Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2004

Übungen zur Mathematik II

— Blatt 11 —

Abgabe: Dienstag, 6.7.2004, 9 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 40 (mündlich). Sei $a > 0,\ p \in \mathbb{N},\ p \geq 2$ und $x_0^p \geq a$.
Zeigen Sie, dass die Iterationsfolge

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)\,x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right)$$

definiert ist und gegen $\sqrt[p]{a}$ konvergiert.

Aufgabe 41 (3+3 Punkte). Sei $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f([a,b]) \subset [a,b]$ und $|f'(x)| < 1\ \ \forall\, x \in [a,b]$.
Zeigen Sie:

a) f besitzt einen Fixpunkt c (Hinweis ZWS).

b) Der Fixpunkt ist eindeutig (Hinweis MWS).

(∗)c) Ist außerdem $f'(x) \geq 0\ \ \forall\, x \in [a,b],\ \ x_0 = a,\ \ x_{n+1} = f(x_n)$, so konvergiert x_n gegen den Fixpunkt.

Aufgabe 42 (3 Punkte). Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ \ x \to x$,

$$\varphi_n(x) \;=\; \begin{cases} \frac{j}{n} & \text{für } \ x \in \left[\frac{j-1}{n},\ \frac{j}{n}\right[, \quad j = 1,\dots,n\,, \\ 1 & \text{für } \ x = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $\|\varphi_n - f\|_\infty \to 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \varphi_n = \frac{1}{2}$. Geben Sie eine geometrische Interpretation an.

Aufgabe 43 (4 Punkte). Seien $f, g:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie:

a) $\|f \cdot g\|_\infty \;\leq\; \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$ und geben Sie ein Beispiel an, in dem “$<$” gilt.

b) $\big|\|f\|_\infty - \|g\|_\infty\big| \;\leq\; \|f - g\|_\infty$.

c) Sind f und g Regelfunktionen, so ist $f \cdot g$ ebenfalls eine Regelfunktion.