Grundbegriffe Differentialgeometrie für Gravitationstheorien

Thomas Eckert

eckert(@)mathematik.uni-marburg.de

WS 2004/05

13.08.2005

revidiert 29.11.2005

Zusammenfassung

Diese Vortragsausarbeitung zum Seminar Geometrische Analysis im WS 2004/05 mit dem Thema Super-Gravitation stellt einige Grundbegriffe der Differentialgeometrie bereit, die für die (allgemeine Relativitätstheorie der) *Gravitation* benötigt werden. Das Gravitationsfeld wird dort beschrieben als Eigenschaft des Raumes, die letztlich in einer *Metrik* auf der Raumzeit kodiert ist. In den *Einstein-Feldgleichungen* des Gravitons mit der Metrik als dynamischer Variable geht diese zudem in zweiter Ordnung ein, genauer als (Ricci- und skalarer) *Krümmungstensor* der Metrik. Diese Krümmung ist die Krümmung des Metrik-*Zusammenhangs* auf dem Tangentialbündel, auch *Levi-Civita*-Zusammenhang genannt.

Inhaltsverzeichnis

1 Differentialgeometrie **2**

1.1 Tangentialbündel und Vektorbündel 2

1.2 Schnitte und Vektorfelder 5

1.3 Affine Zusammenhänge 6

1.4 Krümmung 12

2 Feldtheorie der Gravitation **15**

2.1 Einstein-Hilbert-Aktion und Einstein-Feldgleichungen 15

2.2 Lösungen der Feldgleichungen 17

A Vergleich von Einstein-Hilbert-Aktion und üblichen Aktionen **18**

Literatur **18**

Index **20**

1 Differentialgeometrie

1.1 Tangentialbündel und Vektorbündel

In diesem ersten Abschnitt werden einige Grundbegriffe aus der Theorie glatter Mannigfaltigkeiten rekapituliert, welche eigentlich vorausgesetzt wird und etwa in [Jänich] oder [Hicks] sowie in [Bröcker/Jänich] als Übersicht nachgeschlagen werden kann. Daher ist diese Darstellung kurz gehalten und dient eher dem Einführen der Notation. Dennoch werden alle wichtigen Eigenschaften genannt.

Die *Raumzeit* (*space-time*) in physikalischen Theorien wird beschrieben als glatte (4-dimensionale) *Mannigfaltigkeit* M mit Karten φ, ψ,

$$M \supset U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

und Punkten $o, p \in M$. In physikalischen Texten wird dabei oft nur von Punkten

$$x = \left(x^\mu\right)_{\mu \in n} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix} \in V \subset \mathbb{R}^n$$

gesprochen, verbunden mit Übergangsregeln in eine andere Karte (desselben Punktes $o = \varphi^{-1}(x)$). Raumzeit-Indizes sind per Konvention griechische Buchstaben μ, ν, um sie von Indizes anderer, später auftretender Objekte zu unterscheiden.

Die lokale Beschreibung einer Mannigfaltigkeit (als $\mathbb{R}^n$) wird für jedes Objekt auf und im Zusammenhang mit Mannigfaltigkeiten eine lokale Beschreibung desselben erfordern oder nahelegen, die auch im Folgenden stets gegeben werden soll. Denn für das Verständnis eines Objektes sind beide Darstellungen hilfreich, die lokale wie die globale, welche oft übersichtlicher und geschlossener ist. In der lokalen Beschreibung ist jeweils anzugeben, „wie sich ein Objekt transformiert“, das heißt wie sich seine Darstellung in $x \in \mathbb{R}^n$ unter Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$ auf $x' = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ ändert.

Definition. Der *Tangentialraum* an M im Punkt $o \in M$ ist

$$T_oM = \left\{X_o : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; X_o \text{ linear und derivativ}\right\},$$

wobei die *Derivation*seigenschaft

$$X_o(fg) = (X_o f)g(o) + f(o)(X_o g)$$

für $f, g \in C^\infty(M)$ einfach die Produktregel bedeutet. Zum Verständnis folgende

Remark. 1. Diese Definition gibt eine praktische, nämlich (algebraisch) bequeme Beschreibung der Linearisierung[1] einer Mannigfaltigkeit in einem Punkt oder anders gesagt dem tangentialen Anlegen eines linearen Raums. Genauer ist für eine Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^n$

$$T_oM \cong \left\{\dot\gamma(0) \;\middle|\; \gamma \text{ glatte Kurve in } M \text{ durch } o\right\},$$

wobei γ „Kurve in M durch o“ heißt, wenn $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M$ für ein $\varepsilon > 0$ ist mit $\gamma(0) = o$. Hier ist $\dot\gamma = \gamma'$ die gewöhnliche Ableitung der Kurve im $\mathbb{R}^n$. Das heißt, der Tangentialraum

[1] lineare Approximation

ist die tangentiale Hyperebene. Vergleiche insbesondere [Jänich] zur Nebeneinanderstellung verschiedener Beschreibungen des Tangentialraumes.

2. Warum eine Derivation? Für einen Vektor $X \in \mathbb{R}^n$ (an o) und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist X_o mit

$$X_o f := X \cdot (\nabla f)(o) = \partial_X f(o)$$

gerade eine Derivation auf $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, nämlich schlicht die Richtungsableitung nach X ausgewertet in o. Umgekehrt ist jede solche Derivation schon die Ableitung in Richtung eines Vektors X.

Diese Identifikation von X und ∂_X entspricht einem allgemeinen Konzept: oft wird Geometrie, genauer werden geometrische (oder auch andere) Objekte, behandelt durch Übergang von den Elementen zu Operatoren auf Funktionenalgebren (über diesen Objekten), hier die Richtungsableitung. Und zwar weil diese oft schönere Eigenschaften haben: algebraischer, vollständiger etc. oder einfach weil diese analytischer zu behandeln sind. Gleiches findet etwa beim Dualraum eines Vektorraumes statt, der im Endlichdimensionalen isomorph ist, sonst der „Abschluss“; oder auch bei Homotopie und Homologie, die nicht 1:1 aber doch wichtige Eigenschaften der Topologie abbilden.

Proposition. *Eine Karte $\varphi : U \longrightarrow V$ induziert n Tangentialvektoren $\partial_\mu\big|_o := \partial/\partial\varphi^\mu\big|_o \in T_oM$ für $\mu = 0, \ldots, n-1$, kurz $\mu \in n$, durch*

$$\frac{\partial}{\partial\varphi^\mu}\bigg|_o f := \frac{\partial\big(f \circ \varphi^{-1}\big)}{\partial x^\mu}\big(\varphi(o)\big) \in \mathbb{R}, \quad f \in C^\infty(M).$$

Diese Vektoren bilden eine Basis des Tangentialraums T_oM, *welcher insbesondere wie die unterliegende Mannigfaltigkeit M Dimension n besitzt.*

Manchmal wird auch verkürzend $\partial/\partial x^\mu$ geschrieben, weil die Karte selbst als x mit Komponenten x^μ bezeichnet wird, diese mit ihrem Bildpunkt identifizierend, und zudem der Punkt o mit x identifiziert und gleichzeitig unterschlagen beziehungsweise als in der Notation x^μ enthalten angesehen wird. Solch irreführende Bezeichnungen sollen hier aber nicht verwendet werden.

Definition. Das *Tangential-Bündel* über M ist nun definiert als

$$TM = \bigcup_{o \in M} T_oM$$

mit Karten $TU \xrightarrow{\cong} V \times \mathbb{R}^n$ (für eine Karte $\varphi : U \longrightarrow V$ von M), gegeben durch die Zerlegung bezüglich obiger Basis:

$$TU \ni X_o =: \sum_{\mu \in n} w^\mu \, \frac{\partial}{\partial\varphi^\mu}\bigg|_o \longmapsto (\varphi^\mu(o), w^\mu)_{\mu \in n} = (\varphi(o), w) \in V \times \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Insbesondere ist TM $2n$-dimensional.

Remark. Zur Vereinfachung der Schreibweise soll im Folgenden die *Einsteinsche Summenkonvention* zugrunde gelegt werden, in der über Indizes, die oben *und* unten vorkommen, stets summiert wird. Damit lässt sich etwa der Vektor $X_o \in T_oM$ aus (1.1) schreiben als $X_o = w^\mu \, \partial_\mu\big|_o$.

