Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2004

Übungen zur Mathematik II

— Blatt 2 —

Abgabe: Dienstag, 4.5.2004, 9 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 5 (4 Punkte). Stellen Sie fest, welche der folgenden Implikationen über reelle Zahlen x, a, b allgemeingültig bzw. i.a. falsch sind. Man beweise die allgemeingültigen Aussagen und gebe für die übrigen Aussagen ein Gegenbeispiel an:

a) $|x-a| < b \implies a-b < x < a+b.$

b) $|x-a| < b \implies x > a-2b.$

c) $ab > 1$ und $a < 1 \iff b > 1.$

d) $x(x-2a^2) > 0 \implies |x-a^2| > a^2.$

Aufgabe 6 (4 Punkte). Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Beschränktheit nach oben und bestimmen Sie gegebenenfalls das Supremum. Welche dieser Suprema sind Maxima?

a) $M = \left\{1 - \dfrac{1}{n^2} \;:\; n \geq 1\right\}$

b) $M = \left\{x \in \mathbb{R} \;:\; \dfrac{x^3}{(x+2)^2} > 1,\ x \neq -2\right\}$

c) $M = \left\{\dfrac{x}{|x+3|} \;:\; x \in \mathbb{R},\ x \neq -3\right\}$

Aufgabe 7 (mündlich). Sei M eine Menge, $R \subset M \times M$ eine Ordnung, d.h. mit der Bezeichnung

$$x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; (x,y) \in R \quad \text{gilt}$$

O1) $x \leq x \quad \forall\, x \in M$

O2) $x \leq y$ und $y \leq x \implies x = y$

O3) $x \leq y$ und $y \leq z \implies x \leq z$

R heißt eine Total-Ordnung, wenn $\forall\, x, y \in M$ gilt : $x \leq y$ oder $y \leq x$.

a) Begründen Sie, dass die Ordnung auf $\mathbb{R}$ aus der VL eine Total-Ordnung auf $\mathbb{R}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die lexikographische Ordnung auf der Menge der Wörter eine Total-Ordnung ist.
Dabei gelte für zwei Wörter

$X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_m)$ mit $x_j, y_j \in \{A, B, \cdots, Z\}$

$X \leq Y$ wenn einer der Fälle eintritt:

i) $X = Y$

ii) $x_j = y_j$ für $j = 1, \dots, n$ und $n < m$

iii) $\exists\, k \in \{1,\dots,\min(n,m)\}$ mit

$$x_j = y_j \quad \text{für} \quad j = 1,\dots,k-1 \quad \text{und} \quad x_k < y_k\,,$$

letzteres im Sinne der alphabetischen Ordnung.

Aufgabe 8 (3 Punkte). Berechnen Sie

a) 114 im Dreiersystem,

$$(114)_{10} = (d_k\, d_{k-1} \dots\, d_1\, d_0)_3\,.$$

b) $\frac{1}{5}$ als periodischen dyadischen Bruch,

$$\frac{1}{5} = (0, d_{-1}\, d_{-2} \cdots)_2\,.$$