Formalismus in der Mathematik

1. **Aussagen:**
   Eine Aussage ist ein mathematischer Sachverhalt, der als wahr oder falsch klassifizierbar ist.
   Beispiele:

   - Aussagen sind: $3 \in \mathbb{N}; 5 = 7; \exists\ x \in \mathbb{Q}\ :\ x \neq \sqrt{17}; (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Körper.
   - Keine Aussagen sind: $21 - 3; \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

   Aussagen bilden sozusagen die Atome der Mathematik. Jede mathematische Formulierung, jeder Satz, jeder Beweis setzt sich aus logisch verknüpften Aussagen zusammen.

2. **Logische Verknüpfungen:**
   Logische Verknüpfungen sind: $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$.
   Mathematische Aussagen lassen sich mit logischen Verknüpfungen zu komplexeren Aussagen verbinden:

   $$(\text{Voraussetztung} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \text{Behauptung}),$$

   so dass ein Beweis als wahr oder falsch klassifizierbar ist.
   Beachte: Logische Verknüpfungen werden nur zwischen Aussagen verwendet.
   Beispiel:

   - Richtig wäre: $3x + y = 2x \Leftrightarrow x + y = 0$.
   - Falsch wäre: $3x + y \Leftrightarrow x + y$.

3. **Quantoren:**
   Es gibt zwei verschiedene Quantoren:

   - $\forall\ x :$ "für alle x" oder "für jedes x"
   - $\exists\ x :$ "es existiert (ein) x".

   Zu einem Quantor gehört immer eine Spezifikation, worauf sich die Quantorbedeutung bezieht.
   Beispiel:

   - $\forall\ x \in \mathbb{Q} : A(x)$, wobei $A(x)$ eine Aussage ist, etwa $A(x) \Leftrightarrow x^2 \geq 0$.
   - $\exists\ x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = 2$.

Quantoren sind immer an Aussagen gebunden. Sie stellen eine verkürzende Schreibweise dar.
Beispiele:

- "$(\forall\ n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1\ :\ \sqrt{n} \notin \mathbb{N}\ ) \Leftrightarrow (\ \left(\sqrt{2} \notin \mathbb{N}\right)$ *und* $\left(\sqrt{3} \notin \mathbb{N}\right)$ *und*...)" .

- Die Aussage "Der Kehrwert jeder natürlichen Zahl ist größer als Null" heißt "... *und* $\left(\frac{1}{3} > 0\right)$ *und* $\left(\frac{1}{4} > 0\right)$ *und*..."
  oder in Quantorschreibweise: "$\forall\ n \in \mathbb{N}\ :\ \frac{1}{n} > 0$".

Auch der Existenzquantor kürzt eine Reihe von Einzelaussagen ab.
Beispiel:
"$\exists\ n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 = 25 \Leftrightarrow \underbrace{\left(1^2 = 25\right) \textit{ oder } \left(2^2 = 25\right) \textit{ oder } \left(3^2 = 25\right) \textit{ oder } \ldots}_{\text{mindestens eine dieser Aussagen muß stimmen}}$".

Zu jeder für mehr als ein Element einer Menge geltenden Aussage gehört die Spezifikation, für welche Elemente die Aussage gilt. Dies geschieht mit Hilfe der Quantoren.

Variablen und Bezeichner

In der Mathematik wird fast ausschließlich mit Variablen gearbeitet. Diese stellen ein bestimmtes Objekt der mathematischen Anschauung dar. Da dieses Objekt aber nur ein einzelnes aus einer sehr großen Menge verschiedener mathematischer Objekte darstellt, kann mit Variablen nur dann vernünfig gearbeitet werden, wenn sie spezifiziert werden.
Deshalb gehört zu einem Bezeichner immer eine Spezifikation. Diese erklärt, was der Bezeichner bezeichnet.
Beispiel:

- Problematisch ist: "Für alle g gilt: $g^2 > 0$", denn wenn z.B. g eine Gruppe bezeichnet, so ist "> 0" sinnlos.
- Korrekt ist: "Für alle $g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt: $g^2 > 0$".

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Bezeichner zu spezifizieren:

1. **Direkt:**
   Wird ein neuer Bezeichner eingeführt, so erklärt man, was er bezeichnet.
   Beispiele:
   - Sei $a \in \mathbb{R}$. Sei $f : V \to V$ ein Homomorphismus.
   - Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 5$.
2. **Indirekt über Verbund:**
   Ist ein Bezeichner nur ein Teil eines Objektes und dieses definiert, so genügt es, den Bezeichner zu spezifizieren.
   Beispiel:
   "Sei $R \subset A \times B$ eine Relation. Sei $(x, y) \in R$." Dabei müssen x, y nicht notwendigerweise näher spezifiziert zu werden.
   Werden dennoch Teilbezeichner spezifiziert, so können (insbesondere mit dem Schlüsselwort "beliebig") sogar Fehler auftreten.
   Beispiel:
   "Sei $c = (a, b) \in id_A$, $a, b \in A$ beliebig." ist falsch, denn für $(a, b) \in A$ muss $a = b$ gelten.
3. **Aus Herleitung:**
   Weist man die Existenz eines neuen Objektes nach, so wird ebenfalls spezifiziert, insbesondere wenn zusätzliche Eigenschaften vorliegen und benutzt werden sollen.
   Beispiel: "Sei $r \in \mathbb{R}^+ \ldots . \Rightarrow \exists\ R \in \mathbb{R}^+$ mit $R < r$, so dass $\frac{1}{R} > r$".