Remark. Wegen $V \times \mathbb{R}^n = TV$ ist die Karte einfach $T\varphi : TU \longrightarrow TV$, das Tangential der Kartenabbildung $\varphi : U \longrightarrow V$ auf M (welches hier nicht eingeführt wurde).

Das Tangentialbündel TM ist ein Spezialfall von allgemeinen Vektorbündeln, deren Beschreibung zum Verständnis von TM selbst beitragen kann, zusätzlich nützlich ist für im Folgenden weitere Bündel sowie wichtig wird in den *Yang-Mills-Feldtheorie*n, wo die *Felder* (als Modellierung der physikalischen Teilchen) Werte in völlig anderen Vektorbündeln annehmen.

Definition. Ein *Vektor-Bündel* über einer Mannigfaltigkeit M, dem *Basisraum*, ist eine Mannigfaltigkeit E, der *Totalraum*, mit einer glatten *Bündel-Projektion* $\pi : E \longrightarrow M$ und *lokalen Trivialisierungen*

$$E|_U := \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{K}^m,$$

die gegeben sind in der Form $(\pi|_U, h_U)$, so dass auf einer *Faser* $E_o := \pi^{-1}(o) \subset E$ über $o \in M$ der zweite Teil ein linearer Isomorphismus auf $\mathbb{K}^m$ ist, insbesondere die Fasern (isomorphe) Vektorräume sind.

Die letzte Bedingung ist etwas verkürzt, da die Faser noch keine lineare Struktur trägt, und kann präzisiert werden zu der Bedingung, dass für zwei offene Teilmengen $U, V \subset M$, die o enthalten, die *Übergangsfunktionen*

$$g_V^U(o) := h_V|_{E_o} \circ h_U^{-1}|_{E_o} \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^m) \tag{1.2}$$

lineare Isomorphismen sind. Dabei sollen die Mengen U eine offene Überdeckung von M bilden.

Example. Im Fall des Tangentialbündels $E = TM$ ist die Bündelprojektion π einfach

$$TM \supset T_oM \ni X_o \longmapsto o \in M$$

und die lokalen Trivialisierungen sind gerade die Karten-Abbildungen (1.1), worin nur V durch U ersetzt, also in erster Komponente kein φ angewandt wird. Die Standardfaser ist $\mathbb{R}^n$, also $m = n$, und eine einzelne Faser notationskonform T_oM.

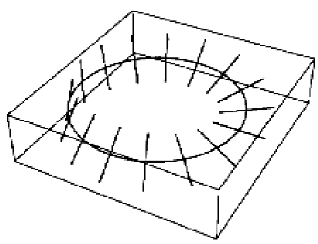
Remark. Die Übergangsfunktionen $g_V^U \in C^\infty\big(U \cap V, \mathrm{GL}(\mathbb{K}^m)\big)$ aus (1.2) erfüllen die *Kozykelbedingung*

$$g_W^V\, g_V^U = g_W^U \text{ und } g_U^U = 1_m. \tag{1.3}$$

Umgekehrt definiert ein Kozykel $\big(g_V^U\big)$ von Übergangsfunktionen mit (1.3) bereits ein Vektorbündel über M mit Standardfaser $\mathbb{K}^m$, das bis auf Isomorphie eindeutig ist. Die Übergangsfunktionen kodieren also die Struktur eines Vektorbündels – ein Resultat, das in der Algebraischen Geometrie als Zugang genutzt wird.

Example. Der einfachste Fall eines Vektorbündels ist das *triviale Bündel* $E := M \times \mathbb{K}^m$ mit Projektion auf die erste Komponente als Bündelprojektion und globaler Trivialisierung id_E.

Example. Das *Möbiusband* $E := [0,1] \times \mathbb{R}/\!\sim$ mit Twist $(0,v) \sim (1,-v)$ ist ein nicht-triviales Vektorbündel mit Bündelprojektion auf die „erste Komponente" $M := \mathbb{S}^1 = [0,1]/0{\sim}1$ und lokalen Trivialisierungen gegeben durch $h_U = \mathrm{id}_E|_{U \times \mathbb{R}}$ für $U \subset [0,1]$ offen und eingebettet in $\mathbb{S}^1$ (auch $U = [0,1] \setminus [a,b]$).



Definition. Ein weiterer Spezialfall eines Vektorbündels ist das *Kotangential-Bündel*

$$T^{\#}M = (TM)^{\#} = \bigcup_{o \in M} T_o^{\#}M$$

mit *dualen Fasern* $T_o^{\#}M = (T_oM)^{\#} = \mathrm{Hom}(T_oM, \mathbb{R})$.

Remark. Allgemein lassen sich für ein Vektorbündel E *faserweise* neue Bündel konstruieren, etwa die Summe von zwei Vektorbündeln, Tensorprodukte, dann auch das zugehörige *Endomorphismen-Bündel* $\mathrm{End}(E) = E^{\#} \otimes E$ etc. Für ein (allgemeines) *duales Bündel* $E^{\#}$ werden die lokalen Trivialisierungen zu $h_U^{\#} = \big((h_U)^{\#}\big)^{-1}$ und ebenso die Übergangsfunktionen $g^{\#}{}^U_V = \big((g^U_V)^{\#}\big)^{-1} = (g^V_U)^{\#} = (g^V_U)^t$.

Lokal lässt sich das Kotangentialbündel beschreiben über die *duale Basis* von *Kovektoren* $d\varphi^\mu := \partial_\mu^{\#}$, das heißt

$$d\varphi^\mu \frac{\partial}{\partial \varphi^\nu} = \delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}.$$

Wie oben erwähnt, wird insbesondere für diese in der Literatur oft dx^μ geschrieben, auch auf Mannigfaltigkeiten.

1.2 Schnitte und Vektorfelder

Definition. Als *Schnitt* in einem Vektorbündel E über M bezeichnet man eine (glatte) Abbildung s vom Basisraum M in das Bündel E, welche jeden Punkt $o \in M$ in seine Faser abbildet, also $s_o := s(o) \in E_o$:

$$\Gamma(E) := \Gamma(M, E) := \big\{ s \in C^\infty(M, E) \;\big|\; \pi \circ s = \mathrm{id}_M \big\}.$$

Dabei heißt $f : M \longrightarrow N$ für zwei Mannigfaltigkeiten M, N glatt, $f \in C^\infty(M, N)$, wenn für je zwei Karten φ_M, φ_N von M und N die Abbildung $\varphi_N \circ f \circ \varphi_M^{-1}$ glatt ist (in $\mathbb{R}^n$).

Remark. Die Schnitte $\Gamma(E)$ bilden einen $C^\infty(M)$-Modul mit punktweisem Produkt

$$(fs)_o := f(o)s_o \;\text{ für }\; f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \;\text{ und }\; s \in \Gamma(M, E).$$

Denn wegen $(fs)_o \in E_o$ ist fs wieder ein Schnitt.

Definition. Wichtigstes Beispiel von Schnitten sind (Tangential-)*Vektorfelder*, das heißt Schnitte im Tangentialbündel:

$$\mathscr{X}(M) := \Gamma(TM) \ni X : o \longmapsto X_o.$$

Proposition. *Lokal lässt sich ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ schreiben als*

$$X|_U = X^\mu \partial_\mu \quad \textit{mit} \quad X^\mu \in C^\infty(U, \mathbb{R}),$$

wobei $\partial_\mu \in \Gamma(TM)$ das Vektorfeld $o \mapsto \partial_\mu\big|_o$ sein soll. Das heißt $X_o = X^\mu(o)\, \partial_\mu\big|_o$ (Einsteinsche Summenkonvention verwendet).

