Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2004

Übungen zur Mathematik II
— Blatt 6 —

Abgabe: Dienstag, 1.6.2004, 9 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 21 (mündlich). Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto \frac{x^3 + 5x^2 - 2}{(x^2+1)^2} \, .$$

Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle hat. Von welcher Form ist $f(\mathbb{R})$?

Aufgabe 22 (3 Punkte). Zeigen Sie mit Hilfe der Formel

$$x^k - a^k = (x-a)(x^{k-1} + x^{k-2} \cdot a + \cdots + x \cdot a^{k-2} + a^{k-1}) \; :$$

Ist p ein Polynom vom Grad $n > 0$ und a eine Nullstelle von p, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$p(x) \quad (= p(x) - p(a)) = (x-a)\, q(x) \, ,$$

wobei q ein Polynom vom Grad $n-1$ ist.

Aufgabe 23 (5 Punkte). Bestimmen Sie den Konvergenzradius von

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (2x)^k$,

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$,

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{2004} x^k$,

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{2k}$ (setze $x^2 = y$) ,

e) $\sum\limits_{k=n}^{\infty} x^k$ für $n \in \mathbb{N}$.

Berechnen Sie in e) auch den Grenzwert (Ausklammern von x^n).

Aufgabe 24 (4 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \left[0, \frac{n+1}{2}\right]$.
Zeigen Sie

$$\frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^n}{n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} \qquad \forall \; k \geq n$$

und folgern Sie

$$0 \leq \exp(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \;\leq\; 2 \cdot \frac{x^n}{n!} \, .$$