Determinanten-Bündel und Dirac-Operator auf Hilbert-Grassmann Mannigfaltigkeiten

Diplomarbeit

von

Thomas Eckert

vorgelegt am

Fachbereich Mathematik
Philipps-Universität Marburg

am

10. Januar 2001

Anleitung

Prof. Dr. Harald Upmeier

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Im Rahmen der geometrischen Analysis beschäftigt sich diese Arbeit mit dem *Raum der holomorphen Schnitte* in einem unendlich-dimensionalen *Determinantenbündel*. Um dieses über einer *Grassmann-Mannigfaltigkeit* von Unterräumen eines gegebenen unendlich-dimensionalen linearen Raumes konstruieren zu können, müssen diese Unterräume noch eine verallgemeinerte Determinantenkonstruktion zulassen. Diese Bedingung führt auf die sogenannten *restringierten* Grassmann-Mannigfaltigkeiten, wie sie etwa von Segal und Wilson in [10] oder Mickelsson in [5] behandelt werden.

Die Motivation rührt von der mathematischen Physik her, insbesondere der String-Theorie, wo verstärkt die unendlich-dimensionale Situation auftritt in den Schleifengruppen, die eng mit den physikalischen Strings und ihrer Reparametrisierungsgruppe zusammenhängen. Zudem lässt sich nach Pressley und Segal [7] der Raum der holomorphen Schnitte identifizieren mit dem Fockraum, und zwar sowohl dem fermionischen, einer äußeren Algebra, als auch dem bosonischen, also einer Summe Symmetrischer Algebren.

Die Untersuchung gewinnt aber aufgrund ihrer Komplexität und in gewissem Sinne Universalität – die Grassmannsche ist ein „Klassischer“ Symmetrischer Raum und das Determinantenbündel das „Kanonische“ Bündel einer Mannigfaltigkeit – schnell ein eigenes mathematisches Interesse, auch in ihrem Umfeld. So ist genauer der Fockraum nur eine dichte Untermenge der holomorphen Schnitte, nämlich die L^2-Schnitte bezüglich eines Maßes, das Pickrell [6] auf der Grassmannschen als ein Zylindermaß durch ein projektives Verfahren konstruiert. Bei der Verallgemeinerung auf physikalisch relevante Raum-Zeit-Dimensionen werden außerdem neue Determinanten-Konstruktionen benötigt, wie sie etwa von Cartier untersucht werden [1]. Des Weiteren ist der Raum der holomorphen Schnitte im dualen Determinantenbündel die fundamentale Darstellung einer für die Theorie der Schleifengruppen überaus bedeutenden Gruppenerweiterung der restringierten Gruppe $\mathrm{GL}_2(H)$ invertierbarer Operatoren eines Hilbertraumes. Diese steht in engem Zusammenhang mit der restringierten *Hilbert-Schmidt-Grassmannschen* $\mathrm{Gr}_2(H)$: Sie überlagert diese als ein Gruppenbündel durch transitive Operation. Der Stabilisator K dieser Aktion ist nicht trivial und man erhält eine *homogene* Beschreibung der Grassmannschen als den Gruppenquotienten

$$\mathrm{Gr}_2(H) = \mathrm{GL}_2(H)/K.$$

Diese Darstellung ist für die Untersuchung äußerst nützlich, da erstens die Mannigfaltigkeit jetzt bis auf Äquivalenz bezüglich K beinahe eine Gruppenstruktur besitzt und sie zweitens eine Gruppenaktion trägt, die es ermöglicht, lokale Situationen einfach zu translatieren. So ist oft überhaupt nur eine lineare Untersuchung nötig, nämlich in den Karten.

Der Großteil der vorliegenden Arbeit ist daher auch der homogenen Beschreibung aller auftretenden Räume gewidmet, das heißt ihrer Darstellung als Quotient aus einer Liegruppe. So kann auch das Determinantenbündel als Assoziiertes Geradenbündel zu dem Gruppenbündel beschrieben werden, unter dem die Grassmann-Mannigfaltigkeit homogen ist. In dieser Form können dann die holomorphen Schnitte besonders einfach beschrieben werden. Im Aufbau der Arbeit ist jedem dieser Objekte ein eigenes Kapitel gewidmet.

Im ersten Kapitel wird die Theorie der Hauptfaserbündel und ihrer Assoziierten Bündel ausgeführt, soweit sie für die Untersuchung relevant ist. In verschiedenen Abschnitten werden genau die Strukturen behandelt, die die Objekte später aufweisen: Allgemeine Hauptfaserbündel sowie solche mit eigener Gruppenstruktur, Assoziierte Bündel und schließlich holomorphe Schnitte.

Damit ist das zweite Kapitel bereits festgelegt auf die Beschreibung der Grassmann-Mannigfaltigkeiten. Wie schon in diesem Plural anklingt, werden Schritt für Schritt verschiedene Grassmannsche beschrieben mit dem Ziel der Hilbert-Schmidt-Restringierten. Sie besitzt ein Determinantenbündel, welches eng zusammenhängt mit der Fredholm-Determinante für Operatoren, deren Abweichung von der Identität nur Spurklasse ist. Die Hilbert-Schmidt-Grassmannsche teilt aber viele Eigenschaften mit allgemeiner beschreibbaren Versionen, welche in physikalischen Theorien, die nicht mehr nur *toy model* sein sollen, auch wirklich benötigt werden [5, Kapitel 6]. Die Strategie wird sein, möglichst wenig spezielle Eigenschaften zu verwenden, wodurch viele Argumentationen übersichtlicher werden als in der Literatur. Für die Hilbert-Schmidt-Grassmannsche konstruieren wir dann eine transitive Gruppenaktion, die „determinantenfähig“ ist.

Das zugehörige Determinantenbündel soll dann im dritten Kapitel konstruiert werden. Hier wird die Struktur der Untersuchung bestimmt von der Rechtfertigung einer abstrakten Definition des Determinantenbündels, bei der mit dem Det-Konstrukt als oberste äußere Potenz der Fasern der geometrische Aspekt in der zugehörigen Aktion der Strukturgruppe verschwindet. Dies hat aber zwei Vorteile: Zum einen eine sehr einfache Beschreibung des Bündels und zum anderen die Möglichkeit, sich auf die Fredholm-Determinante als schon existente Lösung des Problems unendlicher Dimensionen zurückzuziehen. Wir umgehen dadurch die Frage, was ein Produkt unendlich vieler Vektoren $\zeta_0 \wedge \zeta_1 \wedge \dots$ sein soll oder im Fall des dualen Bündels ein unendliches Analogon zu den n-Formen. Genau diese Frage stellt sich im Rahmen der String-Theorie im Zusammenhang mit der Reparametrisierung der Strings [12]. Eine Antwort führt dort auf die sogenannte *halb-unendliche Kohomologie* von Feigin, ausgeführt etwa bei Frenkel, Garland und Zuckerman [2], eine andere auf die Schnitte des unendlich-dimensionalen dualen Determinantenbündels. Als Leitfaden durch das Kapitel kann das Verfahren dienen, neue Bündel durch lineare Konstruktionen auf den Fasern schon vorhandener Bündel zu gewinnen. Schließlich stellen wir den Bezug dieses Prinzips zu der homogenen Beschreibung her.

Im vierten Kapitel nutzen wir die homogene Beschreibung der Räume für eine *explizite* Konstruktion der in [7] nur abstrakt durch einen induktiven Limes angegebenen dichten Einbettung des Fockraums in die holomorphen Schnitte. Dieser Isomorphismus ist das zentrale Ergebnis der Arbeit und seine Darstellung wird den ersten Teil des Kapitels einnehmen. Der zweite ist der lokalen Darstellung der beschriebenen Schnitte gewidmet und ihre Berechnung mündet in einer kurzen, aber genügend reichhaltigen Formel, um von ihr interessante Ergebnisse für anschließende Untersuchungen des Fockraums wie der Schnitte selbst zu erhoffen.

Schließlich soll im fünften Kapitel ein Ausblick auf Anwendungen dieser Resultate gegeben werden.

Eine Aufgabe dieser Arbeit war, die in der Literatur oft nur formalen Beschreibungen und Argumentationen exakt auszuarbeiten. Diesem Zweck diente vor allem die Darstellung der homogenen Struktur, auf die in jeder Situation detailliert eingegangen wird. Im Gegensatz zu den Zugängen in anderen Arbeiten wurde dabei trotz höherem Aufwand konsequent das Ziel verfolgt, eine homogene Version zu finden, die auch noch eine Gruppenstruktur trägt. Dies kommt schon der vorliegenden Untersuchung an verschiedenen Stellen zugute. In größerem Maß kann aber die einfache Handhabbarkeit von Gruppen vor allem dazu beitragen, die Ergebnisse dieses Gebietes verfügbar zu machen für angrenzende oder überlappende Forschungsgebiete.

1 Bündel

Als Zugang zur homogenen Theorie von Mannigfaltigkeiten und Bündeln sollen in diesem Kapitel abstrakt *Hauptfaserbündel* und ihre *Assoziierten Bündel* diskutiert werden. Diese Darstellungsweise von Bündeln stellt interessante Mittel für die Untersuchung von *Schnitten* zur Verfügung, welche im letzten Abschnitt dieses Kapitels vorgeführt werden.

1.1 Grundlagen

Grundsätzlich lässt sich ein Bündel beschreiben durch Angabe des *Bündelraums* zusammen mit einer *Bündelprojektion* auf eine *Basismannigfaltigkeit* und *lokalen Trivialisierungen*, die zugleich seine differenzierbare Struktur festlegen. Genauso ist ein Bündel schon im Wesentlichen bestimmt durch die *Übergangsfunktionen*, also durch einen Kozykel in der *Strukturgruppe* des Bündels. Obwohl sie gegenseitig auseinander hervorgehen, sollen in dieser Arbeit dennoch jeweils beide Strukturen beschrieben werden, um die vorkommenden Objekte besser zu verstehen und zugleich besser behandeln zu können.