Remark. Ist $X \in \Gamma(TM)$ und $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, so erhält man eine neue Funktion $Xf \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ durch

$$(Xf)(o) := X_o f \in \mathbb{R}.$$

Anders gesagt operieren die Vektorfelder auf den Funktionen,

$$\Gamma(TM) \ltimes C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),\ (X,f) \longmapsto Xf.$$

Wendet man auf diese Funktion ein zweites Vektorfeld Y an, so ergibt sich aber nicht wieder ein Vektorfeld, so dass auf diese Weise kein Produkt auf den Vektorfeldern zu definieren ist. Denn einerseits ist

$$X\big(Y(fg)\big) = X\big((Yf)g + f(Yg)\big) = \big(X(Yf)\big)g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) + f\big(X(Yg)\big),$$

was aber übereinstimmen müsste mit

$$\big((XY)f\big)g + f\big((XY)g\big) = \big(X(Yf)\big)g + f\big(X(Yg)\big).$$

Wegen der Symmetrie der mittleren Störterme zeigt diese Überlegung jedoch folgende

Proposition. *Durch das* Kommutator-Vektorfeld $[X,Y]$ *mit*

$$[X,Y]f := X(Yf) - Y(Xf)$$

lässt sich ein Produkt auf den Vektorfeldern definieren – welches genauer $\Gamma(TM)$ *zu einer* Lie-Algebra *macht, also nicht assoziativ ist, sondern die* Jacobi-Identität *erfüllt:*

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0.$$

1.3 Affine Zusammenhänge

Definition. Ein (affiner) *Zusammenhang* (*connection*) auf einem Vektorbündel E über M ist eine bilineare Abbildung

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E),\ (X,s) \longmapsto \nabla_X s,$$

so dass

1. ∇_X für jedes $X \in \Gamma(TM)$ eine $C^\infty(M)$-Derivation ist, das heißt

   $$\nabla_X(fs) = (Xf)s + f\nabla_X s$$

   für alle $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(E)$, und

2. $\nabla_{\bullet}\, s$ für jedes $s \in \Gamma(E)$ linear ist über $C^\infty(M)$, das heißt

   $$\nabla_{fX}\, s = f\nabla_X s$$

   für $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \Gamma(TM)$.

Remark. 1. Die beiden Bedingungen sind äquivalent dazu, dass ∇ herkommt von derivativen linearen Abbildungen

$$\nabla\colon T_oM \times \Gamma(E) \longrightarrow E_o, (X_o, s) \longmapsto \nabla_{X_o} s,$$

die „glatt zusammengesetzt“ sind (was in der lokalen Darstellung ersichtlich werden wird).

Zum Verständnis von Zusammenhängen folgende zwei Punkte:

2. Ein Zusammenhang ∇ auf einem Vektorbündel E liefert einen (fast) kanonischen Isomorphismus (also einen „Zusammenhang“) ziwschen den Fasern, und zwar durch *Paralleltransport* von $v_o \in E_o$ nach $v_p \in E_p$ längs einer Kurve γ in M von o nach p, kurz

$$E_o \cong_\gamma E_p.$$

Dieser Paralleltransport wird folgendermaßen konstruiert: Zu einer Kurve $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$ mit $\gamma(0) = o$ und $\gamma(1) = p$ sowie einem Bündelvektor $v_o \in E_o$ liefert die *Parallelitätsbedingung*

$$\nabla_{\dot\gamma} s = 0, \quad s_0 = v_o,$$

an einen Schnitt $s \in \Gamma(E)$ entlang der Kurve das Anfangswertproblem

$$\frac{dv^i}{dt} + \frac{d\gamma^\mu}{dt}\Gamma^i_{\mu j}\big(\gamma(t)\big) \cdot v^j(t) = 0, \quad v(0) = v_o,$$

und dessen Lösung s mit $v = s \circ \gamma$ den „parallel verschobenen“ Vektor $v_p := v(1)$ (Liftung).

3. Ein Zusammenhang ∇ lässt sich auch auffassen als eine Art Richtungsableitung $\nabla_X s$ von Schnitten $s \in \Gamma(E)$ längs eines Vektorfeldes $X \in \Gamma(TM)$, woher auch die Schreibweise ∇_X stammt. Dies wird ersichtlicher aus der lokalen Darstellung (1.5) und noch einmal später auf eine geometrische Weise (siehe (1.6)). Und aus diesem Grund wird ein Zusammenhang auch *kovariante Ableitung* von Vektorfeldern genannt.

4. Manchmal wird ein Zusammenhang auch in Tensorprodukt-Schreibweise eingeführt als lineare Abbildung $\nabla\colon \Gamma(TM) \otimes \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$, was dasselbe ist, da das Tensorprodukt $V \otimes W$ von zwei Vektorräumen V, W gerade die universelle Eigenschaft hat, zu jeder *bilinearen* Abbildung $V \times W \longrightarrow F$ genau eine „passende“ *lineare* Abbildung $V \otimes W \longrightarrow F$ bereitzustellen.

5. Eigentlich sind wir hier nur an Zusammenhängen auf dem Tangentialbündel $E = TM$ interessiert, welche oft einfach als Zusammenhang auf M bezeichnet werden. Die allgemeine Darstellung macht aber die unterschiedlichen Rollen der einzelnen Vektorfelder deutlicher und wird daher noch beibehalten.

Lokale Beschreibung

Zur lokalen Beschreibung eines Zusammenhanges ∇ auf einem Vektorbündel E wählen wir eine *Basis* (*frame*) im Bündel, also Schnitte $(e_i)_{i\in m} \subset \Gamma(E|_U)$, die punktweise Basis der Fasern sind, das heißt $e_0(o), \ldots, e_{m-1}(o)$ ist Basis von E_o. Dann lässt sich (über U)

$$\nabla_X e_j = \sum_{i\in m} \Gamma_{Xj}^{\,i} e_i$$

punktweise in diese Basis entwickeln und speziell für $X = \partial_\mu$ erhalten wir folgende

Proposition. *Die* Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{\mu\,j}^{\;\,i} := e^i \nabla_{\partial_\mu} e_j = e_i^\# \big(\nabla_{\partial_\mu} e_j\big) \in C^\infty(M,\mathbb{R}), \tag{1.4}$$

also die Koeffizienten der Basiszerlegung $\nabla_{\partial_\mu} e_j = \Gamma_{\mu\,j}^{\;\,i} e_i$*, bestimmen den Zusammenhang* ∇ *bereits eindeutig.*

Beweis. Mit $X = X^\mu \partial_\mu \in \Gamma(TU)$ und $s = s^j e_j \in \Gamma(E|_U)$ ist

$$\nabla_X s = \nabla_{X^\mu \partial_\mu}(s^j e_j) = X^\mu \big((\partial_\mu s^j) e_j + s^j \nabla_{\partial_\mu} e_j\big) = X^\mu \big((\partial_\mu s^i) + s^j \Gamma_{\mu\,j}^{\;\,i}\big) e_i \tag{1.5}$$

nach Definition der Koeffizienten. □

Remark. Insbesondere ist mit $\nabla_\mu := \nabla_{\partial_\mu}$ (und Summation über i auf beiden Seiten)

$$\nabla_\mu (s^i e_i) = (\partial_\mu s^i + \Gamma_{\mu\,j}^{\;\,i} s^j) e_i,$$

also $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu \; = \partial_\mu \cdot \mathbf{1}_m + \Gamma_\mu$ als Matrizen oder ausführlicher

$$\nabla_\mu s = (\partial_\mu + \Gamma_\mu\,) s = \partial_\mu s + \Gamma_\mu\, s = \begin{pmatrix} \partial_\mu s^0 \\ \vdots \\ \partial_\mu s^{m-1} \end{pmatrix} + \left(\Gamma_{\mu\,j}^{\;\,i}\right) \begin{pmatrix} s^0 \\ \vdots \\ s^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Das heißt, ∇_μ ist eine verallgemeinerte partielle Ableitung, weshalb oft kurz $\nabla_\mu s^i e_i =: s^i_{;\mu}\, e_i$ geschrieben wird, also

$$s^i_{;\mu} = \partial_\mu s^i + s^j \Gamma_{\mu\,j}^{\;\,i}.$$

Solche Notation ausschließlich in Komponenten (und Einsteinsche Summenkonvention) wird *Ricci-Kalkül* oder *Tensor-Kalkül* genannt und soll zu den einzelnen Objekten hier auch stets noch einmal angegeben werden.

