Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Wintersemester 2004/05

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 9 –

Abgabe: Montag, 20.12.2004, 9 Uhr s.t.

Aufgabe 34 (4 Punkte). Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin \frac{1}{4}x^2y^2 \\ \cos \frac{1}{4}x^2y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Ableitungsmatrix $\partial f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

b) Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat in der Einheitskreisscheibe

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Aufgabe 35 (4 Punkte). Sei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und partiell differenzierbar nach der zweiten Variable, und für ein $q < 1$ gelte

$$|\partial_2 f(t, y)| \leq \frac{q}{b - a}$$

für alle $(t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. Zu $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$\Phi : C([a, b]) \to C([a, b]), \quad g \mapsto \Phi g$$

mit

$$(\Phi g)(t) := \alpha + \int_a^t f\big(s, g(s)\big)\, ds$$

für $t \in [a, b]$. Zeigen Sie:

a) Φ hat genau einen Fixpunkt φ.

b) φ ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big) \;\; \forall\, t \in [a, b]\,, \quad \varphi(a) = \alpha\,.$$

Aufgabe 36 (3 Punkte). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\Phi : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})\,, \quad (\Phi g)(t) = \alpha + \int_0^t g(s)\, ds\,,$$

sowie $g_0 := \alpha$ und $g_{k+1} := \Phi g_k$. Berechnen Sie g_1, g_2, g_3, "erraten" Sie den Grenzwert φ und überprüfen Sie, dass φ ein Fixpunkt von Φ ist.

Aufgabe 37 (mündlich). Zeigen Sie das *Vereinfachte Newtonverfahren*:
Sei $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $M := \max\big\{f'(x) \;\big|\; x \in [a, b]\big\}$. Ist $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$ und $\alpha > M/2$, so ist c attraktiver Fixpunkt von

$$\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x - \frac{1}{\alpha} \cdot f(x)\,.$$