Die Wiederholung und Rekapitulation der genannten Begriffe und Objekte aus der allgemeinen Bündeltheorie übernimmt der Beweis des folgenden Satzes, der die alternative Beschreibung eines Bündels durch einen Kozykel festhält.

1.1 Satz. *Zu Mannigfaltigkeiten M und F und einem Kozykel (k^α_β) in* $\mathrm{Aut}(F)$ *bezüglich einer offenen Überdeckung (U_α) von M existiert ein Bündel über M mit Standardfaser F und den Übergangsfunktionen k^α_β auf $U_\alpha \cap U_\beta$.*

Beweis. Als Bündelraum $\mathcal{F}$ wollen wir die disjunkte Vereinigung der Mengen $U_\alpha \times F$ modulo einer Äquivalenzrelation $\sim$ definieren, die gegeben ist durch Identifikation der Elemente (α, m, ξ) und $(\beta, m, k^\alpha_\beta(m)\xi)$:

$$\mathcal{F} = \dot{\bigcup_\alpha} (U_\alpha \times F) / \sim .$$

Aus den Kozykelrelationen

$$k^\alpha_\gamma = k^\beta_\gamma k^\alpha_\beta$$

auf $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ folgen die beiden weiteren Beziehungen

$$(k^\alpha_\beta)^{-1} = k^\beta_\alpha$$

und

$$k_\alpha^\alpha = 1.$$

Diese sind, wie bloßes Nachrechnen ergibt, in umgekehrter Reihenfolge verantwortlich für die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität der Äquivalenzrelation. Daher können wir nach dem Satz von Godement [11, Seite 130] den Bündelraum mit der analytischen Quotientenstruktur ausstatten, um $\mathcal{F}$ als Mannigfaltigkeit zu erhalten.

Die Bündelprojektion $\pi : \mathcal{F} \to M$ sende eine Äquivalenzklasse $[\alpha, m, \xi]$ aus $\mathcal{F}$ auf den Basispunkt m in M. Wir definieren dann lokale Trivialisierungen

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F,\ [\alpha, m, \xi] \mapsto (m, \xi).$$

Diese sind wohldefiniert, da nach Definition der Äquivalenzrelation die Auswahl des Indexes α bereits das Element ξ in F festlegt und m von ihr gar nicht berührt ist. Zu φ_α gehört die Umkehrabbildung

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha),\ (m, \xi) \mapsto [\alpha, m, \xi].$$

Da außerdem die F-Komponente der Trivialisierung durch einen Automorphismus auf F beschrieben wird – hier ist das nur die Identität –, sind die Abbildungen φ_α lokale Trivialisierungen. Wir haben noch zu zeigen, dass der Kozykel dann die Gleichung

$$\varphi_\beta \circ (\varphi_\alpha)^{-1}(m, \xi) = (m, k_\beta^\alpha(m)\xi)$$

auf $U_\alpha \cap U_\beta \times F$ erfüllt, die die zu diesen Trivialisierungen gehörenden Übergangsfunktionen definiert. Die linke Seite der Gleichung ist gegeben durch $\varphi_\beta([\alpha, m, \xi]) = \varphi_\beta([\beta, m, k_\beta^\alpha \xi]) = (m, k_\beta^\alpha \xi)$. □

Zu weiteren Erläuterungen der Grundbegriffe von Bündeln oder Mannigfaltigkeiten sei hier zum Beispiel auf [4] verwiesen.

In dieser Arbeit werden die Begriffe *holomorph* und *analytisch* sowie manchmal auch *differenzierbar* synonym im komplexen Sinn benutzt, da nur solche Situationen auftreten.

1.2 Hauptfaserbündel

1.2 Definition. *Ein Hauptfaserbündel, auch Gruppenbündel oder K-Bündel, ist ein Bündel, bei dem die Strukturgruppe K zugleich auch die Standardfaser darstellt.*

Implizit ist gemeint, dass die Aktion der Strukturgruppe K auf der Faser K die normale Gruppenmultiplikation in K ist.

1.3 Satz. *Sei $\mathcal{G}$ eine Mannigfaltigkeit mit einer freien und holomorphen Rechtsaktion einer Liegruppe K. Dann ist der Quotient $\mathcal{G}/K$ wiederum eine Mannigfaltigkeit, über der $\mathcal{G}$ als Hauptfaserbündel liegt mit der Quotientenprojektion π als Bündelprojektion.*

Beweis. Der Quotient $\mathcal{G}/K$ lässt sich wie in Satz 1.1 nach dem in diesem Zusammenhang zentralen Satz von Godement tatsächlich zu einer Mannigfaltigkeit machen. Wir haben nun lokale Trivialisierungen zu konstruieren, so dass die dazu gehörenden Übergangsfunktionen auf K einfach durch Linkstranslation operieren, also bloß Multiplikationen in K sind.

Wesentlich für die Konstruktion sind lokale Schnitte, die der Satz über die Umkehrfunktion für die Submersion π liefert. Das heißt, es existieren offene Teilmengen $U_\sigma \subset \mathcal{G}/K$, die den Basisraum $\mathcal{G}/K$ überdecken, und Abbildungen $\sigma \in \mathcal{O}(U_\sigma, \pi^{-1}(U_\sigma))$ mit der Schnitteigenschaft

$$\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{U_\sigma} . \tag{1.1}$$

Wir möchten nun lokale Trivialisierungen ϕ_σ als Inverse der analytischen Abbildungen

$$\psi_\sigma : U_\sigma \times K \to \pi^{-1}(U_\sigma), (o, k) \mapsto \sigma(o)k$$

definieren. Diese sind injektiv, weil mit $\sigma(o)k = \sigma(o')k'$ schon $o = \pi(\sigma(o)k) = \pi(\sigma(o')k') = o'$ ist. Dann ist auch $k = k'$, da die Aktion von K frei ist. Und ψ_σ ist surjektiv: Für $p \in \pi^{-1}(U_\sigma)$ schreibt sich die Schnittbedingung (1.1) auch als $\sigma(pK)K = pK$. Das heißt aber, dass $\sigma(pK)k = pe$ sein muss für ein $k \in K$, also $\psi_\sigma(pK, k) = p$ ist. Damit existieren Umkehrabbildungen φ_σ zu ψ_σ und wir haben zu zeigen, dass diese auch analytisch sind. Das ist der Fall, wenn ψ_σ eine Submersion, also das Differential $T_{(o,k)}\psi_\sigma$ surjektiv ist. Denn eine Abbildung ist genau dann analytisch, wenn die Verkettung mit einer Submersion analytisch ist. In diesem Fall liefert die Verkettung $\phi_\sigma \circ \psi_\sigma$ die Identität. Wir haben also das Tangential an ψ_σ zu berechnen und zerlegen dazu den Tangentialraum am Produkt $U_\sigma \times K$ in das Produkt der Tangentialräume an U_σ und K.

Allgemein induzieren für Mannigfaltigkeiten M und N mit Basispunkten m beziehungsweise n die Einbettung j_M und Projektion p_M,

$$j_M : M \to M \times N, p \mapsto (p, n),$$
$$p_M : M \times N \to M, (p, q) \mapsto p,$$

und analog j_N und p_N Abbildungen auf den Keimen, nämlich

$$j_M^* : \mathcal{O}_{(m,n)}(M \times N) \to \mathcal{O}_m(M), h_{(m,n)} \mapsto (h \circ j_M)_m,$$
$$p_M^* : \mathcal{O}_m(M) \to \mathcal{O}_{(m,n)}(M \times N), f_m \mapsto (f \circ p_M)_{(m,n)}.$$

Die Zuordnung $(\cdot)^*$ ist funktoriell, und wir haben folgende

1.4 Proposition. *Ein natürlicher Isomorphismus*

$$T_{(m,n)}(M \times N) = T_m M \times T_n N$$

wird gegeben durch die Identifizierung

$$Z \mapsto (Z \circ p_M^*, Z \circ p_N^*)$$

mit der Umkehrung

$$(X, Y) \mapsto X \circ j_M^* + Y \circ j_N^*.$$

Beweis. Sei $i := j_M \circ p_M + j_N \circ p_N$. Dann ist $i(p, q) = (p, n) + (m, q) = (p, q) + (m, n)$, also $i = \mathrm{id}_{M \times N} + (m, n)$, so dass i^* nur die Identität auf $\mathcal{O}_{(m,n)}(M \times N)$ plus Evaluation in (m, n) ist. Diese verschwindet aber unter jedem Vektor Z. Daher gilt

$$Z \circ p_M^* \circ j_M^* + Z \circ p_N^* \circ j_N^* = Z \circ i^* = Z.$$

Andererseits ergibt sich bei umgekehrter Anwendung in der ersten Komponente

$$(X \circ j_M^* + Y \circ j_N^*) \circ p_M^* = X \circ (p_M \circ j_M)^* + Y \circ (p_M \circ j_N)^* = X + 0 = X,$$

da $p_M \circ j_M$ die Identität auf M ist und der zweite Summand $p_M \circ j_N$ wie oben als konstant m unter Y verschwindet. Analog ergibt hier die zweite Komponente $0 + Y = Y$, womit tatsächlich die beiden Zuweisungen invers zueinander sind. □