Remark. Umgekehrt zur Aussage der Proposition bekommt man die Existenz von Zusammenhängen mit dieser lokalen Darstellung der Christoffel-Symbole (1.4) und glatter Partition der Eins

$$(\chi_U) \subset C^\infty(M,[0,1]), \quad \operatorname{supp} \chi_U \subset U, \;\; \sum_U{}' \chi_U = 1,$$

wobei die Summe lokal endlich sein soll. Für $X_o \in T_o M$ und $s \in \Gamma(E)$ ist $\nabla_{X_o} s$ in E_o anzugeben. Schreibe dazu $s = 1 \cdot s = \sum_U \chi_U s = \sum_U (\chi_U s)^j e_j$ und setze ${}^U\Gamma_{\mu\,j}^{\;\,i} := 0$. Die endliche Summe läuft dabei nur über die $U \subset M$, die o enthalten. Der so konstruierte Zusammenhang hat allerdings keine interessanten Eigenschaften; vergleiche jedoch den Levi-Civita-Zusammenhang in (1.7) weiter unten.

Zusammenhangs-1-Form

Neben der globalen sowie der lokalen Darstellung in Christoffel-Symbolen soll hier eine weitere (ebenfalls lokale) Beschreibung vorgenommen werden, welche vor allem aus physikalischer Sicht und zur Formulierung von Lagrange-Funktionalen nützlich ist. Doch ist diese sogenannte *Cartan-Sichtweise* auch vom mathematisch-geometrischen Standpunkt vorteilhaft, worauf hier aber nicht weiter eingegangen wird.[2]

[2] Vergleiche [Sharpe]: *Differential Geometry – Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*.

Definition. Durch $A^i_j(X) := \Gamma_{Xj}^{\ i}$, also

$$\nabla_X e_j = A^i_j(X) e_i,$$

ist (lokal) eine (globale) Matrix-wertige, genauer $\mathrm{End}(E)$-wertige 1-Form gegeben, die sogenannte *Zusammenhangs-1-Form* A zu einem Zusammenhang ∇. Das heißt

$$A \in \Gamma\big(M, TM^\# \otimes \mathrm{End}(E)\big) =: \Lambda^1\big(M, \mathrm{End}(E)\big),$$

wobei $\mathrm{End}(E)$ das punktweise gebildete Vektorbündel über M ist mit Faser $\mathrm{End}(E_o)$ über o. Anders gesagt ist $A_o(X_o) \in \mathrm{End}(E_o)$ für $o \in M$ und $X_o \in T_oM$, und für alle glatten Vektorfelder $X \in \Gamma(TM)$ und $s \in \Gamma(E)$ ist die Abbildung $M \ni o \mapsto A_o(X_o)s_o = (\nabla_X s)_o \in E$ glatt.

Differentialgeometrie

Bisher bewegte sich die Darstellung lediglich in der Differential*topologie*. Nun wollen wir zur eigentlichen Differential*geometrie* übergehen.

Definition. Eine *Metrik* $g = (g_o)$ auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine glatte Familie von nicht-ausgearteten symmetrischen Bilinearformen g_o auf T_oM für alle $o \in M$. Dabei bedeutet „glatte Familie“, dass die Funktion

$$M \ni o \longmapsto g_o(X_o, Y_o) \in \mathbb{R}$$

glatt ist für alle glatten Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(TM)$. Also ist $g \in \Gamma(M, \otimes^2 TM^\#) =: T^2M$ ein symmetrischer 2-Tensor auf M.

Remark. 1. Ist überall g_o sogar positiv definit, also ein inneres Produkt auf T_oM, so schreibt man auch $\big(\langle X \,|\, Y\rangle\big)_o = \langle X_o \,|\, Y_o\rangle_o$ und nennt die Metrik $g = \langle\,.\,|\,.\,\rangle$ eine *Riemannsche Metrik* nach dessen Habilitationsschrift [Riemann]. Im indefiniten Fall werden solche Metriken auch *semi-Riemannsche Metrik* genannt mit *Signatur* (p, q) (wobei $p + q = n$ ist) und bei Signatur $(1, q)$ auch *Lorentz-Metrik*.

2. Lokal lässt sich eine Metrik über die *Metrik-Komponenten*

$$g_{\mu\nu} := g(\partial_\mu, \partial_\nu) \in C^\infty(U, \mathbb{R}),$$

das heißt $g_{\mu\nu}(o) = g_o(\partial_\mu\big|_o, \partial_\nu|_o)$, beschreiben, nämlich $g(X,Y) = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu$ für $X = X^\mu \partial_\mu$ und $Y = Y^\nu \partial_\nu$. Also hat man auch

$$g|_U = g_{\mu\nu} d\varphi^\mu \otimes d\varphi^\nu = \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} d\varphi^\mu \vee d\varphi^\nu.$$

Beispielsweise heißt die Lorentz-Metrik auf $\mathbb{R}^4$ mit den (hier globalen) Koeffizienten $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} := \pm\delta_{\mu\nu}$ *Minkowski-Metrik*, und man schreibt $(\mathbb{R}^4, \eta) =: \mathbb{R}^{1,3}$. Als Matrix notiert ist

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Allgemeiner erklärt man auch Metriken in beliebigen Vektorbündeln. Doch wollen wir hier eine Metrik d (im topologischen Sinn) auf der Mannigfaltigkeit M konstruieren, um eben *auf ihr* Längen, Abstände und Winkel angeben zu können. Nur technisch geht man

dazu in das Tangentialbündel über. Die dortige Metrik (im obigen Sinn) g ist dabei zu sehen als ein Hilfskonstrukt, das algebraisch schöne Eigenschaften hat und aus dem die eigentliche Metrik leicht gewonnen werden kann: und zwar für $x,y \in M$ durch

$$d(x,y) := \inf\big\{L(\gamma) \;\big|\; \gamma \text{ Kurve von } x \text{ nach } y\big\},$$

wobei die *Bogenlänge* $L(\gamma)$ einer Kurve $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ bezüglich der Metrik g gegeben ist durch

$$L(\gamma) = \Big(\int_0^1 g_{\gamma(t)}\big(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\,dt\Big)^{1/2}.$$

Das Infimum wird angenommen in einer *Geodäte* (*geodesic*), welche dann den „kürzesten Weg“ zwischen den beiden Punkten beschreibt. Eine Kurve γ heißt geodätisch, falls sie die Bedingung

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \tag{1.6}$$

erfüllt. Dabei ergibt diese Bedingung in der Ebene mit dem flachen Zusammenhang einfach Geradenkurven als Geodäten (kürzeste Verbindungswege).

Definition. Ein Zusammenhang ∇ auf TM heißt *metrisch* (oder *verträglich* mit der Metrik oder *kompatibel*), wenn für alle Vektorfelder $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ gilt

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z).$$

Remark. 1. Liest man das erste X wieder als Richtungsableitung in Richtung X, hier von der Funktion $o \mapsto g_o(Y_o,Z_o) =: f(o)$, welche man ebenso ∇_X nennen könnte, so wird diese Bedingung algebraisch wieder zu einer Produktregel, nämlich des Produktes $Y \cdot Z := g(Y,Z)$, ausgeschrieben

$$X_o\big(g(Y,Z)\big) = g_o(\nabla_{X_o}Y,Z_o) + g_o(Y_o,\nabla_{X_o}Z).$$

2. Geometrisch bedeutet sie, dass jeder Paralleltransport Metrik-invariant ist, also alle Identifikationenen

$$T_oM \cong_\gamma T_pM$$

sogar Isometrien sind. Anders ausgedrückt ist für einen Vektor $X_o \in T_oM$ und seinen Paralleltransport $X_{\gamma(t)}$ entlang einer Kurve γ in M durch o überall $\|X_{\gamma(t)}\|_{\gamma(t)}$ konstant in t mit $\|X_o\|_o^2 = g_o(X_o,X_o)$ – was allerdings nur im positiv definiten Fall als Norm geschrieben wird. Also bedeutet die Bedingung „metrisch“ an einen Zusammenhang, dass jeder von ihm erzeugte Paralleltransport Längen- und Winkel-erhaltend ist (im Sinn der Metrik g).
Diese geometrische Interpretation erhält man durch Einsetzen von längs γ parallelen Vektorfeldern Y,Z, womit $\nabla_X Y = 0$ wird, also die rechte Seite verschwindet. Denn dann gilt mit $X_o := \dot\gamma(0)$ (wobei $\gamma(0) = o$ sein soll)

$$0 = X_o\big(g(Y,Z)\big) = \dot\gamma(0)\,f = (f\circ\gamma)'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \big(t \mapsto g_{\gamma(t)}(Y_{\gamma(t)},Z_{\gamma(t)})\big).$$

Die Umkehrung bekommt man durch Einsetzen von g-Orthonormalbasen.

