Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 4 –

Abgabe: Montag, 15.11.2004, 9 Uhr s.t.

Aufgabe 13 (5 Punkte). Sei $r > 1$ und φ die logarithmische Spirale

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 , \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r^t \cos 2\pi t \\ r^t \sin 2\pi t \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass für die Bogenlänge gilt:

$$L(\varphi|_{[a,b]}) = \frac{c}{\ln r}(r^b - r^a) \quad \forall\, [a,b] \subset \mathbb{R} , \quad c = (\ln^2 r + 4\pi^2)^{\frac{1}{2}} .$$

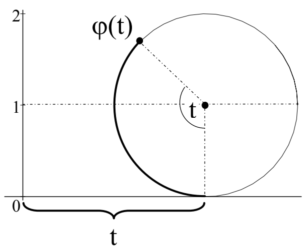
b) Existiert $\lim\limits_{a \to -\infty} L(\varphi|_{[a,b]})$?

c) Zeigen Sie, dass φ nach der Bogenlänge parametrisierbar ist, und geben Sie eine Parametrisierung nach der Bogenlänge an.

Aufgabe 14 (5 Punkte). Ein Punkt auf dem Rand eines Kreises mit Radius 1, der auf der x-Achse abrollt, beschreibt eine Zykloide.

a) Begründen Sie an Hand der Skizze die Kurvengleichung der Zykloide

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.$$



b) Skizzieren Sie $\varphi([0, 4\pi])$, insbesondere das Verhalten bei $0, 2\pi$ und 4π.
(Aus den Potenzreihen für sin und cos folgt, dass $\varphi(t)$ bei Null in erster Näherung durch $\begin{pmatrix} t^3/3! \\ t^2/2! \end{pmatrix}$ gegeben ist.)

c) Berechnen Sie die Bogenlänge von φ auf $[0, 2\pi]$. (Hinweis: Zeigen Sie zum Beispiel per komplexer Darstellung von sin und cos die Gleichung $2\sin^2 x = \cos(2x) - 1$.)

Aufgabe 15 (mündlich). Zeigen Sie: In je zwei Interpolationspunkten Q_0, $Q_3 \in \mathbb{R}^2$ und einem beliebigen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ gibt es eine Bezier-Kurve φ mit $\varphi(t) = P$ für ein $t \in [0, 1]$.

(Man kann sogar stets $t = \frac{1}{2}$ wählen und eine der beiden Richtungen vorgeben, etwa Q_1.)

Aufgabe 16 (3 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine reelle $(2, 2)$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^2$ und

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad x \mapsto Ax + b .$$

Ferner seien $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{R}^2$ gegeben, φ sei die Bezier-Kurve zu $Q_0, \ldots, Q_3$, φ_S sei die Bezier-Kurve zu $S(Q_0), \ldots, S(Q_3)$. Zeigen Sie:

$$\varphi_S(t) = S(\varphi(t)) \quad \forall\, t \in [0, 1] .$$