Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2004

Übungen zur Mathematik II

— Blatt 12 —

Abgabe: Dienstag, 13.7.2004, 9 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 44 (6 Punkte). Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx$ d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} \, dx$

Aufgabe 45 (3 Punkte). Sei $f \in C^1([a,b])$ mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$.

a) Zeigen Sie, dass für die Umkehrfunktion f^{-1} gilt

$$(*) \qquad \int_a^b f + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} \;=\; bf(b) - af(a).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \int_a^x f + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1} \;-\; \big(xf(x) - af(a)\big).$$

b) Was bedeutet die Aussage $(*)$ geometrisch?

Aufgabe 46 (mündlich). Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin(\pi e^t)\, dt}{\ln(1+x)}$$

existiert, und berechnen Sie diesen.

Aufgabe 47 (4 Punkte). Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale. – Dazu gehört die Begründung der Konvergenz.

a) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx$ b) $\displaystyle\int_0^\infty x^5 e^{-2x} \, dx$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x \cdot e^{-x^2} \, dx$

Klausur am Freitag, 16.7.2004, zur Vorlesungszeit 11:15 bis 13:45(!) in HG 4