Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 8 –

Abgabe: Montag, 13.12.2004, 9 Uhr s.t.

Aufgabe 30 (4 Punkte). Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie zum Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

die Flusslinie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(0) = a$ an. Skizzieren Sie die Bilder $\varphi(\mathbb{R})$ einiger Flusslinien für

a) $\lambda < 0 < \mu$, b) $\lambda = \mu < 0$, c) $\lambda < \mu < 0$.

Aufgabe 31 (mündlich). Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit einem Eigenwert $\lambda < 0$. Zeigen Sie: Das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto Ax$$

hat eine Flusslinie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\|\varphi(0)\| = 1$ und $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

Aufgabe 32 (4 Punkte). Sei $U = U_1(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x\| < 1\right\}$ und

$$\phi : U \times\,]0,\infty[\, \to \mathbb{R}^n \times\,]0,\infty[\,, \;(x,r) \mapsto \left(rx,\, r\sqrt{1-\|x\|^2}\right) .$$

a) Zeigen Sie: Zu jedem $(y,s) \in \mathbb{R}^n \times\,]0,\infty[$ existiert genau ein $(x,r) \in U \times\,]0,\infty[$ mit $\phi(x,r) = (y,s)$. Geben Sie die Umkehrabbildung ϕ^{-1} an.

b) Berechnen Sie die Ableitung $\partial\phi\,(x,r)$ und zeigen Sie, dass $\partial\phi\,(x,r)$ für alle (x,r) in $U \times\,]0,\infty[$ invertierbar ist.

c) Skizzieren Sie für $n = 1$ zwei Koordinatenlinien $]-1,1[\, \times \{r_0\}$ und $\{x_0\} \times\,]0,\infty[$ und deren Bilder unter ϕ.

Aufgabe 33 (2 Punkte, Kugelkoordinaten). Sei

$$\begin{aligned} U &:= \;]0,\infty[\, \times\,]-\pi,\pi[\, \times\,]0,\pi[\, \subset \mathbb{R}^3, \\ V &:= \;\mathbb{R}^3 \setminus ([0,\infty[\, \times \{0\} \times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

und seien $\Phi : U \to V$ sowie $\Psi : V \to U$ gegeben durch

$$\Phi\begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,\cos\alpha\,\sin\vartheta \\ r\,\sin\alpha\,\sin\vartheta \\ r\,\cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \Psi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arg\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie

$$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_U \;.$$