Definition. Ein Zusammenhang ∇ auf TM heißt *symmetrisch* oder auch *torsionsfrei,* falls

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

ist für alle Vektorfelder $X,Y \in \Gamma(TM)$.

Remark. Diese Bedingung ist äquivalent zu ${\Gamma_\mu}^i_{\ j} = {\Gamma_j}^i_{\ \mu}$, weshalb von nun an die Unterscheidung der Indizes fallen gelassen werden soll und wir nur noch lateinische Buchstaben schreiben wollen. Zudem soll dann der ehemalige μ-Index hinten stehen, um eine einheitlichere Notation zu erhalten (was aber eine Frage der Konvention ist und unterschiedlich gehandhabt wird). Das heißt im symmetrischen Fall

$$d\varphi^i \nabla_{\partial_k}\partial_j =: \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}.$$

Proposition. *Besitzt M eine (semi-Riemannsche) Metrik g, so existiert genau ein metrischer und symmetrischer Zusammenhang ∇^g, der sogenannte* Levi-Civita-Zusammenhang *oder* Metrik-*Zusammenhang. Dieser ist gegeben durch die Gleichung*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla^g_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y), \end{aligned} \tag{1.7}$$

für alle Vektorfelder $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ oder lokal durch die Christoffel-Symbole

$$\Gamma^i_{jk} = \tfrac{1}{2} g^{il}\big(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}\big). \tag{1.8}$$

Remark. 1. Die definierende[3] Gleichung (1.7) enthält zwei Spezialfälle: für g-orthogonale Vektorfelder X,Y,Z entfällt die erste Hälfte der Summe und für sogenannte *holonome Vektorfelder* die zweite (wie in (1.8)). Dabei heißen Vektorfelder $X_1,\dots,X_n$ holonom, wenn lokal $X_j = \partial/\partial\varphi^j$ ist für eine Karte φ von M. Insbesondere ist dann $[X_i,X_j] = 0$ wegen der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen nach Schwarz, was auf (1.8) führt.

2. In der lokalen Beschreibung (1.8) des Levi-Civita-Zusammenhangs sind g^{ij} die Koeffizienten der dualen Metrik $g^\#$, welche gegeben ist durch

$$g^\#\big(g(X,\centerdot),g(Y,\centerdot)\big) = g(X,Y),$$

das heißt $g^{ij} = g^\#(dx^i,dx^j)$. Diese Koeffizienten erfüllen dann einfach die Bedingung

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k,$$

das heißt, die „Matrix“[4] mit Koeffizienten g^{ij} ist die Inverse zu der mit Koeffizienten g_{jk}, weshalb auch oft von der „inversen Metrik g^{ij}“ gesprochen wird.

3. Kurz gelesen, ist der Levi-Civita-Zusammenhang (lokal) so etwas wie die logarithmische Ableitung der Metrik, nämlich

$$\nabla^g \doteq g^{-1}dg = \frac{dg}{g} = d(\ln g).$$

Beweis der Proposition. Soll $\nabla = \nabla^g$ metrisch sein, so gilt

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) &= g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z), \\ Yg(Z,X) &= g(\nabla_Y Z,X) + g(Z,\nabla_Y X), \\ Zg(X,Y) &= g(\nabla_Z X,Y) + g(X,\nabla_Z Y). \end{aligned}$$

[3] Die Gleichung ist definierend, weil g nicht ausgeartet sein soll.
[4] Genauer müsste es heißen $A^{-1} = B$ mit $A^i_j := g_{ij}$ und $B^i_j := g^{ij}$.

Bildet man also $Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y)$, so lassen sich rechts diagonal jeweils zwei Terme zusammenfassen, etwa $g(\nabla_Y Z,X)-g(X,\nabla_Z Y X)=g(\nabla_Y Z-\nabla_Z Y,X)=g([Y,Z],X)$ wegen geforderter Symmetrie von ∇, und man erhält zusammen

$$g(\nabla_X Y+\nabla_Y X,Z)+g([Y,Z],X)+g([X,Z],Y).$$

Addiert man nun die restlichen Terme $g([X,Y],Z)-g([Y,Z],X)+g([Z,X],Y)$ aus der Behauptung, so heben sich die jeweils letzten Summanden auf und es bleibt – wieder wegen Symmetrie

$$g(\nabla_X Y+\nabla_Y X,Z)+g([X,Y],Z)=g(\nabla_X Y+\nabla_Y X+\nabla_X Y-\nabla_Y X,Z)=2g(\nabla_X Y,Z).$$

$\square$

1.4 Krümmung

Definition. Die (Riemannsche) *Krümmung* (*curvature*) eines Zusammenhangs ∇ auf einer Mannigfaltigkeit ist definiert als

$$R(X,Y)Z:=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z$$

für Vektorfelder $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$, also punktweise eine trilineare Abbildung

$$R:T_oM\times T_oM\times T_oM\longrightarrow T_oM,$$

oder auch $R(X,Y)\in\mathrm{End}(T_oM)$, das heißt

$$R:T_oM\times T_oM\longrightarrow\mathrm{End}(T_oM)$$

ist ein „matrixwertiger 2-Tensor“, der *Krümmungs-Tensor* oder *Riemann-Tensor*.

Remark (Geometrische Interpretation[5]). Diese Definition ist eine Verallgemeinerung von Hyperflächen in $\mathbb{R}^n$, genauer sogar von Flächen in $\mathbb{R}^3$, wo „elementare“ Krümmungsbegriffe gerade aus diesem (technischen) Tensorobjekt ableitbar sind: Dort ist die sogenannte zweite Fundamentalform $II(X,Y)=\langle LX\mid Y\rangle$ mit $LX=\nabla_X N\in T_oM$ und dem *Normaleneinheitsfeld* N zu X. Nun ist

$$R(X,Y)Z=\langle LY\mid Z\rangle LX-\langle LX\mid Z\rangle LY$$

und (punktweise) die

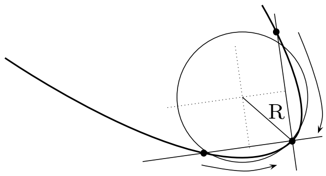
- *totale Krümmung* $K=\det L=\langle R(X,Y)Y\mid X\rangle=\prod\lambda_j(L)$,
- *mittlere Krümmung* $H=\operatorname{tr}L=\sum\lambda_j(L)$,
- *Haupt-Krümmung*en $\lambda_j(L)$, die Eigenwerte von L.

Dabei sind die Hauptkrümmungen $\lambda_j(L)$ gegeben als *Schnitt-Krümmung*en, das heißt als Krümmung der Kurven γ_j, welche durch Schnitt der Fläche mit den Ebenen entstehen, die von den jeweiligen sogenannten *Krümmungsvektoren*, also den zugehörigen Eigenvektoren

[5]Siehe dazu auch [Lang, Seite 235] sowie [Hicks, Seite 154].

$v_j(L)$, und dem Normalenvektor aufgespannt werden. Und die Krümmung einer Kurve γ schließlich erhält man als reziproken Radius R des sogenannten *Berührkreis*es,

$$K_\gamma(t) = \frac{1}{R(t)} = \|\ddot{\gamma}(t)\|,$$



welcher als Limes an der Stelle t infinitesimal wie Tangenten konstruiert wird. Dieser Radius stimmt gerade mit der Norm der zweiten Ableitung der Kurve überein. (Genauer ist das der Krümmungs*betrag* der Kurve, unabhängig von der Durchlaufrichtung.)

