Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 2 –

Abgabe: Montag, 1.11.2004, 9 Uhr s.t.

Aufgabe 5 (4 Punkte). Im $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei

$$U := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}\,.$$

a) Begründen Sie, dass U ein 2-dimensionaler Untervektorraum ist.

b) Berechnen Sie eine ONB von U.

c) Berechnen Sie für $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektion $P_U\,v$.

Aufgabe 6 (6 Punkte). Es sei G die Menge der geraden Funktionen auf $\mathbb{R}$,

$$G = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, g(x) = g(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\},$$

U die Menge der ungeraden Funktion auf $\mathbb{R}$,

$$U = \{h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, h(x) = -h(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie:

a) Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich als Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion schreiben, $f = g + h$ mit $g \in G$, $h \in U$.

b) $G \cap U$ enthält nur die Nullfunktion.

c) Sind g, h stetig, $g \in G$, $h \in U$, so gilt für jedes $a > 0$

$$\langle g|h\rangle := \int_{-a}^{a} g \cdot h = 0\,.$$

Aufgabe 7 (mündlich). Zeigen Sie, dass der erste Hauptsatz (Satz 7.15) auch für komplexwertige Funktionen gilt.

Aufgabe 8 (3 Punkte). Zeigen Sie (mit der komplexen Darstellung von cos), dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto \cos^2 \pi x$$

1-periodisch ist, und bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von f.