Diese natürliche Zerlegung in ein Produkt von Tangentialräumen ergibt in unserem Fall an $U_\sigma \times K$ für den zuerst noch speziellen Basispunkt (o, e) mit dem neutralen Element $e \in K$

$$T_{o,e}(U_\sigma \times K) = T_o U_\sigma \times T_e K.$$

Unter dieser Identifizierung wirkt das Tangential von ψ_σ, angewandt auf einen Vektor (X, Y), auf einem Keim $h_{\sigma(o)}$ als

$$\begin{aligned}((T_{(o,e)}\psi_\sigma)\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix})(h_{\sigma(o)}) &= ((T_{(o,e)}\psi_\sigma)(X \circ j^*_{U_\sigma} + Y \circ j^*_K))(h_{\sigma(o)})\\ &= X(h \circ \psi_\sigma \circ j_{U_\sigma})_o + Y(h \circ \psi_\sigma \circ j_K)_e\\ &= X(h \circ \sigma)_o + Y(h \circ \sigma(o))_e\\ &= ((T_o\sigma)(X) + (T_e\sigma(o))(Y))(h_{\sigma(o)}),\end{aligned}$$

wobei hier $\sigma(o)$ als Multiplikator $k \mapsto \sigma(o)k$ unter der Rechtsaktion von K auf $\mathcal{G}$ aufgefasst werden soll. Das heißt, $T_{(o,e)}\psi_\sigma = (T_o\sigma, T_e\sigma(o))$ ist offensichtlich linksinvers zu

$$\begin{pmatrix}T_{\sigma(o)}\pi\\(T_e\sigma(o))^{-1}(1 - (T_o\sigma)(T_{\sigma(o)}\pi))\end{pmatrix}$$

und damit surjektiv. Für beliebiges $k \in K$ ensteht $T_{(o,k)}\psi_\sigma$ aus $T_{(o,e)}\psi_\sigma$ einfach durch Adjunktion und ist daher auch surjektiv. Genauer ist $\psi_\sigma = k \circ \psi_\sigma \circ k^{-1}$, wobei mit k und k^{-1} die Rechtsaktion auf den jeweiligen Räumen gemeint ist – beides Isomorphismen. Also ist mit $T_{(o,e)}\psi_\sigma$ auch

$$T_{(o,k)}\psi_\sigma = (T_{\sigma(o)}k)(T_{(o,e)}\psi_\sigma)(T_{(o,k)}k^{-1})$$

surjektiv.

Aus der bisherigen Konstruktion ergeben sich folgende Resultate, die wegen ihrer Bedeutung festgehalten werden sollen, bevor damit die Übergangsfunktionen berechnet werden können. Dies zeigt dann, dass sie nur Linksmultiplikationen in K sind, was den Beweis des Satzes vervollständigt. □

1.5 Proposition. *Die lokalen Trivialisierungen des Bündels $\mathcal{G}$ über $\mathcal{G}/K$ sind gegeben durch*

$$\varphi_\sigma = (\pi, k_\sigma) : \pi^{-1}(U_\sigma) \to U_\sigma \times K,$$

wobei für k_σ die Beziehung

$$k_\sigma(pk) = k_\sigma(p)k \tag{1.2}$$

zur Rechtsaktion besteht.

Beweis. Da σ ein Schnitt ist, muss die erste Komponente von φ_σ die Projektion π sein. Dann ist k_σ eindeutig bestimmt durch die Bedingung $\psi_\sigma \circ (\pi, k_\sigma) = \mathrm{id}$. Für ein Produkt pk heißt das $\psi_\sigma(\pi(pk), k_\sigma(pk)) = pk$. Es gilt aber auch $\psi_\sigma(\pi(pk), k_\sigma(p)k) = \sigma\pi(p)k_\sigma(p)k = (\psi_\sigma \circ (\pi, k_\sigma)(p))k = pk$, weshalb $k_\sigma(pk) = k_\sigma(p)k$ ist als die eindeutige zweite Komponente von φ_σ. □

1.6 Proposition. *Für $p \in \pi^{-1}(U_\sigma)$ gilt die Zerlegung*

$$p = \sigma(\pi(p))k_\sigma(p), \tag{1.3}$$

Darüberhinaus erfüllt k_σ die Beziehung

$$k_\sigma \circ \sigma = e. \tag{1.4}$$

Beweis. Die rechte Seite von (1.3) ist $\psi_\sigma \circ \varphi_\sigma(p) = p$. Dies angewandt auf $\sigma\pi(p)$ statt p ergibt $\sigma\pi(p) = \sigma\big(\pi(\sigma\pi(p))\big)k_\sigma(\sigma\pi(p)) = \sigma\pi(p)k_\sigma(\sigma\pi(p))$, so dass $k_\sigma \circ \sigma = e$ sein muss, da die Projektion π surjektiv ist. □

1.7 Bemerkung. Da K frei auf $\mathcal{G}$ operiert, kann (1.3) auch als definierende Gleichung für k_σ aufgefasst werden.

1.8 Proposition. *Die Übergangsfunktionen $k_\tau^\sigma \in \mathcal{O}(U_\sigma \cap U_\tau, K)$, definiert durch die Bedingung $\varphi_\tau \circ \psi_\sigma(o,k) = (o, k_\tau^\sigma(o)k)$, sind gegeben als*

$$k_\tau^\sigma = k_\tau \circ \sigma. \tag{1.5}$$

Beweis. Direktes Einsetzen der Definitionen ergibt $\varphi_\tau \circ \psi_\sigma(o,k) = \varphi_\tau(\sigma(o)k) = (\pi(\sigma(o)k), k_\tau(\sigma(o)k)) = (\pi(\sigma(o)), k_\tau(\sigma(o))k) = (o, ((k_\tau \circ \sigma)(o))k)$, also die Behauptung. □

1.9 Proposition. *Es gelten außerdem die wichtigen Formeln*

$$k_\tau = k_\tau^\sigma k_\sigma \;\; \textit{und} \;\; \tau k_\tau^\sigma = \sigma \tag{1.6}$$

über $U_\sigma \cap U_\tau$, wobei die erste zu verstehen ist als $k_\tau(p) = k_\tau^\sigma(\pi(p))k_\sigma(p)$.

Beweis. Wegen (1.2) und der Zerlegung (1.3) ist $k_\tau^\sigma(pK)k_\sigma(p) = k_\tau(\sigma(pK))k_\sigma(p) = k_\tau(\sigma(pK)k_\sigma(p)) = k_\tau(p)$. Mit gleicher Begründung, hier nur angewandt auf $p = \sigma(o)$, gilt ebenso $\tau(o)k_\tau^\sigma(o) = \tau(\pi(\sigma(o)))k_\tau(\sigma(o)) = \sigma(o)$. □

1.10 Bemerkung. Die Kozykelrelationen

$$k_\tau^\sigma k_\sigma^\rho = k_\tau^\rho \;\; \text{und} \;\; k_\sigma^\sigma = e$$

für die Übergangsfunktionen ergeben sich wieder mit denselben Argumenten durch Einsetzen der für sie gefundenen Formel (1.5): $k_\tau^\sigma(o)k_\sigma^\rho(o) = k_\tau(\sigma(o))k_\sigma(\rho(o)) = k_\tau(\sigma(o)k_\sigma(\rho(o))) = k_\tau(\rho(o)) = k_\tau^\rho(o)$. Und k_σ^σ ist bloß $k_\sigma \circ \sigma = e$, wie schon in (1.4) gefunden.

Der Vollständigkeit halber und um die zuvor beschriebenen Strukturen besser zu verstehen, soll auch der umgekehrte Standpunkt eingenommen werden.

1.11 Satz. *Hat man ein Hauptfaserbündel $\mathcal{G} \xrightarrow{\pi} M$ mit Strukturgruppe K über einer Mannigfaltigkeit M und lokalen Trivialisierungen (π, k_α), die den Ausschnitt $\pi^{-1}(U_\alpha)$ über $U_\alpha \subset M$ mit $U_\alpha \times K$ identifizieren, so lässt sich auf natürliche Weise eine freie und holomorphe Rechtsaktion von K auf $\mathcal{G}$ definieren, die in der zu* (1.2) *analogen Beziehung*

$$k_\alpha(pk) = k_\alpha(p)k \tag{1.7}$$

mit den vorgegebenen lokalen Trivialisierungen steht und deren Quotient wieder

$$M = \mathcal{G}/K$$

ergibt. Darüberhinaus gewinnt man lokale Schnitte σ_α aus der Zerlegung (1.3) *durch Setzen von*

$$\sigma_\alpha(pK) = pk_\alpha(p)^{-1}, \tag{1.8}$$

welche dann gerade die lokalen Trivialisierungen und damit die Übergangsfunktionen von $\mathcal{G}$ über M reproduzieren. Das heißt

$$k_{\sigma_\alpha} = k_\alpha.$$

Beweis. Wir beobachten zuerst, dass die Einschränkung von k_α auf eine einzige Faser einen Isomorphismus darstellt, der eben diese Faser mit K identifiziert. Daher gibt es zu p über U_α genau ein Element derselben Faser, in der auch p liegt, so dass

$$k_\alpha(pk) = k_\alpha(p)k$$

ist. Damit daraus auch eine globale Definition der Rechtsaktion wird, darf diese Bedingung nicht von der Wahl von α abhängen. Es ist also zu zeigen, dass für β mit $\pi(p) \in U_\beta$ dieselbe Gleichung erfüllt ist. Und tatsächlich ist $k_\beta(pk) = k_\beta^\alpha(\pi(pk))k_\alpha(pk) = k_\beta^\alpha(\pi(p))k_\alpha(p)k = k_\beta(p)k$. Nach Konstruktion ist dann die Operation von K auf $\mathcal{G}$ frei. Außerdem ist die Abbildung $(p, k) \mapsto pk$, die die Aktion beschreibt, holomorph, nämlich gleich $\psi_\alpha \circ (\mathrm{id}_{U_\sigma} \times \mu) \circ (\varphi_\alpha \times \mathrm{id}_K)$, wobei μ die Multiplikation in K bezeichnet. Denn setzt man (p, k) darin ein, ergibt sich $\psi_\alpha((\mathrm{id} \times \mu)(\pi(p), k_\alpha(p), k)) = \psi_\alpha(\pi(p), k_\alpha(p)k) = \psi_\alpha(\pi(pk), k_\alpha(pk)) = pk$.

