Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Jahresabschlussklausur zur Analysis
Mittwoch, den 7.10.2003, 9.30-12.30 Uhr
HG 215 (Auditorium Maximum, Biegenstraße 14).

Aufgabe 1 (3 Punkte). Berechnen Sie Supremum und Infimum und gegebenenfalls Maximum und Minimum von

$$M := \left\{ \frac{n^2-n}{n^2-n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte). Sei $a_0 \in [0,1]$ und induktiv $a_{n+1} := \sin(a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert und geben Sie den Grenzwert an.

Aufgabe 3 (5 Punkte).

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k}\ ?$$

Wo konvergiert sie gleichmäßig?

b) Geben Sie eine geschlossene Formel für $f'(x)$ an.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $f :]0,\infty[\to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x}$. Zeigen Sie: Es existiert ein $c > 0$ mit $f(]0,\infty[) = [0,c]$.

Aufgabe 5 (3 Punkte). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in C^2(I)$ zweimal stetig differenzierbar auf I und $a, x \in I$. Zeigen Sie

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)\, f''(t)\, dt\,.$$

Aufgabe 6 (5 Punkte). Welche der folgenden Mengen sind kompakt? Begründen Sie!

$$\begin{aligned} A &:= \{x \geq 0 \mid e^x \leq x+2\} \\ B &:= \{z \in \mathbb{C} \mid e^z = 3\} \\ C &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \in [1,2],\ 0 \leq x < \frac{1}{y}\right\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte). Berechnen Sie die Bogenlänge L der Kurve

$$\varphi : \ [0,2] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \ \cos t \\ t \ \sin t \\ \frac{2}{3} \ \sqrt{2t^3} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8 (3 Punkte). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in G$ und $f : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in a. Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung $\partial_v f(a)$ stetig vom Richtungsvektor v abhängt, d.h. die Abbildung

$$S_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_2 = 1\} \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \partial_v f(a)$$

stetig ist.

Aufgabe 9 (4 Punkte). Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y > 0\} \ \to \ \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x \cdot \ln(x+y) - y$$

auf lokale Extrema.

Aufgabe 10 (4 Punkte). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $(a,b) \in G$, $\ F : G \to \mathbb{R}$, $\ (x,y) \mapsto F(x,y)$ stetig differenzierbar mit $F(a,b) = 0$ und $\partial_y F(a,b) \ \ (:= \partial_2 F(a,b)) \neq 0$. Zeigen Sie:

Existiert eine lokale reguläre C^1-Auflösung $h : I \to \mathbb{R}$ von $F(x,y) = 0$ um (a,b) nach y, d.h.

$$F(x, h(x)) = 0 \quad \forall\, x \in I, \quad h(a) = b \quad \text{und} \quad h'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in I\,,$$

so hat $F(x,y) = 0$ eine lokale C^1-Auflösung um (a,b) nach x.

Aufgabe 11 (3 Punkte). Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$y''' + 3y'' + 4y = 0$$

eine streng monotone Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.