4. **Als neue Definition:**
   Definiert man einen Bezeichner mittels bekannter Symbole, so ist es nicht nötig, den neuen Bezeichner zu spezifizieren.
   Beispiel:
   "Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Sei $c := a^2 + b^2$".
   Hier ist für c klar, was es bezeichnet.

Weitere Möglichkeiten gibt es nicht.
Beispiel für einen formalen Fehler bei Bezeichnungen:
"Seien $R_1 \subset A \times A, R_2 \subset A \times B$ Relationen. Sei $(a, b) \in R_2 \circ R_1$.
$\Rightarrow (a, c) \in R_1$ und $(c, b) \in R_2$."
Hier liegt der Fehler darin, dass c nicht spezifiziert wurde.

Beweise in der Mathematik

Eine mathematische Behauptung (Satz, Rechenregel, ...) ist eine Aussage, deren Wahrheitswert zunächst nicht feststeht. Um die Aussage als wahr nachzuweisen, ist ein Beweis zu führen. Der Beweis besitzt immer folgende Grundstruktur:

$$\text{Voraussetzungen (als wahr angenommen)} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

Dabei sind die "$\Rightarrow$" Folgerungen von wahren Aussagen mit Hilfe von

- bereits bekannten Aussagen,
- Definitionen oder
- Axiomen.

Ist der Beweis richtig (d.h. die (komplexe) Aussage, die er darstellt, wahr), so muß jede Implikation "$\Rightarrow$" wahr sein und somit folgt aus den (wahren) Voraussetzungen eine nur als wahr mögliche Behauptung.

Schlüsselwörter in Beweisen:

- **Sei ..., Gelte ...:**
  Damit werden die Voraussetzungen getroffen, die als wahr angenommen werden dürfen. Dies sind die Voraussetzungen der Behauptung selbst oder für den Beweis nötige Aussagen (etwa: "Sei $a \in A$."), die man ohne Voraussetztung treffen darf.

- **beliebig:**
  Das Wort "beliebig" sagt aus, dass der folgende (Teil-) Beweis an einem Element der Menge exemplarisch geführt wird, dieses Element aber keine spezifische Eigenschaft innerhalb der Menge besitzt, die für den Beweis nötig ist. D.h. für das (als Variabe) bezeichnete Element kann jedes Element der Gesamtmenge eingestezt werden, ohne dass der Beweis falsch wird. Somit ist die Aussage für die gesamte Menge geführt.
  Beispiel:
  Zu zeigen: $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$.
  Beweis: Sei $y \in f(M \cup N)$ beliebig. $\Rightarrow \ldots$. (vgl. Aufgabe 8)

- **Fall:**
  Kennzeichnet, dass nun eine Fallunterscheidung vorgenommen wird. Um den Beweis durch eine Fallunterscheidung nicht auf einen Teil der zu betrachtenden Menge einzuschränken, ist es wichtig, alle möglichen Fälle zu betrachten und daraus einzeln die Behauptung nachzuweisen.
  Beispiel:
  "Sei $x \in \mathbb{R}$.

  - 1. Fall: $x > 0. \Rightarrow \ldots$.
  - 2. Fall: $x < 0. \Rightarrow \ldots$."

  Dies sind nicht alle Fälle, da $x = 0$ auch eintreten kann und daher ebenfalls betrachtet werden muss.

- **Annahme:**
  "Annahme:" sagt aus, dass jetzt eine Aussage vorausgesetzt wird und man beabsichtigt einen Widerspruch herzuleiten. Dadurch wird die Aussage (die bis zum Widerspruch einfach als wahr angenommen wird) falsifiziert, d.h., man weist nach, dass sie falsch ist. In einem Widerspruchsbeweis dürfen die generellen Voraussetzungen sowie die daraus vor der Annahme hergeleiteten Aussagen verwendet werden. Der Widerspruchsbeweis endet mit "Widerspruch".
  Dabei ist zu begründen, warum ein Widerspruch vorliegt.
  Beispiel:
  "Sei $a > 0$. Annahme: $\ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow a \leq 0$. Widerspruch, da $a > 0$ vorausgesetzt war."

  Wird die Begründung unterlassen, so können sich Fehler einschleichen.
  Beispiel:
  "Sei $a \geq 0$. Annahme: $\ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow a \leq 0$. Widerspruch." Da $a \geq 0$ vorausgesetzt war, ist dieser Beweis unvollständig, also falsch, denn der Fall $a = 0$ ist noch zu untersuchen.

  Ist der Widerspruchsbeweis korrekt, so gilt die Negation der Annahme, also ihr logisches Gegenteil. Dabei ist besonders auf die Quantoren zu achten.
  Beispiel:
  $\neg\,(\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, so dass $A\,(\varepsilon, \delta)$ gilt.$) \Leftrightarrow \exists\ \varepsilon > 0$, so dass $\forall\ \delta > 0$ gilt: $\neg A\,(\varepsilon, \delta)$, wobei $A\,(\varepsilon, \delta)$ eine Aussage ist, die von ε und δ abhängt.