Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2004

Übungen zur Mathematik II

— Blatt 4 —

Abgabe: Dienstag, 18.5.2004, 9 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 13 (3 Punkte). Sei $a_0 > 0$ und $a_{n+1} = a_0 + (a_n)^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie induktiv:

a) Die Folge (a_n) ist monoton wachsend.

b) Ist $a_0 \leq \frac{1}{4}$, so ist die Folge (a_n) konvergent.
Berechnen Sie in diesem Fall den Grenzwert.

Aufgabe 14 (5 Punkte). Sei $x > 0$, $a_0 > 0$ mit $a_0^2 > x$ und (a_n) die Iterationsfolge aus Bsp. 2.13,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right),$$

und r_n der relative Fehler,

$$r_n := \left|\frac{a_n - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right|.$$

a) Zeigen Sie

$$r_{n+1} = \frac{r_n^2}{2(r_n+1)} \;\leq\; \frac{1}{2}\, r_n^2 \;\leq\; 2 \cdot \left(\frac{r_0}{2}\right)^{2^{n+1}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0\,.$$

b) Für $x = 10$ und $a_0 = \frac{10}{3}$ ist $r_0 < 0,06$.
Wieviele Iterationsschritte benötigt man, um $\sqrt{10}$ mit einem relativen Fehler $< 10^{-100}$ zu berechnen?

Aufgabe 15 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und berechnen Sie die Summen

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^k}$ b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$ c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+6}{3^k}$.

Aufgabe 16 (mündlich). Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent.

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergent.