Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Jahresabschlussklausur zur Analysis
Mittwoch, den 7.4.2004, 9.30-12.30 Uhr
HS B, Hörsaalgebäude Chemie, Lahnberge.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine beschränkte Folge und $a := \sup\{|a_k| : \ k \geq 1\}$. Zeigen Sie: Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a - \varepsilon \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^n\Big)^{1/n} \ \leq \ a + \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_o\,.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte). Zeigen Sie die Existenz eines Punktes $x \in \,]0, \infty[$ mit

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt - \frac{\sin x}{x} = 0\,.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Zeigen Sie für stetig differenzierbares $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \int_0^1 x^{n-1} f(x)\, dx$$

existiert und berechnen Sie diesen.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\ \frac{x^k}{1 + x^{2k}}$$

absolut konvergent, bedingt konvergent bzw. divergent? (Begründungen!)

Aufgabe 5 (5 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} (f(x + \frac{1}{k^2}) - f(x))\,.$$

Zeigen Sie:

a) F ist definiert, d.h. die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) F ist stetig.

c) Ist $f \in C^2$, so ist F differenzierbar.

Aufgabe 6 (2 Punkte). Zeigen Sie:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x \sin(\pi e^t)\,dt}{\ln(1+x)}$$

existiert und berechnen Sie diesen Grenzwert.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y < f(x)\}$$

wegzusammenhängend ist. (Der Weg muss nicht durch Formeln beschrieben werden.)

Aufgabe 8 (5 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y^3 + y + 4xy - 2x^2$.

a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f und begründen Sie, um welche Art von Extrema es sich handelt.

b) Sei $P, Q \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf die Verbindungsstrecke $[P, Q] := \{(1-t)\,P + t\,Q \,|t \in [0, 1]\}$ ihr Maximum annimmt.

Aufgabe 9 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\binom{s}{\alpha} \mapsto \begin{pmatrix} e^s \cos\alpha \\ e^s \sin\alpha \end{pmatrix}$. Zeigen Sie:

a) f hat in jedem Punkt eine lokale Umkehrfunktion. Berechnen Sie die Ableitungsmatrix $\partial f^{-1}\binom{1}{0}$,

b) $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$.

Aufgabe 10 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{2 + \cos y}, \quad y(0) = 0$$

genau eine Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat, und geben Sie eine Lösungsformel für φ an.