Proposition. *Wieder punktweise erhalten wir*

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{End}(TM))$$

als $C^\infty(M)$-lineare Abbildung („Tensor“*), die* schiefsymmetrisch *ist.*

Beweis. Nach Definition ist R $\mathbb{R}$-linear und

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z,$$

so dass Homogenität bezüglich $f \in C^\infty(M)$ nur in der ersten und dritten Variablen nachzurechnen ist. Wegen

$$[fX,Y] = (fX)Y - Y(fX) = f(XY) - (Yf)X - f(YX) = f[X,Y] - (Yf)X$$

und $\nabla_{fX} = f\nabla_X$ ist dann tatsächlich

$$\begin{aligned} R(fX,Y)Z &= f\nabla_X\nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]}Z + (Yf)\nabla_X Z \\ &= fR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned} R(X,Y)(fZ) &= \nabla_X\big((Yf)Z + f\nabla_Y Z\big) - \nabla_Y\big((Xf)Z + f\nabla_X Z\big) - ([X,Y]f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= (XYf)Z + (Yf)\nabla_X Z + (Xf)\nabla_Y Z + f\nabla_X\nabla_Y Z \\ &\quad - (YXf)Z - (Xf)\nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z \\ &\quad - ([X,Y]f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= fR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

□

Definition. Dann ist wieder R eindeutig bestimmt durch die Tensor-Koeffizienten

$$R^i_{jkl} := d\varphi^i R(\partial_k,\partial_l)\partial_j,$$

also $R(\partial_k,\partial_l)\partial_j = R^i_{jkl}\partial_i$.

Remark. In *Cartan-Sichtweise* oder Formenschreibweise ist mit

$$R(X,Y)\partial_j =: F^i_j(X,Y)\partial_i \tag{1.9}$$

eine (glatte) 2-Form[6] F gegeben, die *Krümmungs-2-Form* F, und es gilt die Zweite *Cartan-Strukturgleichung*

$$F^i_j = dA^i_j + A^i_k \wedge A^k_j,$$

was physikalisch als *Feldstärke* $F = dA + A\wedge A = (d+A)A =: d_A A$ gelesen wird, nämlich die kovariante Ableitung der Zusammenhangs-1-Form A. Das heißt, die (geometrische) Krümmung R „ist" die (physikalische) Feldstärke F (via (1.9)).

Beweis. Mit $\nabla_X \partial_j = A^i_j(X)\partial_i$ ist

$$\begin{aligned} F^i_j(X,Y)\partial_i &= \nabla_X\nabla_Y\partial_j - \nabla_Y\nabla_X\partial_j - \nabla_{[X,Y]}\partial_j \\ &= \nabla_X\big(A^i_j(Y)\partial_i\big) - \nabla_Y\big(A^i_j(X)\partial_i\big) - A^i_j([X,Y])\partial_i \\ &= X\big(A^i_j(Y)\big)\partial_i + A^i_j(Y)A^k_i(X)\partial_k - Y\big(A^i_j(X)\big)\partial_i - A^i_j(X)A^k_i(Y)\partial_k - A^i_j([X,Y])\partial_i \\ &= dA^i_j(X,Y)\partial_i + (A^i_k\wedge A^k_j)\partial_i \end{aligned}$$

durch Tausch der Summationsindizes i und k im letzten Schritt. □

Corollary. *Mit* $A^i_j(X)\partial_i = A^i_j(d\varphi^s(X)\partial_s)\partial_i = d\varphi^s(X)A^i_j(\partial_s)\partial_i = d\varphi^s(X)\nabla_{\partial_s}\partial_j = d\varphi^s(X)\Gamma^i_{js}\partial_i$ *lässt sich auch* $A^i_j = \Gamma^i_{js}d\varphi^s$ *schreiben, so dass*

$$\begin{aligned} R^i_{jkl} &= \big(dA^i_j + \Gamma^i_{rs}d\varphi^s\wedge\Gamma^r_{jt}d\varphi^t\big)(\partial_k,\partial_l) \\ &= \partial_k A^i_j(\partial_l) - \partial_l A^i_j(\partial_k) - A^i_j([\partial_k,\partial_l]) + \Gamma^i_{rk}\Gamma^r_{jl} - \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{jk} \end{aligned}$$

ist, das heißt wegen $[\partial_k,\partial_l] = 0$

$$R^i_{jkl} = \partial_k\Gamma^i_{jl} - \partial_l\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{rk}\Gamma^r_{jl} - \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{jk}.$$

Definition. Nun definiert man noch die *Ricci-Krümmung* Ric als sogenannten *Ricci-Tensor* mit den Koeffizienten

$$R_{jk} := R^i_{jki}.$$

Global geschrieben heißt das, $R_{jk} = \mathrm{Ric}(\partial_j,\partial_k)$ und

$$\mathrm{Ric}(Y,Z) = \mathrm{tr}\,R(Y,\,\cdot\,)Z = \mathrm{tr}\big(X\mapsto R(Y,X)Z\big),$$

wobei die Spur punktweise zu lesen ist, auf jedem Tangentialraum T_oM. Desweiteren definieren wir die *Skalare Krümmung* Scal durch Kontraktion des Ricci-Tensors,

$$\mathrm{Scal} := R^j_j := g^{jk}R_{jk},$$

wobei allgemein das sogenannte *Hinaufziehen* (*raising*) bzw. *Herunterziehen* (*lowering*) von Indizes im Ricci-Kalkül auf diese Weise definiert ist: Zu einem Tensor T_i (hier ein Vektor) soll (der duale) Tensor $T^i := g^{ij}T_j$ sein, das heißt die „Multiplikation" mit (inverser) Metrik oder genauer der Übergang $T\mapsto g(T,\,\cdot\,)$.

[6] alternierend und linear

In globaler Fassung ist die Skalare Krümmung Scal, die im Tensor-Kalkül oft auch $R = R_j^j$ genannt wird (was vorsichtig von der Bezeichnung des Krümmungstensors zu unterscheiden ist),

$$\mathrm{Scal}(o) = \mathrm{tr}\, S_o$$

mit dem Operator S_o, der eindeutig gegeben ist als Kovarianz-Operator der Bilinearform $\mathrm{Ric}(X,Y) =: g(X,SY)$ (an $o \in M$), also genauer $S_o \in \mathrm{End}(T_oM)$ oder $S \in \Gamma(M, \mathrm{End}(TM))$. Man beachte, dass im Fall von metrischen Zusammenhängen der Ricci-Tensor Ric symmetrisch ist.

Remark. Durch zweimalige Spurbildung wird letztlich die Skalare Krümmung zu einem „Skalar“, das heißt unter Koordinatenwechsel $x \mapsto x' = \phi(x)$ transformiert sich das Objekt in lokaler Darstellung als

$$\mathrm{Scal}(x) = \mathrm{Scal}'(x') = \big(\mathrm{Scal}' \circ \phi\big)(x).$$

Diese Eigenschaft überträgt sich auf die Operation der zugehörigen Symmetriegruppe und wird so eine Invarianz der im folgenden beschriebenen Aktion unter dieser Gruppen-Operation erzeugen, welche für die physikalische Beschreibung essentiell ist. Vergleiche die Bemerkung auf Seite 16.

2 Feldtheorie der Gravitation

Wir wollen nun die *Feldtheorie* der *Gravitation* beschreiben, die *Einstein-Hilbert-Theorie*: *Albert Einstein* und *David Hilbert* entdeckten fast zeitgleich 1915/16 [Todorov] diejenige invariante Aktion, deren Minima gerade die Einstein-Gleichungen erfüllen.

2.1 Einstein-Hilbert-Aktion und Einstein-Feldgleichungen

Beginnend mit einer Metrik g auf der Raumzeit M haben wir nun den zugehörigen Levi-Civita-Zusammenhang ∇^g konstruiert und dessen Krümmungstensoren R^g, Ric^g und Scal^g und erhalten damit als Eich-invariante[7] *Aktion* oder *Wirkung* auf den *Gravitations-Felder*n

$$\mathscr{M} = \{\text{Lorentz-Metriken } g \text{ auf } M\}$$

der Lorentz-Metriken auf der Raumzeit, welche die Gravitation durch *Raumzeit-Krümmung* modellieren, die *Einstein-Hilbert-Aktion*[8] $S_{\mathrm{EH}} : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$S_{\mathrm{EH}}(g) := \int_M \mathrm{Scal}^g \, dV_g.$$

Nach dem *Prinzip der minimalen Wirkung* für „echte“, sprich *physikalische Felder* führt diese durch Variation der Feldvariablen g,

$$S'_{\mathrm{EH}}(g)h = -\int_M \langle \mathrm{Ric}^g - \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}^g \cdot g | h \rangle dV_g \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für alle } h \in T_g\mathscr{M},$$

[7] siehe Bemerkung unten

[8] Zur Einstein-Hilbert-Aktion siehe im Anhang den Vergleich mit üblichen Aktionen (Seite 18).

