathcal{F}_S]$ in $\mathcal{L}^1$. Andererseits konvergiert $(X_{S\wedge T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen $X_{S\wedge T}$. Beide Konvergenzarten implizieren Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und damit gilt (3) auch für die Limiten, d.h.

$$E[X_T|\mathcal{F}_S] \geq X_{S\wedge T} \quad \text{fast sicher.}$$

$\square$

4.7 Doobs Maximalungleichungen

Wir werden in diesem Abschnitt noch zwei sehr hilfreiche Abschätzungen herleiten, die Maximalungleichungen von Doob.

Satz 4.46. *Sei (X_n) ein $(\mathcal{F}_n)$-Submartingal und $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $x > 0$*

(i) $\mathbb{P}\left(\max\limits_{n \le N} X_n \ge x\right) \le \frac{1}{x} E\left[X_N \mathbb{1}_{\{\max\limits_{n\le N} X_n \ge x\}}(\omega)\right] \le \frac{1}{x} EX_N^+,$

(ii) $\mathbb{P}\left(\min\limits_{n \le N} X_n \le -x\right) \le \frac{1}{x}\left(EX_N^+ - EX_1\right).$

Beweis.

(i) Sei $S := \inf\{n \le N : X_n \ge x\}$ mit der Konvention $\inf \emptyset = N$. S ist eine Stoppzeit mit $S(\omega) \le N$ für alle $\omega \in \Omega$ und $A := \{\max\limits_{n \le N} X_n \ge x\} \in \mathcal{F}_S$. Anwenden des Stoppsatzes mit Stoppzeiten S und $T := N$ liefert:

$$x\,\mathbb{P}\left(\left\{\max_{n\le N} X_n \ge x\right\}\right) \le \int_A X_S \,\mathrm{d}\mathbb{P} \le \int_A X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P} \le E[X_N^+].$$

(ii) Sei $T := \inf\{n \le N : X_n \le -x\}$ mit der Konvention $\inf \emptyset = N$ und sei $A := \{\min_{n\le N} X_n \le -x\} \in \mathcal{F}_T$. Wenden wir nun den Stoppsatz für die Stoppzeiten $S := 1$ und T an so folgt

$$x\,\mathbb{P}\left(\left\{\min_{n\le N} X_n \le -x\right\}\right) \le -\int_A X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P} = -EX_T + \int_{A^c} X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

$$\le -EX_T + \int_{A^c} X_N \,\mathrm{d}\mathbb{P} \le -EX_1 + EX_N^+.$$

□

Satz 4.47 (Doobs L^p-Ungleichung)**.** *Sei (X_n) ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal oder nichtnegatives $(\mathcal{F}_n)$-Submartingal, $N \in \mathbb{N}$ und $1 < p < \infty$. Es gelte $E[|X_k|^p] < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$E\Big[\max_{1\le n\le N} |X_n|^p\Big] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_N|^p].$$

Beweis. In jedem Fall ist $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathcal{F}_n)$-Submartingal. Sei

$$V := \max_{1\le n\le N} |X_n| \quad \text{und } U := |X_N|.$$

Es gilt

$$E[V^p] \le E\left[\sum_{n=1}^N |X_n|^p\right] < \infty$$

und

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\|V\|_p^p = E\left[\frac{V^p}{p}\right] &= \int_\Omega \int_0^\infty y^{p-1}\, \mathbb{1}_{\{V\geq y\}}(\omega)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty y^{p-1}\,\mathbb{P}(V\geq y)\,\mathrm{d}y \\ &\leq \int_0^\infty y^{p-2} \int_{\{V\geq y\}} U(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\,\mathrm{d}y \overset{\text{Fubini}}{=} \int_\Omega U(\omega)\int_0^{V(\omega)} y^{p-2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \\ &= E\left[U\frac{V^{p-1}}{p-1}\right] \overset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{1}{p-1}\|U\|_p\;\|V^{p-1}\|_{p/p-1} = \frac{1}{1-p}\|U\|_p\|V\|_p^{p-1},\end{aligned}$$

woraus $\|V\|_p \leq \frac{p}{p-1}\,\|U\|_p$ und somit die Behauptung folgt. □