Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 1 –

Abgabe Montag, 25.10.2004, 9 Uhr s.t.

Aufgabe 1 (5 Punkte).

a) Zeigen Sie, dass durch

$$d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{falls } x,y \text{ linear abhängig} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Metrik d auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird, die sogenannte *French Railroad-Metrik* oder *SNCF-Metrik*. Woher kommt der Name?

b) Geben Sie eine Folge $(x_k) \in \mathbb{R}^2$ an, die bzgl. der euklidischen Norm $\| \ \|_2$ auf $\mathbb{R}^2$ konvergiert, aber bezüglich der French Railroad-Metrik divergiert.

Aufgabe 2 (3 Punkte, 3 Zusatzpunkte).

a) Zeigen Sie, dass die obere Halbebene $\mathbb{H}$ in $\mathbb{R}^2$ offen ist:

$$\mathbb{H} := \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ \big|\ x_2 > 0\big\}.$$

b) Zeigen Sie allgemeiner, dass jede Halbebene H_y in einem Skalarprodukt-Raum $(V, \ \langle\ |\ \rangle)$ offen ist. Dabei sei für $y \in V \setminus \{0\}$

$$H_y := \big\{x \in V \ \big|\ \langle x \,|\, y\rangle > 0\big\}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $(V, \ \langle\ |\ \rangle)$ ein Skalarprodukt-Raum mit der Norm

$$x \mapsto \|x\| := \langle x \,|\, x\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Zeigen Sie die Parallelogramm-Gleichung:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \ \ \forall\, x,y \in V.$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation dieser Gleichung.

Aufgabe 4 (mündlich). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie (mit Cauchy-Schwarz)

$$\Big(\int_a^b f\Big)^2 \ \leq\ (b-a) \int_a^b f^2\,.$$

Zum Erwerb des Übungsscheins der Vorlesung Mathematik III sind die folgenden Bedingungen zu erfüllen:

- Regelmäßige und aktive Mitarbeit im Tutorium.
- Von den schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben sind 50% der Punkte zu erreichen.
- Von den mündlich zu bearbeitenden Aufgaben sind 1/3 vorzubereiten.
- Bestehen einer Klausur.

Bei der Festlegung der Note des Übungsscheins geht das Resultat der Klausur mit dem Faktor 2/3 ein.

Streckennetzplan europäischer Eisenbahnen