Weil damit K in den Fasern operiert, lässt sich $\mathcal{G}/K$ mit M identifizieren, indem man $pK \in \mathcal{G}/K$ abbildet auf $\pi(p) \in M$. Diese Zuordnung ist surjektiv, da π surjektiv ist, und injektiv, weil K in jeder Faser sogar transitiv operiert.

Was die Schnitte betrifft, ist offensichtlich die Abbildung $p \mapsto pk_\alpha(p)^{-1}$ holomorph und damit auch der Schnitt σ_α, sofern er nur wohldefiniert ist. Das ist aber der Fall, da auch pk abgebildet wird auf $pkk_\alpha(pk)^{-1} = pkk^{-1}k_\alpha^{-1}(p) = pk_\alpha(p)^{-1}$ gemäß (1.7).

Zuletzt muss die von den Schnitten σ_α induzierte Abbildung k_{σ_α} schon mit k_α übereinstimmen, da Gleichung (1.3) k_{σ_α} eindeutig bestimmt, nach Konstruktion der Schnitte (1.8) aber auch von k_α selbst erfüllt wird. □

1.12 Bemerkung. Eine repräsentantenunabhängige Form der Schnitte ist zudem gegeben durch

$$\sigma_\alpha(o) = k_{\alpha,o}^{-1}(e),$$

wobei $k_{\alpha,o} = k_\alpha\big|_{\pi^{-1}(o)}$ nun den Isomorphismus bezeichnet, der die Faser über $o \in U_\alpha$ mit K identifiziert. Denn unter Anwendung von k_α hierauf genau wie auf die alte Definition (1.8) erhält man $k_\alpha(pk_\alpha(p)^{-1}) = k_\alpha(p)k_\alpha(p)^{-1} = e$.

1.3 Hauptfaserbündel mit Gruppenstruktur

Trägt bei einem Hauptfaserbünel der Bündelraum selbst noch eine Gruppenstruktur, ist also der Basisraum homogen unter einer Liegruppe, so lassen sich die Bestandteile des Bündels konkreter beschreiben. Ein solches Hauptfaserbündel wollen wir *Gruppenbündel* nennen und diese Bezeichnung auch nur für diese Situation reservieren.

1.13 Satz. *Sei K eine Unter-Liegruppe einer Liegruppe G. Dann trägt das Hauptfaserbündel $G \xrightarrow{\pi} G/K$ mit der gewöhnlichen Quotientenprojektion π als Bündelprojektion eine zusätzliche Linksaktion von G auf dem Basisraum G/K, und die lokalen Trivialisierungen (π, k_σ), die $\pi^{-1}(U_\sigma)$ mit $U_\sigma \times K$ identifizieren für offende Teilmengen U_σ von G/K, sind explizit gegeben durch*

$$k_\sigma(p) = \sigma(\pi(p))^{-1}p \tag{1.9}$$

für $p \in \pi^{-1}(U_\sigma)$. In diesem Fall werden die zugehörigen Übergangsfunktionen einfach durch die Multiplikationen

$$k_\tau^\sigma(o) = \tau(o)^{-1}\sigma(o) \tag{1.10}$$

für $o \in U_\sigma \cap U_\tau$ ausgedrückt.

1.14 Bemerkung. Die Multiplikation mit $\sigma(\pi(p))^{-1}$ löscht also gewissermaßen den „Nicht-K-Anteil“ in p aus.

Beweis. Die erste Behauptung ist bloß eine Umformung der schon bekannten Gleichung (1.3), die die zusätzliche Gruppenstruktur von G ausnutzt. Und unter Benutzung der allgemeinen Formel (1.5) für Übergangsfunktionen erhält man $k_\sigma^\tau(o) = k_\sigma(\tau(o)) = \sigma(\pi(\tau(o)))^{-1}\tau(o) = \sigma(o)^{-1}\tau(o)$. □

Darüber hinaus lassen sich im Fall einer Liegruppen-Struktur auf dem Bündelraum G explizit lokale Schnitte angeben. Wir beginnen mit der Konstruktion unter dem neutralen Element $e \in G$.

1.15 Lemma. *Jede Zerlegung der Liealgebra von G,*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k},$$

in die Liealgebra $\mathfrak{k}$ von K und einen transversalen Unterraum $\mathfrak{h}$ induziert einen lokalen Schnitt $\sigma \in \mathcal{O}(U, \pi^{-1}(U))$ auf einer Umgebung U von $K = eK \in G/K$, der in der Liealgebra einfach durch Projektion auf $\mathfrak{h}$ beschrieben wird. Das heißt

$$\sigma(pK) = \exp(\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}(\log p)). \tag{1.11}$$

Auf der linearen Ebene der Liealgebren lässt sich nämlich nun exakt formulieren, was zuvor mit den Worten „nicht-K-Anteil" assoziiert werden sollte. Hier hat man mit den *transversalen Räumen* gerade einen Begriff, der einem „Komplement" zu K entspricht – allerdings nicht eindeutig. Und genauso ist auch kein Schnitt kanonisch.

Beweis. Definiere durch Gleichung (1.11) eine Abbildung $\tilde{\sigma}$ auf der in G offenen Menge $\exp(V \cap \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}^{-1}(V))$ für eine genügend kleine Umgebung V von $0 \in \mathfrak{g}$. Wegen der Projektion auf $\mathfrak{h}$ faktorisiert $\tilde{\sigma}$ durch K und induziert daher eine Abbildung σ auf dem offenen Teil U des Quotienten, auf den die obige e-Umgebung durch π projiziert wird. Dann ist σ ein Schnitt, weil $p = \exp((\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} + \mathrm{pr}_{\mathfrak{k}})(\log p)) \in \sigma(pK)K$ ist und daher auch $\pi(\sigma(pK)) = \pi(p) = pK$, also $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$. Nach Konstruktion ist $\tilde{\sigma}$ und damit σ holomorph. □

1.16 Proposition. *Hat man einen lokalen Schnitt σ um $K \in G/K$, so bekommt man einen lokalen Schnitt σ_g um $gK \in G/K$ durch Adjunktion von $g \in G$, hier aufgefasst als Linksmultiplikation, also kurz $\sigma_g = g \circ \sigma \circ g^{-1}$:*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "g", "\cong"'] & \pi^{-1}(gU) \\ U \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, "\cong", "g"'] & gU \arrow[u, "\sigma_g"'] \end{tikzcd}$$

Beweis. Wegen $(gp)K = g(pK)$ ist $\pi(gp) = g\pi(p)$, und daher schon $\pi \circ \sigma_g(o) = \pi(g\sigma(g^{-1}o)) = g\pi\sigma(g^{-1}o) = o$. Also erfüllt σ_g die Schnitteigenschaft. □

1.17 Bemerkung. Explizit ist $\sigma_g(go) = g\sigma(o)$ für $o \in U$. Dann ist auf $\pi^{-1}(gU) = g\pi^{-1}(U)$ mit $p \in \pi^{-1}(U)$ auch

$$k_{\sigma_g}(gp) = k_\sigma(p), \tag{1.12}$$

denn $k_{\sigma_g}(gp) = \sigma_g(gp)^{-1}gp = \sigma(p)^{-1}g^{-1}gp$.

1.4 Assoziierte Bündel

Auch wenn für diese Definition eines Hauptfaserbündels bereits klar sein muss, was überhaupt Bündel heißen soll, so ist doch der Zugang über Hauptfaserbündel in gewisser Weise allgemeiner. Ein beliebiges Bündel, also ein Bündel mit einer anderen Faser als der Strukturgruppe, lässt sich nämlich leicht anhand eines Hauptfaserbündels beschreiben, und zwar als *Assoziiertes Bündel* zu dem Hauptfaserbündel der eigenen Strukturgruppe K. Das ist genauer das K-Bündel mit derselben Strukturgruppe, die zugleich als Standardfaser fungiert.

1.18 Proposition. *Sei $\mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{G}/K$ ein Hauptfaserbündel mit Gruppe K, welche zugleich von links auf einem Raum F holomorph operiert. $\mathcal{G}$ habe lokale Trivialisierungen $\varphi_\sigma = (\pi, k_\sigma)$ über U_σ und Übergangsfunktionen k_σ^τ auf den Schnittgebieten $U_\sigma \cap U_\tau$. Dann ist*

$$\mathcal{G} \underset{K}{\times} F = (\mathcal{G} \times F)/K = \{[p, \xi] = [pk, k^{-1}\xi] : p \in \mathcal{G}, k \in K, \xi \in F\}$$

zusammen mit der Projektion

$$\pi_F : \mathcal{G} \underset{K}{\times} F \to \mathcal{G}/K, [p, \xi] \mapsto \pi(p)$$

und den lokalen Trivialisierungen $\varphi_\sigma^F = (\pi_F, k_\sigma^F) \in \mathcal{O}(\pi_F^{-1}(U_\sigma), U_\sigma \times F)$ mit

$$k_\sigma^F([p, \xi]) := k_\sigma(p)\xi \tag{1.13}$$

ein Bündel mit Standardfaser F und den gleichen Übergangsfunktionen wie $\mathcal{G}$ – das sogenannte Assoziierte F-Bündel zu $\mathcal{G}$.

1.19 Bemerkung. Die Übergangsfunktionen beider Bündel stimmen als Gruppenelemente von K überein. Allerdings hat natürlich ihre Wirkung auf dem Bündelraum $\mathcal{G}$ im Allgemeinen nichts mit der auf der Faser F zu tun.

