Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2004

Mathematik II

– Klausur –

Freitag, den 16.7.2004.15–13.45 Uhr, HG 4

Name ______________________________

Vorname ______________________________

Wichtig, bitte beachten:

1. Tragen Sie in das Deckblatt deutlich lesbar Ihren Namen ein.
2. Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern; Papier bei der Aufsicht.
3. Der Schreibblock darf nicht auseinander genommen werden.
4. Geben Sie stichpunktartig *Begründungen* für Ihre Schlüsse und Rechnungen an.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Punkte	3	4	5	5	3	4	3	4	4	3	38
Erreicht											

Aufgabe 1 (3 Punkte). Zeigen Sie für $c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$

$$\prod_{k=0}^{n} \left(c^{2^k} + 1\right) = \frac{c^{2^{n+1}} - 1}{c - 1} .$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Untersuchen Sie folgende Grenzwerte auf Existenz und berechnen Sie gegebenenfalls

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 + 2x - 3}{(3x^2 - 1)\, x^2}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{\ln(1 - x)}$, c) $\lim\limits_{x \to 0} \cos \dfrac{1}{x}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte). Sei $a_0 \in \,]0, 3]$ und induktiv $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Begründen Sie, dass damit eine Folge (a_n) definiert ist.
b) Zeigen Sie, dass $a_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist und dass die Folge (a_n) konvergiert.
c) Bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 4 (5 Punkte). Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls die Summe der Reihe:

$$\text{a)}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k+1}{4^{k+1}}\,, \qquad \text{b)}\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)\, x^k\,, \qquad \text{c)}\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^k}{k-1}\,.$$

Aufgabe 5 (3 Punkte). Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$-\ln \sqrt{x} = x$$

eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto (x-1)\, e^{-x}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass ein $c > 0$ existiert mit $f(x) < f(c)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$, und berechnen Sie c.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 7 (3 Punkte). Untersuchen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Folge (z^n) konvergiert, wobei

$$z = a + \frac{i}{2}\,.$$

Aufgabe 8 (4 Punkte). Zeigen Sie:

a) Es existiert ein $M \geq 0$ mit

$$|\sin x - \sin y| \;\leq\; M \cdot |x - y| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}\,.$$

b) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, so auch $\sin \circ f$.

Aufgabe 9 (4 Punkte). Bestimmen Sie alle lokalen Minima von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_1^{e^x} \frac{\sin t}{t}\, dt\,.$$

Aufgabe 10 (3 Punkte). Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n\, dx$ für $n \in \mathbb{N}$,

b) das Volumen des Rotationskörpers zu

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto e^z\,.$$