Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2004/05

Mathematik III

– Klausur –

Samstag, 12.2.2005, 10.15–12.45 Uhr, HS II

Name ______________________________

Vorname ______________________________

Wichtig, bitte beachten:

- Tragen Sie in das Deckblatt deutlich lesbar Ihren Namen ein.
- Geben Sie stichpunktartig *Begründungen* für Ihre Schlüsse und Rechnungen an.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
Punkte	2	4	4	3	4	4	5	3	4	33
Erreicht										

Aufgabe 1 (2 Punkte). Auf $C([-1,1]\,,\mathbb{R})$ sei das übliche Skalarprodukt gegeben,

$$(f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx.$$

Seien $f,g \in C([-1,1])$ mit $f|_{[0,1]} = 0$ und $g|_{[-1,0]} = 0$ sowie $g(x) = ax$ für $x > 0$ mit $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f und g orthogonal sind, und geben Sie ein a an, so dass g normiert ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei wie üblich $e_k(x) = e^{2\pi i k x}$ für $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass für ein (komplexes) trigonometrisches Polynom

$$f(x) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

die Fourierkoeffizienten $c_k(f)$ gerade die Polynomkoeffizienten c_k sind.

b) Bestimmen Sie die reellen Fourierkoeffizienten a_0, a_k, b_k $(k \geq 1)$ für die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} e_k(x) - \sum_{k=-n}^{-1} e_k(x), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte).

a) Berechnen Sie für $r > 0$ und $c \in \mathbb{R}$ die Bogenlänge $L\varphi|_{[a,b]}$ der Schraubenlinie

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ct \end{pmatrix}.$$

b) Begründen Sie, dass φ nach der Bogenlänge parametrisierbar ist.
c) Für welche Parameter (r, c) ist φ bereits nach der Bogenlänge parametrisiert?

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei $f(x, y) = x^2 y e^{y-x}$ für $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ und $v = \binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ normiert.

a) Berechnen Sie den Gradienten $\partial f(x, y)$ und die Richtungsableitung $\partial_v f(1, 1)$.
b) Für welches v ist $\partial_v f(1, 1)$ minimal? Stellen Sie zuerst eine allgemeine Formel auf und berechnen Sie dann v.

Aufgabe 5 (4 Punkte). Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 + \alpha xy + y^2$. Zeigen Sie: f hat im Punkt $(0, 0)$

a) für $|\alpha| < 2$ ein lokales isoliertes Minimum,
b) für $|\alpha| > 2$ kein lokales Extremum,
c) für $|\alpha| = 2$ ein lokales Minimum, das nicht isoliert ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Zeigen Sie die Existenz eines Fixpunktes von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \binom{x}{y} \mapsto \frac{1}{3}\binom{1 + \sin y}{\cos x}$$

in der Menge $X = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 7 (5 Punkte).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (bei homogenen Würfeln)
   - beim sechsmaligen Würfeln mit einem Würfel höchstens eine Sechs zu erzielen,
   - beim zwölfmaligen Würfeln mit zwei Würfeln mindestens einen Sechserpasch zu erzielen?

b) Wie oft ist eine Münze zu werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens einmal Zahl zu erhalten?

Aufgabe 8 (3 Punkte). Beim Test eines Schlankheitsmittels an 750 Personen tritt bei 450 Personen die gewünschte Wirkung (W) nicht auf, bei 105 Personen werden Nebenwirkungen (N) festgestellt und unter diesen sind 42, bei denen das Mittel wirkt.

a) Wieviele Versuchspersonen zeigen weder Wirkung noch Nebenwirkung?
b) Entscheiden Sie, ob Wirkung und Nebenwirkung unabhängige Ereignisse sind.

Aufgabe 9 (4 Punkte). Sei (Ω, P) ein diskreter W-Raum, $A, B \subset \Omega$ und $X := 1_A$, $Y := 1_B$ die charakteristische Funktion auf A und B.

a) Berechnen Sie $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ und $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
b) Was bedeutet Unkorreliertheit in diesem Fall?