Beweis. Zunächst ist π_F wohldefiniert, weil K gerade auf den Fasern von $\mathcal{G}$ operiert oder besser die Fasern nur die Orbitale der K-Operation sind. Und auch die Abbildungen k^F_σ sind wohldefiniert, da auch $[pk, k^{-1}\xi]$ auf $k_\sigma(pk)k^{-1}\xi = k_\sigma(p)kk^{-1}\xi = k_\sigma(p)\xi$ nach (1.2) abgebildet wird. Um die Trivialisierungen auch als bijektiv zu bestätigen, hier ihre Umkehrabbildungen:

$$\psi^F_\sigma : U_\sigma \times F \to \pi_F^{-1}(U_\sigma), (o, \xi) \mapsto [\sigma(o), \xi]. \tag{1.14}$$

Diese sind holomorph, da es π und σ sind. Tatsächlich ist einerseits $\varphi^F_\sigma \circ \psi^F_\sigma(o, \xi) = \varphi^F_\sigma([\sigma(o), \xi]) = (\pi(\sigma(o)), k_\sigma(\sigma(o))\xi) = (o, \xi)$ und andererseits $\psi^F_\sigma \circ \varphi^F_\sigma([p, \xi]) = \psi^F_\sigma(\pi(p), k_\sigma(p)\xi) = [\sigma(\pi(p)), k_\sigma(p)\xi] = [pk_\sigma(p)^{-1}, k_\sigma(p)\xi] = [p, \xi]$. Die Abbildung k^F_σ und damit auch φ^F_σ selbst ist wegen der Quotientenstruktur holomorph, sprich wegen der Submersivität der Projektion π_F.

Für die Übergangsfunktionen ${}^F k^\tau_\sigma$ gilt $k_\tau(p)\xi = k^F_\tau([p, \xi]) = {}^F k^\tau_\sigma(o) k^F_\sigma([p, \xi]) = {}^F k^\tau_\sigma(o) k_\sigma(p)\xi$ für alle $[p, \xi] \in \pi_F^{-1}(o)$, das heißt für alle p in der Faser über o und alle $\xi \in F$. Für ein solches p gilt also die Gleichung $k_\tau(p) =^F k^\tau_\sigma(o) k_\sigma(p)$ und daher ${}^F k^\tau_\sigma(o) = k^\tau_\sigma(o)$ wie benötigt. □

1.20 Bemerkung. Bei dieser Konstruktion soll K auf F als Morphismengruppe operieren, etwa linear, falls F eine Vektorraumstruktur trägt. Zumindest aber soll F „Raum" sein im differenzierbaren Sinn, also Mannigfaltigkeit, damit das Attribut „analytisch" sinnvoll bleibt.

1.21 Proposition. *Im Fall einer linearen Darstellung von K auf F kann jede Faser mit einer Vektorraumstruktur versehen werden, so dass das Assoziierte F-Bündel ein Vektorbündel wird, nämlich durch die Verknüpfungen*

$$\begin{aligned} [p, \xi] + [p, \eta] &:= [p, \xi + \eta], \\ \lambda[p, \xi] &:= [p, \lambda\xi]. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Die K-Komponente k_σ der Trivialisierungen operiert dann gewissermaßen linear in der „zweiten Komponente" von $[p, \xi]$. Sinn verleiht dieser Aussage das folgende Lemma, das zugleich die Definition der linearen Struktur (1.15) der Fasern rechtfertigt. Der Rest des Beweises wäre bloßes Überprüfen der Vektorraumaxiome.

1.22 Lemma. *Ist $[p, \xi]$ ein Element von $\mathcal{G} \underset{K}{\times} F$, so lässt sich auch jedes andere Element derselben Faser in der Form $[p, \eta]$ schreiben, und zwar eindeutig.*

Beweis. Gehöre etwa $[p', \xi']$ zur selben Faser. Dann ist $p' = pk$ für ein $k \in K$ und es gilt $[p', \xi'] = [pk, \xi'] = [p, k\xi']$. Setze also $\eta = k\xi'$. Dabei ist k und damit η eindeutig bestimmt, da K frei auf $\mathcal{G}$ operiert. □

1.23 Korollar. *Im Fall eines Faserbündels $G \underset{K}{\times} F$, wo G über G/K selbst Liegruppe ist mit Untergruppe K, sind die lokalen Trivialisierungen $\varphi_\sigma^F = (\pi_F, k_\sigma^F)$ explizit durch*

$$k_\sigma^F([p, \xi]) = \sigma(\pi(p))^{-1} p\xi$$

gegeben.

1.5 Schnitte in homogenen Bündeln

Im Folgenden sollen noch allgemein Schnitte in einem Assoziierten Bündel und deren Konstruktionsmöglichkeiten beschrieben werden. Der Raum aller (holomorphen) Schnitte ϕ in einem Faserbündel $\mathcal{F} = \mathcal{G} \underset{K}{\times} F$ über einer Mannigfaltigkeit $M = \mathcal{G}/K$ sei kurz mit

$$\mathcal{O}(M, \mathcal{F}) = \mathcal{O}(\mathcal{G}/K, \mathcal{G} \underset{K}{\times} F)$$

bezeichnet, wobei die Bündelstruktur des Zielraums schon anzeigen soll, dass nicht einfache Abbildungen, sondern Morphismen, hier Schnitte, gemeint sind, die jeden Punkt in seine Faser abbilden. Handelt es sich um ein Vektorbündel, so trägt auch der Schnittraum $\mathcal{O}(M, F)$ eine lineare Struktur, die sich wie üblich aus punktweisen Verknüpfungen ergibt – nur dass hier in jedem Punkt auch in einem je eigenen Vektorraum addiert und skalar multipliziert wird. Die Schnitteigenschaft sorgt aber gerade dafür, dass die punktweise Verknüpfung im selben Raum stattfindet:

$$(\lambda\phi + \phi')(o) = \lambda(\phi(o)) + \phi'(o).$$

Wir wollen zuerst eine lokale Beschreibung von Schnitten anhand der lokalen Trivialisierungen des Bündels geben, aus der man umgekehrt eine Möglichkeiten erhält, *globale* Schnitte zu konstruieren, indem lokal definierte Stücke zusammengesetzt werden, die eine gewisse Übergangsbedingung erfüllen. Darüberhinaus öffnet die homogene Struktur einen Weg, direkt – quasi von oben kommend – einen globalen Schnitt zu erzeugen.

1.24 Proposition. *Ein Schnitt $\phi \in \mathcal{O}(\mathcal{G}/K, \mathcal{G} \underset{K}{\times} F)$ eines Assoziierten Bündels zu $\mathcal{G}$ mit Strukturgruppe K und Faser F kann lokal beschrieben werden durch Abbildungen*

$$\phi_\sigma := k_\sigma^F \circ \phi = \mathrm{pr}_F \circ \varphi_\sigma^F \circ \phi \in \mathcal{O}(U_\sigma, F) \tag{1.16}$$

auf offenen Mengen $U_\sigma \in \mathcal{G}/K$, über denen das Bündel durch φ^F_σ trivial $U_\sigma \times F$ ist. ϕ ist genau dann holomorph, wenn für eine offene Überdeckung (U_σ) der Mannigfaltigkeit alle Funktionen ϕ_σ holomorph sind.

1.25 Bemerkung. Der Schnitt ϕ wird dabei in dem Sinn durch ϕ_σ beschrieben, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \pi_F^{-1}(U_\sigma) \arrow[d, "\varphi^F_\sigma"] \\ U_\sigma \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r] & U_\sigma \times F \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die untere Abbildung ist nämlich gerade durch $\varphi^F_\sigma \circ \phi = (\mathrm{id}, \phi_\sigma)$ gegeben.

Beweis der Proposition. Der Schnitt ϕ bildet U_σ gerade auf den Ausschnitt $\pi_F^{-1}(U_\sigma)$ des Bündels $\mathcal{G}\underset{K}{\times}F$ über U_σ ab. Also können wir φ^F_σ anwenden und erhalten $\varphi^F_\sigma \circ \phi = (\pi\circ\phi, k_\sigma\circ\phi) = (\mathrm{id}, \phi_\sigma)$. Und da φ^F_σ sogar biholomorph ist, folgt auch der Zusatz. □

1.26 Bemerkung. Aus der Definition (1.16) der lokalen Darstellungen ϕ_σ lässt sich sofort ablesen, dass sie die Übergangsrelationen

$$\phi_\tau = k^\sigma_\tau \phi_\sigma \tag{1.17}$$

über $U_\sigma \cap U_\tau$ erfüllen. Es zeigt sich, dass diese Bedingung schon genügt, um umgekehrt die Stücke zusammensetzen zu können.

1.27 Proposition. *Für eine trivialisierende Überdeckung $(U_\sigma)_\sigma$ von M, die von Schnitten $\sigma \in \mathcal{O}(U_\sigma, \mathcal{G})$ induziert ist, und lokale Abbildungen $\phi_\sigma \in \mathcal{O}(U_\sigma, F)$ von U_σ in die Standardfaser F des Bündels lässt sich ein globaler Schnitt $\phi \in \mathcal{O}(M, \mathcal{F})$ definieren durch $\phi(o) = [\sigma(o), \phi_\sigma(o)]$, falls die Übergangsrelationen*

$$\phi_\tau = k^\sigma_\tau \phi_\sigma$$

über $U_\sigma \cap U_\tau$ gelten.

Beweis. Erst einmal ist ϕ auf ganz M wohldefiniert, denn für $o \in U_\sigma \cap U_\tau$ gilt $[\tau(o), \phi_\tau(o)] = [\tau(o), k^\sigma_\tau(o)\phi_\sigma(o)] = [\tau(o)k^\sigma_\tau(o), \phi_\sigma(o)] = [\sigma(o), \phi_\sigma(o)]$ nach (1.6). Außerdem ist ϕ auch Schnitt, da $\pi_F(\phi(o)) = \pi(\sigma(o)) = o$ ist. Und weil Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, ist auch ϕ holomoroph. In der Tat berechnen sich die lokalen Darstellungen von ϕ zu $k^F_\sigma \circ \phi(o) = k^F_\sigma([\sigma(o), \phi_\sigma(o)]) =$

$k_\sigma(\sigma(o))\phi_\sigma(o) = \phi_\sigma(o)$, sind also nach Voraussetzung holomorh. Alternativ ist ϕ die Abbildung $o \mapsto (\sigma(o), \phi_\sigma(o))$ verkettet mit der Quotientenprojektion und auch deswegen holomorph. $\square$

Die lokalen Darstellungen liefern also neben einer Beschreibung des Schnittes mit der letzten Proposition auch eine Möglichkeit, globale Schnitte zu konstruieren. Die Homogenität der Mannigfaltigkeit stellt dafür aber noch ein weiteres Verfahren bereit.