(siehe hierzu [Bertschinger, Seite 15] oder [Ammann/Bär]) auf die *Feldgleichungen* der Gravitation, die *Einstein-Gleichungen*

$$E^g := \mathrm{Ric}^g - \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}^g \cdot g \overset{!}{=} 0.$$

Hier heißt $E = E^g$ *Einstein-Tensor* oder *Einstein-Krümmung*. Die wirklichen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie erhält man allerdings erst, wenn die Wirkung der Metrik g auf die *Materie-Felder* berücksichtigt wird. In der üblichen Aktion dieser Materiefelder ϕ (je nach Theorie)

$$S^g_{\mathrm{M}}(\phi) = \int_M \mathscr{L}^g_{\mathrm{M}}(\phi)\,dV_g$$

ist nun die Metrik g zu berücksichtigen, die noch die Einstein-Gleichungen erfüllen muss. Die volle Aktion $S(g,\phi) := S_{\mathrm{EH}}(g) + S^g_{\mathrm{M}}(\phi)$ führt dann für g auf die Feldgleichungen (in Koordinaten und mit Konstanten)

$$E_{jk} = R_{jk} - \frac{R}{2} g_{jk} \overset{!}{=} 8\pi \frac{G}{c^4} T_{jk},$$

wobei G die *Gravitationskonstante*, c die *Lichtgeschwindigkeit* und T_{jk} der *Energie-Impuls-Tensor* (*stress-energy*) ist, welcher die Masseverteilung auf der Raumzeit angibt. Hier schreiben wir wieder R für die Skalare Krümmung, um die übliche Form der Gleichungen zu erhalten.

Remark. Die Feldgleichungen beschreiben jedoch noch immer nicht die physikalischen Felder. Die Formulierung im *Lagrange-Kalkül* hat nämlich zur Handhabung der Rechnung verschiedene Symmetrien unterschlagen, die üblicherweise durch die Operation einer *Symmteriegruppe* (auch *Eich-Gruppe* (*gauge group*)) $\mathscr{G}$ auf dem Feldern $\mathscr{M}$ ausgedrückt werden. Um also eine Abbildung

$$S_{\mathrm{EH}} : \mathscr{M}/\mathscr{G} \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf dem wirklichen Feldraum $\mathscr{M}/\mathscr{G}$ zu erhalten, muss die *Lagrange-Aktion* S_{EH} invariant sein unter der Aktion der Gruppe $\mathscr{G}$. In diesem Fall ist

$$\mathscr{G} = \mathrm{Diff}^+(M)$$

die Gruppe der orientierungserhaltenden *Diffeomorphismen* auf der Raumzeit M, welche durch *Pullback* auf den Metriken operiert:

$$\mathscr{G} \ltimes \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M},\ (\phi, g) \mapsto \phi^* g$$

(siehe folgende Tabelle). Für die *Eich-Invarianz* (*gauge invariance*) oder *Kovarianz* der Einstein-Hilbert-Aktion unter dieser Gruppen-Operation, das heißt

$$S(\phi^* g) = S(g) \quad \text{oder kurz} \quad \phi^* S = S,$$

genüge hier eine Auflistung der transformierten differentialgeometrischen Objekte. Ist $g' = (\phi^{-1})^* g$ und $\Phi := T_o\phi$, also $\Phi^{-1} = T_{\phi(o)}(\phi^{-1})$, so gilt:

Transformiertes Objekt	**Transformationsformel**
Metrik g'	$g'_o = \big((\phi^{-1})^* g\big)_o(X,Y) = g_{\phi(o)}(\Phi X, \Phi Y)$
Levi-Civita-Zusammenhang $\nabla^{g'}$	$(A'_o(X)Y = \Phi^{-1} A_{\phi(o)}(\Phi X)\Phi Y + \Phi^{-1} d_o \Phi(X,Y)$
Riemann-Tensor $R^{g'}$	$F'_o(X,Y) = \Phi^{-1} F_{\phi(o)}(\Phi X, \Phi Y)\Phi$
Skalare Krümmung *Scal*$^{g'}$	$\mathrm{Scal}' = \mathrm{Scal} \circ \phi$
Volumen-Element $dV_{g'}$	$dV_{g'} = \lvert\det \Phi\rvert \sqrt{\lvert\det g\rvert \circ \phi}\,dx$

Dann liefert die Trafo-Formel die behauptete Invarianz der Aktion:

$$S_{\mathrm{EH}}(g') = \int_M \mathrm{Scal}^{g'}\, dV_{g'} = \int_M \big(\mathrm{Scal}^g \sqrt{|\det g|}\big) \circ \phi\, |\det \Phi| dx = S_{\mathrm{EH}}(g).$$

Genauere Ausführungen zu Invarianz und Symmetriegruppe finden sich in der separaten (englischen) Ausarbeitung *Symmetries of the Einstein-Hilbert action* [Eckert].

2.2 Lösungen der Feldgleichungen

Im weiteren Verlauf des Seminars sollen nun Lösungen g der Einstein-Gleichungen angegeben werden, das heißt Metriken oder *Einstein-Felder* bzw. Gravitations-*Felder* jeweils für bestimmte Situationen von Raumzeit M und Energie- bzw. Masse-Verteilung T_{jk} (Energie-Impuls-Tensor). Diese sind im einzelnen:

Name der Metrik	**Raumzeit-Situation**
Robertson-Walker	$M = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ *homogenes Universum* mit konstanter Expansion
Friedman-Lemaître	Erweiterung auf nicht-konstante Expansion
Schwarzschild	$M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^\times \subset \mathbb{R}^4$ *Schwarzes Loch*
Kerr	Erweiterung um eine Rotationssymmetrie

Zudem soll gezeigt werden, dass im Fall $M = \mathbb{R}^{1+1}$ *alle* Metriken die Einstein-Gleichungen erfüllen, was zwar nur ein *toy model* ist, doch spielt dieses Resultat in der String-Theorie wiederum eine wichtige Rolle.

Zuletzt soll eine Einführung gegeben werden in *Spinor-Felder*, welche für die Formulierung von Super-Gravitationstheorien nötig sind.

A Vergleich von Einstein-Hilbert-Aktion und üblichen Aktionen

Bei den üblichen *bosonischen* Aktionen wie der *Yang-Mills-Aktion* wird die (kovariante) Ableitung $DA = D_A A$ des Feldes A gebildet und dessen Länge über die Raumzeit integriert:

$$A \mapsto DA \mapsto \int_M \|DA\|^2 = S_{\mathrm{YM}}(A).$$

Im Gegensatz dazu wird bei der Einstein-Hilbert-Aktion aus dem Feld g erst der Levi-Civita-Zusammenhang Γ gebildet, der als Zusammenhangs-1-Form nun dem *Yang-Mills-Feld A* entspricht. Jedoch wird nun nicht die Norm dessen (kovarianter) Ableitung benutzt, sondern der skalare Krümmungstensor aus $R = D\Gamma$ gebildet und integriert:

$$g \mapsto \Gamma \sim \frac{dg}{g} \mapsto R = D\Gamma \mapsto \mathrm{Scal} \mapsto \int_M \mathrm{Scal} = S_{\mathrm{EH}}(g).$$

Diese Konstruktion ist einerseits analog, andererseits jedoch auch wiederum verschieden: es treten nun zweite Ableitungen des Feldes auf und es wird auch nicht die übliche „Norm“ integriert sondern ein skalarer Tensor. Um diese Unterschiede zu überwinden und eine einheitliche Beschreibung aller (bosonischen) Felder zu finden, einschließlich des Gravitons, führt Alain Connes zusammen mit John Lott und Ali H. Chamseddine einen verallgemeinerten *Dirac-Operator* $\not{D}_g$ ein, der beide bosonischen Theorien einbettet in eine eigentlich von den *Fermionen*-Feldern bekannte Beschreibung. Siehe hierzu [Tolksdorf].

