CHRISTIAN THIEL

Philosophie und Mathematik

Konstruktion und Abstraktion

Abstraktion besteht darin, eine bestimmte gemeinsame Eigenschaft konstruierter Figuren zu betrachten und von den übrigen abzusehen. Die verbindende Eigenschaft wird dabei über eine Äquivalenzrelation festgelegt. Auf diese Weise erhält man neue, fiktive Gegenstände, die durch einen Abstraktor gekennzeichnet werden.

Konstruktion

- Gegenstandsbereich $e_1, e_2, \ldots$ – konstruiert durch bestimmte Regeln
- Äquivalenzrelation $\sim$ auf Gegenstandsbereich

$$\sim \text{ Äquivalenzrelation } :\Leftrightarrow$$

"$_n$ $(n \sim n)$	Reflexivität
"$_{n,m}$ $((n \sim m) \rightarrow (m \sim n))$	Symmetrie
"$_{n,m,k}$ $(((n \sim m) \wedge (m \sim k)) \rightarrow (n \sim k))$	Transitivität

Abstraktion

- Übergang zu neuen Gegenstandsbereich $\alpha(e_1), \alpha(e_2), \ldots$, wobei
$$\alpha(e_k) = \alpha(e_j) \quad \Leftrightarrow \quad e_k \sim e_j$$
- Aussageformen A, die invariant unter äquivalenter Ersetzung bleiben, für die also gilt "$_n$ $((n \sim e_k) \rightarrow A(n))$, können mit übertragen werden in Aussageformen αA auf dem neuen Gegenstandsbereich durch
$$\alpha A(\, \alpha(e_k)\,) \;:\Leftrightarrow\; A(\, e_k\,)$$

Eine so entwickelte Abstraktionstheorie gewährt nun Einsicht in die Struktur mancher bis dahin rätselhafter Phänomene, – insbesondere in der Mathematik.
Denn gerade die Mathematik beschäftigt sich im allgemeinen mit fiktiven Gegenständen. Als Methode zur Findung von solchen bedient sie sich des „Wechselspiels von Konstruktion und Abstraktion“.

Da alle „abstrakten“ Objekte der Mathematik in analogen Prozessen entstehen, finden die Fragen nach Gegenstand und Methode der Mathematik hier eine genauere, aufschlußreiche Antwort.

Die Zahl ist demnach ein durch Abstraktion in mehreren Schritten aus Zählzeichen gewonnener *fiktiver* Gegenstand.

- Grundzahlen
  - *Gegenstandsbereich* Zählzeichen aus verschiedenen Systemen
  - *Äquivalenzrelation* Zähläquivalenz $\sim_Z$

    $m \sim_Z n :\Leftrightarrow$ m *„nach der gleichen Abfolge von Anwendungen entsprechender Regeln erzeugt“* wie n
  - *Abstraktor* Zahl n

- Ganze Zahlen
  - *Gegenstandsbereich* Grundzahlen
  - *Äquivalenzrelation* Differenzäquivalenz $\sim_D$

    $(m,n) \sim_D (k,l) :\Leftrightarrow m + l = k + n$
  - *Abstraktor* Differenz von m und n, D(m,n), $m - n$

- Rationale Zahlen
  - *Gegenstandsbereich* Paare von ganzen Zahlen
  - *Äquivalenzrelation* Verhältnisäquivalenz $\sim_V$

    $(m,n) \sim_V (k,l) :\Leftrightarrow m \cdot l = k \cdot n$
  - *Abstraktor* Verhältnis von m zu n, V(m,n), $\frac{m}{n}$

- Reelle Zahlen
  - *Gegenstandsbereich* Folgen rationaler Zahlen
  - *Äquivalenzrelation* Folgenäquivalenz $\sim_F$

    $a_* \sim_F b_* :\Leftrightarrow a_* - b_*$ Nullfolge
  - *Abstraktor* Grenzwert von a_*, $\alpha(a_*)$, $\lim_{n\to\infty} a_*$

- Funktionen
  - *Gegenstandsbereich* Terme
  - *Äquivalenzrelation* Termäquivalenz $\sim_T$

    $T(x) \sim_T U(x) :\Leftrightarrow$ "$_c$ $(T(c) = U(c))$
  - *Abstraktor* durch ‘T(x)’ dargestellte Funktion, $\alpha(T(x))$