1.28 Proposition. *Jede Funktion $\tilde{\phi} \in \mathcal{O}(\mathcal{G}, F)$ induziert einen Schnitt $\phi \in \mathcal{O}(\mathcal{G}/K, \mathcal{G}\underset{K}{\times}F)$, gegeben durch die Formel*

$$\phi(pK) = [p, \tilde{\phi}(p)], \tag{1.18}$$

wenn nur $\tilde{\phi}$ die Bedingung

$$\tilde{\phi}(pk) = k^{-1}\tilde{\phi}(p) \tag{1.19}$$

für alle $p \in \mathcal{G}$ und $k \in K$ erfüllt.

Beweis. Die Funktionalgleichung (1.19) lässt die Definition von ϕ unabhängig von der Auswahl eines Repräsentanten von pK werden. Wir haben nur zu zeigen, dass der so definierte Schnitt auch holomorph ist. Das ist deshalb der Fall, weil die Abbildung $p \mapsto (p, \tilde{\phi}(p))$ mit $\tilde{\phi}$ holomorph ist. Wendet man darauf die Quotientenprojektionen an, so erhält man eine holomorphe Funktion, die mit $\phi \circ \pi$ übereinstimmt. Die Submersion π überträgt dann die Holomorphie auf ϕ. $\square$

Wir wollen den Raum aller Funktionen $\tilde{\phi}$ mit (1.19) als $\mathcal{O}_K(\mathcal{G}, F)$ bezeichnen. Dann gilt auch die Umkehrung der obigen Aussage und wir erhalten insgesamt den folgenden

1.29 Satz. *Auf natürliche Weise ist*

$$\mathcal{O}(\mathcal{G}/K, \mathcal{G}\underset{K}{\times}F) = \mathcal{O}_K(\mathcal{G}, F), \tag{1.20}$$

sogar im linearen Sinn, falls die Operation von K auf F linear ist.

Beweis. Der Zusatz ist klar nach Definition der linearen Struktur der Fasern in der „zweiten Komponente“. Man beachte, dass dann auch $\mathcal{O}_K(\mathcal{G}, F)$ Vektorraum ist.

Da nach Lemma 1.22 ein Element der Faser über $g \in \mathcal{G}$ eindeutig durch die „zweite Komponente" festgelegt wird, definiert Gleichung (1.18) nicht nur ϕ für vorgegebenes $\tilde{\phi}$, sondern umgekehrt auch $\tilde{\phi}$ zu einem Schnitt ϕ. Eine so definierte Funktion $\tilde{\phi}$ erfüllt die Bedingung (1.19), denn $[pk, \tilde{\phi}(pk)] = \phi(pkK) = \phi(pK) = [p, \tilde{\phi}(p)] = [pk, k^{-1}\tilde{\phi}(p)]$. Und nach dem Ergebnis aus (1.21) ist $\tilde{\phi} = (k_\sigma)^{-1}(\phi_\sigma \circ \pi)$ über U_σ holomorph. □

Mit dieser homogenen Beschreibung an der Hand können wir die lokale Version eines Schnittes noch einmal vereinfachen.

1.30 Proposition. *Zwischen den lokalen Darstellungen ϕ_σ eines Schnittes ϕ und ihren zugehörigen Funktionen $\tilde{\phi}$ besteht die Beziehung*

$$\phi_\sigma(pK) = k_\sigma(p)\tilde{\phi}(p). \tag{1.21}$$

Beweis. Es gilt $\phi_\sigma(pK) = k_\sigma^F(\phi(pK)) = k_\sigma^F([p, \tilde{\phi}(p)]) = k_\sigma(p)\tilde{\phi}(p)$. □

2 Grassmann-Mannigfaltigkeiten

Als klassische Mannigfaltigkeit sind die Grassmann-Mannigfaltigkeiten in der geometrischen Analysis typisches Beispiel von homogenen Räumen, also Mannigfaltigkeiten M, die eigentlich sogar Liegruppe oder zumindest ein Quotient daraus sind, etwa

$$M = G/K$$

mit einer abgeschlossenen Untergruppe $K \sqsubset G$. Diese Betrachtungsweise erleichtert die Untersuchung von M wegen der zusätzlichen Gruppenstruktur. Dabei erhält man eine solche Darstellung durch eine transitive Operation von G auf M. K ist dann die Stabilisatorgruppe irgendeines Punktes in M.

Hier soll vorgestellt werden, wie sich das Konstrukt der Grassmann-Mannigfaltigkeit über einem Vektorraum V

$$\mathrm{Gr}(V) = \{W \sqsubset V\}$$

auf unendlichdimensionale Vektorräume übertragen lässt. Eine erste analytisch relevante Konstruktion ergibt sich für allgemeine Banachräume, von der dann aber für die folgende Untersuchung nur Untermannigfaltigkeiten eine Rolle spielen. Diese erhält man, wie in den Abschnitten 2.2 und 2.3 beschrieben, durch rein algebraische Bedingungen, womit man eine Verkleinerung der operierenden Gruppe auf die orthogonalen und symplektischen Operatoren erreicht, oder auch funktionalanalytisch, wodurch dann in einem gewissen Sinn gleich große Unterräume ausgewählt werden können. Von Interesse ist aber eigentlich die Grassmannsche über einem Hilbertraum, deren feinere Struktur jeweils nach der Vorstellung des allgemeinen Konzepts behandelt wird.

2.1 Die Grassmann-Mannigfaltigkeit eines Banachraums

Sei zuerst B ein Banachraum. Ein abgeschlossener Unterraum $E \sqsubset B$ heißt *komplementär in B*, falls $B = E \oplus F$ ist für einen abgeschlossenen Unterraum $F \sqsubset B$. F ist dann ein *Komplement* zu E.

2.1 Definition. *Die Grassmann-Mannigfaltigkeit über B sei definiert durch*

$$\mathrm{Gr}(B) := \{E \sqsubset B \ : \ E \text{ komplementär in } B\}.$$

Wie im endlichdimensionalen Fall sind die Karten, die $\mathrm{Gr}(B)$ mit einer differenzierbaren Struktur versehen, für $E \in \mathrm{Gr}(B)$ mit einem Komplement F gegeben durch die Einbettung

$$\mathcal{L}(E,F) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(B)$$

via Graphenabbildung

$$z \mapsto \mathrm{Graph}(z) = (1+z)E =: E_z \tag{2.1}$$

eines beschränkten Operators z auf seinen Graphen E_z als Unterraum von $E \oplus F = B$. Jeder solche Graph hat ebenfalls F zum Komplement, ist also tatsächlich Element der Grassmannschen. Genaugenommen ist $\mathcal{L}(E,F)$ in $\mathrm{Gr}(B)$ die Teilmenge aller Unterräume W, auf denen die Projektion pr_E längs F auf E ein Isomorphismus ist. Deren Elemente W lassen sich nämlich jeweils darstellen als Graph von $z = \mathrm{pr}_F^W \circ (\mathrm{pr}_E^W)^{-1} \in \mathcal{L}(E,F)$. Dabei bezeichne pr_E^W die Einschränkung von pr_E auf W und 1 die Identität, hier auf E. Wegen dieser Notation fehlt oben die Angabe von F als Kern der Projektion. Dieser wird im Kontext aber immer klar sein. Wo das nicht der Fall ist, wird explizit erwähnt, was gemeint ist.

Diese Menge ist sogar unabhängig von E, da der Graph von $z \in \mathcal{L}(E,F)$ mit dem von $z' := z \circ \mathrm{pr}_E^{E'} - \mathrm{pr}_F^{E'} \in \mathcal{L}(E',F)$ übereinstimmt, sofern nur E' auch komplementär zu F ist. Wir wollen daher die Kartengebiete mit

$$U_F = \mathrm{Graph}(\mathcal{L}(E,F)) \tag{2.2}$$

bezeichnen und die vorangegangenen Überlegungen dazu noch einmal festhalten.

2.2 Proposition. *Die Kartengebiete U_F in $\mathrm{Gr}(B)$ sind gegeben durch*

$$U_F = \{E \in \mathrm{Gr}(B) \;:\; B = E \oplus F\} \tag{2.3}$$

und können nach Wahl eines festen Komplementes E zu F auch beschrieben werden als

$$U_F = \{W \in \mathrm{Gr}(B) \;:\; \mathrm{pr}_E^W \textit{ Isomorphismus}\}. \tag{2.4}$$

Die eigentlichen Kartenabbildungen als Umkehrungen der Graphenabbildung lassen sich damit angeben zu

$$z_F : U_F \to \mathcal{L}(E,F),\; W \mapsto z_F(W) = \mathrm{pr}_F^W \circ (\mathrm{pr}_E^W)^{-1}. \tag{2.5}$$

2.3 Bemerkung. Jedes Kartengebiet U_F in $\mathrm{Gr}^E(B)$ ist bereits dicht. Nach der Beschreibung (2.4) von U_F liegen genau diejenigen Unterräume W nicht in U_F, für welche der Kern der Projektion, das ist $W \cap F$, nicht trivial ist. Diese Bedingung definiert eine echte Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Gr}^E(B)$. Ihr Komplement U_F ist daher dicht.

2.4 Bemerkung. Eine Überdeckung von $\mathrm{Gr}^E(B)$ ergibt sich schon für die Auswahl derjenigen Kartengebiete U_F, für die F Komplement von E ist.