Literatur

[Ammann/Bär] Bernd Ammann & Christian Bär, *The Einstein-Hilbert Action as a Spectral Action*, in: Florian Scheck, Wend Werner & Harald Upmeier, Noncommutative Geometry and the Standard Model of Elementary Particle Physics, LNP **596**, Springer, Berlin 2002. `http://users.math.uni-potsdam.de/~baer/preprints/hessel2.pdf`

[Bertschinger] Edmund Bertschinger, *Symmetry Transformations, the Einstein-Hilbert Action, and Gauge Invariance*, Lecture notes, 2002. `http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Physics/8-962Spring2002/6D03860E-9C15-4EB8-B96A-8B720D68EFE8/0/gr5.pdf`

[Bröcker/Jänich] Theodor Bröcker & Klaus Jänich, *Einführung in die Differentialtopologie*, HT **143**, Springer, Berlin 1990.

[Eckert] Thomas Eckert, *Symmetries of the Einstein-Hilbert action*, Seminar talk, Marburg 2005. `http://www.mathematik.uni-marburg.de/~eckert/Scripts/SymmetriesEH.pdf`

[Hicks] Noel J. Hicks, *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand Reinhold, London 1971.

[Lang] Serge Lang, *Fundamentals of Differential Geometry*, GTM **191**, Springer, Berlin 1999.

[Jänich] Klaus Jänich, *Vektoranalysis*, Springer, Berlin 1992.

[Riemann] Bernhard Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Habilitationsschrift), Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **13**, 1854.
`http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Geom/Geom.pdf`

[Sharpe] Richard W. Sharpe, *Differential Geometry – Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, GTM **166**, Springer, New York 1997.

[Todorov] Ivan T. Todorov, *Einstein and Hilbert: The Creation of General Relativity*, Colloquium talk, 2005.
`http://arxiv.org/pdf/physics/0504179`

[Tolksdorf] Jürgen Tolksdorf, *The Einstein-Hilbert-Yang-Mills-Higgs action and the Dirac-Yukawa operator*, J. Math. Phys. **39**, No.4, 2213-2241 (1998).
`http://arxiv.org/pdf/hep-th/9612149`

Index

Aktion **15**
  Einstein-Hilbert-∼ **15**
  Lagrange-∼ **16**
  Yang-Mills-∼ **18**

Bündel, duales ∼ **5**
  Endomorphismen-∼ **5**
  Kotangential-∼ **5**
  ∼-Projektion **4**
  Tangential-∼ **3**
  triviales ∼ **4**
  Vektor-∼ **4**
Basis, *duale* ∼ **5**
  Tangentialraum-∼ **3**
  Vektorbündel-∼ **7**
Basisraum **4**
Berührkreis **13**
Bogenlänge **10**
Bosonen **18**

Cartan-Sichtweise **8**, **14**
Cartan-Strukturgleichung **14**
Christoffel-Symbole **8**
connection (Zusammenhang) **6**
curvature (Krümmung) **12**

Derivation **2**
Diffeomorphismen **16**
Dirac-Operator **18**
duale Basis **5**

Eich-Gruppe **16**
Eich-Invarianz **16**
Einstein, Albert ∼ **15**
Einstein-Felder **17**
Einstein-Gleichungen 15, **16**, 17
Einstein-Hilbert-Aktion **15**, 16
Einstein-Hilbert-Theorie **15**
Einstein-Krümmung **16**
Einstein-Tensor **16**
Einsteinsche Summenkonvention **3**, 8
Energie-Impuls-Tensor **16**, 17

Faser **4**
  duale ∼ **5**
faserweise **5**
Felder **4**
  Einstein-∼ **17**
  Gravitations-∼ **15**, 17
  Materie-∼ **16**
  physikalische ∼ **15**
  Spinor-∼ **17**
  Vektorfelder **5**
  Yang-Mills-∼ **18**
Feldgleichungen **16**
  Einstein- **16**
Feldstärke **14**
Feldtheorie **15**
  Einstein-Hilbert-∼ **15**
  Yang-Mills-∼ **4**
Fermionen **18**
frame (Vektorbündel-*Basis*) **7**
Friedman-Lemaître-Metrik **17**

gauge group (Eich-Gruppe) **16**
gauge invariance (Eich-Invarianz) **16**
Geodäte **10**
geodesic (Geodäte) **10**
Gravitation **15**
Gravitations-*Felder* **15**
Gravitationskonstante **16**

Haupt-*Krümmung* **12**
Herunterziehen **14**
Hilbert, David ∼ **15**
Hinaufziehen **14**
holonome *Vektorfelder* **11**
homogenes Universum **17**

Jacobi-Identität **6**

Kerr-Metrik **17**
Kommutator-Vektorfeld **6**
kompatibler *Zusammenhang* **10**
Kotangential-Bündel **5**
kovariante Ableitung **7**
Kovarianz **16**
Kovektoren **5**
Kozykelbedingung **4**
Krümmung **12**, 14
  Einstein-∼ **16**
  Haupt-∼ **12**

mittlere ∼ **12**
Raumzeit-∼ **15**
Ricci-∼ **14**
Riemann-Tensor **12**
Skalare ∼ **14**
totale ∼ **12**
Krümmungs, ∼-2-Form **14**
∼-Tensor **12**

Lagrange-Aktion **16**
Lagrange-Kalkül **16**
Levi-Civita-Zusammenhang 8, **11**, 15, 17
Lichtgeschwindigkeit **16**
Lie-Algebra **6**
lokale Trivialisierungen **4**
Lorentz-Metrik **9**, 15
lowering (Herunterziehen) **14**

Möbiusband **4**
Mannigfaltigkeit **2**
Materie-*Felder* **16**
Metrik **9**, 15, 17
Friedman-Lemaître-∼ **17**
Kerr-∼ **17**
Lorentz-∼ **9**
Minkowski-∼ **9**
Riemannsche ∼ **9**
Robertson-Walker-∼ **17**
Schwarzschild-∼ **17**
semi-Riemannsche ∼ **9**
Metrik-*Zusammenhang* **11**
metrischer *Zusammenhang* **10**
Minkowski-Metrik **9**
mittlere *Krümmung* **12**

Normaleneinheitsfeld **12**

Parallelitätsbedingung **7**
Paralleltransport **7**
Prinzip der minimalen Wirkung **15**
Pullback **16**

raising (Hinaufziehen) **14**
Raumzeit **2**, 15, 17
Raumzeit-*Krümmung* **15**
Ricci-*Krümmung* **14**
Ricci-Kalkül **8**, 14
Ricci-Tensor **14**
Riemann-Tensor **12**, 17
Riemannsche *Metrik* **9**
Robertson-Walker-Metrik **17**

schiefsymmetrisch **13**
Schnitt **5**
Schnitt-Krümmung **13**
Schwarzes Loch **17**
Schwarzschild-Metrik **17**
semi-Riemannsche *Metrik* **9**
Signatur **9**
Skalare Krümmung **14**, 16, 17
space-time (Raumzeit) **2**
Spinor-Felder **17**
stress-energy (Energie-Impuls-Tensor) **16**
Strukturgleichung, *Cartan-*∼ **14**
Summenkonvention, *Einsteinsche* ∼ **3**
symmetrischer *Zusammenhang* **10**
Symmteriegruppe **16**

Tangential-Bündel **3**
Tangentialraum **2**
Tensor **13**
Tensor-Kalkül **8**
torsionsfreier *Zusammenhang* **10**
totale *Krümmung* **12**
Totalraum **4**

Übergangsfunktionen **4**

Vektor-*Bündel* **4**
Vektorfelder **5**
holonome ∼ **11**
Kommutator **6**
Normaleneinheitsfeld **12**
verträglicher *Zusammenhang* **10**
Volumen-Element **17**

Wirkung **15**

Yang-Mills-*Aktion* **18**
Yang-Mills-Feldtheorie **4**

Zusammenhang **6**
kompatibler ∼ **10**
Levi-Civita-∼ **11**
Metrik-∼ **11**
metrischer ∼ **10**
symmetrischer ∼ **10**
torsionsfreier ∼ **10**
verträglicher ∼ **10**
Zusammenhangs-1-Form **9**