2.5 Satz. *Die Karten $\mathcal{L}(E, F)$ für komplementäre Unterräume E und F von B machen $\mathrm{Gr}(B)$ zu einer analytischen Mannigfaltigkeit mit sogar rationalen Übergangsfunktionen*

$$z' = (c + dz)(a + bz)^{-1}, \tag{2.6}$$

wenn wir mit

$$1_B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : E \oplus F \to E' \oplus F' \tag{2.7}$$

die Matrix der Identität auf B bezüglich der beiden Zerlegungen bezeichnen.

Beweis. Trivialerweise überdecken diese Karten die ganze Grassmannsche, da für $E \in \mathrm{Gr}(B)$ nach Definition ein komplementäres F existiert und E dann natürlich im Kartengebiet zu $\mathcal{L}(E, F)$ selbst liegt, nämlich als Graph der Nullabbildung. Sei nun $W \in \mathrm{Gr}(B)$ der Graph von sowohl $z \in \mathcal{L}(E, F)$ als auch von $z' \in \mathcal{L}(E', F')$. Dann gilt nach der obigen Vereinbarung (2.7)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bz \\ c + dz \end{pmatrix}.$$

Da aber die Zerlegung von W in E'- und F'-Anteile eindeutig ist, muss $c + dz = z'(a + bz)$ sein. Nun ist aber

$$a + bz = \mathrm{pr}^W_{E'} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{pr}^W_{E'} \circ (\mathrm{pr}^W_E)^{-1}$$

Isomorphismus und daher $z' = (c + dz)(a + bz)^{-1}$. Also ist der Kartenübergang eine rationale Funktion auf der Überlappung

$$U_F \cap U_{F'} = \mathrm{Graph}(\{z \in \mathcal{L}(E, F) \ : \ a + bz \text{ invertierbar}\}) \tag{2.8}$$

der beiden Karten. Da dieser Kartenausschnitt offen ist in $\mathcal{L}(E, F)$, wird $\mathrm{Gr}(B)$ mit der durch die Kartengebiete erzeugten Topologie zu einer analytischen Mannigfaltigkeit. □

Genaugenommen zu vielen Mannigfaltigkeiten, die nämlich auf jeweils inäquivalenten Basisräumen $\mathcal{L}(E, F)$ modelliert sind. Dabei sind die unterschiedlichen Typen gerade durch die Zusammenhangskomponenten gegeben, in die der Raum $\mathrm{Gr}(B)$ mit dieser Topologie zerfällt. Wir wollen die Komponente, die einen Unterraum $E \in \mathrm{Gr}(B)$ enthält, mit $\mathrm{Gr}^E(B)$ bezeichnen. Wie in der endlichdimensionalen Situation

$$\mathrm{Gr}(\mathbb{K}^n) = \mathrm{Gr}^0(\mathbb{K}^n) \mathbin{\dot\cup} \mathrm{Gr}^1(\mathbb{K}^n) \mathbin{\dot\cup} \ldots \mathbin{\dot\cup} \mathrm{Gr}^n(\mathbb{K}^n),$$

mit $\dim \mathrm{Gr}^k(\mathbb{K}^n) = k(n-k)$ wird dabei die „mittlere“ Komponente, gekennzeichnet durch eine „Halbierung“ $B = E \oplus F$ mit $E \cong F$, als gewissermaßen größte am interessantesten sein.

In die bisherige Übertragung passt sich auch die Operation

$$\mathrm{GL}(B) \times \mathrm{Gr}(B) \to \mathrm{Gr}(B), \quad (g, E) \mapsto gE \tag{2.9}$$

ein, bei der ein Gruppenelement g einem Unterraum E seinen Bildraum gE zuordnet. Denn mit $B = E \oplus F$ ist auch $B = gE \oplus gF$.

2.6 Proposition. *Bezeichnet man mit* $\mathrm{GL}^1(B)$ *die Zusammenhangskomponente der Identität* 1 *auf B, so operiert* $\mathrm{GL}^1(B)$ *transitiv auf* $\mathrm{Gr}^E(B)$.

Beweis. Verbinde E mit gW für $g \in \mathrm{GL}^1(B)$ und $W \in \mathrm{Gr}^E(B)$ durch einen Weg zwischen E und W und weiter zwischen $W = 1W$ und gW. Transitivität ist ein schwierigeres Problem und wird erst in Abschnitt 2.3 für den konkret benötigten Fall gezeigt. □

Dann hat man $\mathrm{Gr}(B)$ als homogenen Raum dargestellt, nämlich als Quotient

$$\mathrm{Gr}^E(B) = \mathrm{GL}^1(B) / \mathrm{Stab}(E) \tag{2.10}$$

aus der operierenden Gruppe $\mathrm{GL}^1(B)$ und der Stabilisator-Untergruppe $\mathrm{Stab}(E) = \{g \in \mathrm{GL}^1(B) \,:\, gE = E\}$, die kanonischerweise am Punkt $E \in \mathrm{Gr}^E(B)$ betrachtet wird. Die Identifizierung ist dabei einfach gegeben als

$$gE = gK, \tag{2.11}$$

wenn mit K die Stabilisatorgruppe bezeichnet wird.

2.7 Proposition. *Fixiert man eine Zerlegung $B = E \oplus F$, so berechnet sich der Stabilisator am Punkt $E \in \mathrm{Gr}^E(B)$ zu*

$$\mathrm{Stab}(E) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}^1(E \oplus F)\}, \tag{2.12}$$

also $\mathrm{Stab}(E) = \mathrm{GL}^1(E) \times \mathcal{L}(F, E) \times \mathrm{GL}^1(F)$.

Beweis. Wegen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aE \\ cE \end{pmatrix}$ sind einerseits solche Dreieckmatrizen Stabilisator-Elemente und muss andererseits für $g \in \mathrm{GL}(E \oplus F)$ mit $gE = E$ bei gleicher Matrixzerlegung schon gelten, dass $c = 0$ ist und a surjektiv. Dann ist aber mit $ax = 0$ für ein $x \in E$ auch $gx = 0$, weshalb schon $x = 0$ sein muss, da g invertierbar sein sollte. Also ist a auch injektiv.

Mit a ist d ebenfalls invertierbar, denn für die Inverse

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$$

erhält man aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa & pb + qd \\ ra & rb + sd \end{pmatrix}$$

in der unteren Zeile $r = 0$ und damit $sd = 1$ und aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & aq + bs \\ 0 & ds \end{pmatrix}$$

schließlich auch $ds = 1$. Daraus ergibt sich die Zerlegung $\mathrm{GL}^1(E) \times \mathcal{L}(F, E) \times \mathrm{GL}^1(F)$, da dann für alle solche a, b und d die Dreickmatrix invertierbar ist, nämlich mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & a^{-1}bd^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}.$$

Die jeweilige Zugehörigkeit zur 1-Komponente ist klar, da $\mathcal{L}(F, E)$ sogar zusammenziehbar ist. □

Wir wollen im Folgenden von der a-Komponente eines Operators oder einer Matrix sprechen und meinen damit immer die linke obere Ecke der Matrix bezüglich einer Zerlegung wie oben. Analog werden die anderen Komponenten b, c und d behandelt.

Für einen Hilbertraum H wird die Situation ein wenig überschaubarer. Hier ist jeder abgeschlossene Unterraum $W \sqsubset H$ komplementär in H, nämlich mit dem orthogonalen Komplement $W^\perp$, und gehört somit zu $\mathrm{Gr}(H)$. Außerdem kann man sich bei den Karten auf orthogonale Graphen beschränken, sprich $\mathcal{L}(W, W^\perp)$ für $W \in \mathrm{Gr}(H)$, da die Kartengebiete zu $\mathcal{L}(E, F)$ in $\mathrm{Gr}(B)$ unabhängig von E waren.

2.2 Eine algebraisch eingeschränkte Grassmann-Mannigfaltigkeit

Wir wollen nun die operierende Gruppe verkleinern, etwa auf die orthogonale oder die symplektische Untergruppe, und erhalten so eine Einschränkung der Grassmann-Mannigfaltigkeit – in den eben genannten Fällen die sogenannte symmetrische und antisymmetrische Grassmansche.

Sei dazu auf dem Banachraum B eine Bilinearform $\phi : B \times B \to \mathbb{K}$ gegeben.

2.8 Definition. *Wir bezeichnen mit* $\mathrm{Gr}_\phi(B)$ *diejenigen Unterräume, auf denen* ϕ *trivial ist,*

$$\mathrm{Gr}_\phi(B) := \{E \in \mathrm{Gr}(B) \;:\; \phi(E \times E) = 0\},$$

und die Zusammenhangskomponente von $E \in \mathrm{Gr}_\phi(B)$ *mit* $\mathrm{Gr}^E_\phi(B) = \mathrm{Gr}_\phi(B) \cap \mathrm{Gr}^E(B)$.

2.9 Proposition. $\mathrm{Gr}_\phi(B)$ *ist eine Untermannigfaltigkeit von* $\mathrm{Gr}(B)$ *mit den Karten*

$$\mathcal{L}_\phi(E,F) := \{z \in \mathcal{L}(E,F) \;:\; \phi(x,zy) + \phi(zx,y) = 0 \quad \forall x,y \in E\},$$

wobei $E \in \mathrm{Gr}_\phi(B)$ *und* $B = E \oplus F$ *sein muss.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass ϕ genau dann auf dem Graph von z verschwindet, wenn $z \in \mathcal{L}_\phi(E,F)$ ist. Dies gilt, einfach weil für $x,y \in E$ immer $\phi(x+zx, y+zy) = \phi(x,zy) + \phi(zx,y)$ ist, da ϕ auf E und F verschwindet. □

2.10 Bemerkung. Die Untergruppe

$$\mathrm{GL}_\phi(B) := \{g \in \mathrm{GL}(B) \;:\; \phi(gx,gy) = \phi(x,y) \quad \forall x,y \in B\}$$

operiert dann auf $\mathrm{Gr}_\phi(B)$, da $\phi(gE \times gE) = \phi(E \times E) = 0$ ist, und genauso die 1-Komponente $\mathrm{GL}^1_\phi(B)$ auf $\mathrm{Gr}^E_\phi(B)$.

Den eigentlich interessierenden Fall behandeln wir als

2.11 Beispiel. Sei H ein Hilbertraum mit innerem Produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Wir konstruieren zwei Bilinearformen

$$\phi_\pm := \langle\cdot|J_\pm\cdot\rangle$$

auf H mittels antilinearen Abbildungen $J_\pm$ auf H, so dass $J_\pm^2 = \pm 1$ ist. Man hat dann

$$\mathrm{GL}_{\phi_\pm}(H) = \{g \in \mathrm{GL}(H) \;:\; g^* J_\pm g = J_\pm\},$$

also die orthoganale Gruppe $O(H) = \mathrm{GL}_{\phi_+}(H)$ und die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(H) = \mathrm{GL}_{\phi_-}(H)$. Diese operieren auf den Grassmann-Untermannigfaltigkeiten

$$\mathrm{Gr}_{\phi_\pm}(H) = \{E \in \mathrm{Gr}(H) \;:\; J_\pm E \subset E^\perp\},$$

die als symmetrische und antisymmetrische Grassmannsche $\mathrm{Gr}_{\mathrm{symm}}(H) := \mathrm{Gr}_{\phi_+}(H)$ und $\mathrm{Gr}_{\mathrm{anti}}(H) := \mathrm{Gr}_{\phi_-}(H)$ bezeichnet werden sollen.

Beweis. Die Beschreibung von $\mathrm{GL}_{\phi_\pm}$ ist klar, wenn man in $\phi_\pm(gx, gy)$ das erste g auf die andere Seite bringt. Auch die zweite Behauptung gilt einfach nach Definition von $\phi(E \times E) = \langle E | J_\pm E\rangle$. □

In diesem Fall sind die Karten erwartungsgemäß

$$\mathcal{L}_{\phi_\pm}(W, W^\perp) = \{z \in \mathcal{L}(W, W^\perp) \;:\; z^* J_\pm + J_\pm z = 0\},$$

die hermiteschen und antihermiteschen Operatoren $\mathcal{H}(W, W^\perp)$ und $\bar{\mathcal{H}}(W, W^\perp)$.

2.3 Die restringierten Grassmann-Mannigfaltigkeiten

Waren die algebraischen Einschränkungen des vorigen Abschnitts tatsächlich Untermannigfaltigkeiten, so werden später doch Verkleinerungen der Grassmannschen gebraucht, die auch eine feinere Topologie haben, also keine Untermannigfaltigkeiten mehr sind. Natürlich übertragen sich aber alle bisherigen Beschreibungen, lassen sich nur um weitere ergänzen. Bevor diese restringierten Grassmann-Mannigfaltigkeiten eingeführt werden können, benötigen wir zuerst noch zwei neue Konzepte aus der Operatortheorie: Normideale von Operatoren und Fredholmoperatoren.

2.3.1 Operatorideale $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}$-Fredholmoperatoren

Etwas ungenau aber umso eingängiger wollen wir von einem Ideal $\mathcal{I} \lhd \mathcal{L}$ sprechen. Das soll heißen, dass für $z \in \mathcal{I}(E, F)$ und $w \in \mathcal{L}(F, G)$ stets auch $w \circ z \in \mathcal{I}(E, G)$ ist und Entsprechendes für die Verkettung von rechts gilt.

2.12 Beispiel. Man hat eine Kette von Idealen

$$0 \lhd \mathcal{F} \lhd \mathcal{L}_1 \lhd \mathcal{L}_2 \lhd \ldots \lhd \mathcal{K} \lhd \mathcal{L},$$

wobei $\mathcal{F}$ die Operatoren von endlichem Rang bezeichne, $\mathcal{K}$ die kompakten Operatoren und $\mathcal{L}_p$ die Schatten-p-Operatoren für $p \geqslant 1$. Das sind alle Operatoren mit endlicher Schatten-p-Norm, gegeben durch

$$\|z\|_p^p = \sum \|ze_i\|^p$$

für eine und damit jede Orthonormalbasis e_i [8]. Wichtigste Beispiele sind die Spurklasse-Operatoren $\mathcal{L}_1$ und die Hilbert-Schmidt-Operatoren $\mathcal{L}_2$. Die Schattenklassen rechtfertigen die Bezeichnung „analytisch" in der Überschrift.

Weiterhin brauchen wir einen leicht verallgemeinerten Begriff von Fredholm-Operatoren.

2.13 Definition. *Für Banachräume E und F heißt $z \in \mathcal{L}(E, F)$ $\mathcal{I}$-Fredholm-Operator, wenn er modulo dem Ideal $\mathcal{I}$ invertierbar ist, genauer wenn ein Operator $w \in \mathcal{L}(F, E)$ existiert, die Parametrix, so dass*

$$w \circ z \in 1_E + \mathcal{I}(E) \;\; \text{und} \;\; z \circ w \in 1_F + \mathcal{I}(F)$$

ist. Die Menge solcher Operatoren z sei mit $\mathrm{Fred}_{\mathcal{I}}(E, F)$ bezeichnet.

2.14 Bemerkung. Für $\mathcal{I} = \mathcal{K}$ ergibt sich die übliche Definition von Fredholm-Operatoren. Es gilt sogar der Zusammenhang $\mathrm{Fred}_{\mathcal{I}} = \mathrm{Fred}$ für alle Ideale $\mathcal{F} \lhd \mathcal{I} \lhd \mathcal{K}$, insbesondere also für die Schattenklassen $\mathcal{L}_p$.

Beweis. Für $z \in \mathcal{L}(E, F)$ zeigen wir die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

$$w \circ z \in 1_E + \mathcal{K}(E) \;\text{ und }\; z \circ w' \in 1_F + \mathcal{K}(F) \;\text{ f'ur }\; w, w' \in \mathcal{L}(F, E) \tag{1}$$

$$\dim\ker z < \infty, \; \dim\operatorname{coker} z < \infty \tag{2}$$

$$\dim\ker z < \infty, \; \operatorname{codim}\operatorname{ran} z < \infty \tag{3}$$

$$w \circ z \in 1_E + \mathcal{F}(E) \;\text{ und }\; z \circ w \in 1_F + \mathcal{F}(F) \;\text{ f'ur }\; w \in \mathcal{L}(F, E) \tag{4}$$

Der Schluss von (4) nach (1) ist trivial, da jeder Operator von endlichem Rang auch kompakt ist, also die abgeschlossene Einheitskugel auf eine kompakte Menge abbildet.

Gilt nun nach (1) $w \circ z = 1_E + u$ für einen kompakten Operator u auf E, so ist in $\ker(1_E + u)$ die abgeschlossene Einheitskugel $B = uB$ kompakt und daher $\dim\ker z \leqslant \dim\ker(w \circ z) = \dim\ker(1_E + u) < \infty$. Über die duale Abbildung zu z sieht man ebenso, dass auch $\dim\operatorname{coker} z < \infty$ sein muss [9].

Wiederum klar ist die Äquivalenz von (2) und (3), da nach Definition $\operatorname{codim}\operatorname{ran} z = \dim F/\operatorname{ran} z = \dim\operatorname{coker} z$ gilt.

Unter Voraussetzung von (3) erhält man Zerlegungen $E = E_1 \oplus \ker z$ und $F = \operatorname{ran} z \oplus F_1$, wobei $\ker z$ und F_1 endlichdimensional und

$$z\big|_{E_1} : E_1 \xrightarrow{\cong} \operatorname{ran} z$$

ein Isomorphismus ist [9]. Dann ist mit $w := (z\big|_{E_1})^{-1} \oplus 0_{F_1} \in \mathcal{L}(F, E)$ sowohl $w \circ z = 1_{E_1} \oplus 0_{\ker z} = 1_E + u$ für $u := 0_{E_1} \oplus -1_{\ker z} \in \mathcal{F}(E)$ als auch $z \circ w = 1_{\operatorname{ran} z} \oplus 0_{F_1} = 1_F + u'$ für $u' := 0_{\operatorname{ran} z} \oplus -1_{F_1} \in \mathcal{F}(F)$. □

2.15 Lemma. *Wie bei den üblichen Fredholm-Operatoren hat man*

$$\operatorname{Fred}_{\mathcal{I}}(E, F) + \mathcal{I}(E, F) = \operatorname{Fred}_{\mathcal{I}}(E, F).$$

Beweis. Zu $z \in \operatorname{Fred}_{\mathcal{I}}(E, F)$ existiert $w \in \mathcal{L}(F, E)$, so dass $z \circ w \in 1_F + \mathcal{I}(F)$ ist. Dann ist aber wegen der Idealeigenschaft von $\mathcal{I}$ auch $(z + \mathcal{I}(E, F)) \circ w \subset 1_F + \mathcal{I}(E, F) + \mathcal{I}(E, F) = 1_F + \mathcal{I}(E, F)$. Gleiches Argument gilt für die linksseitige Parametrix. □

2.16 Lemma. *Ist $\mathcal{I} \lhd \mathcal{J}$ ein Unterideal, so gilt für das Produkt*

$$\operatorname{Fred}_{\mathcal{I}}(F, G) \circ \operatorname{Fred}_{\mathcal{J}}(E, F) \subset \operatorname{Fred}_{\mathcal{J}}(E, G).$$

Beweis. Zu $z \in \operatorname{Fred}_{\mathcal{I}}(F, G)$ und $z' \in \operatorname{Fred}_{\mathcal{J}}(E, F)$ seien $w \in \mathcal{L}(G, F)$ und $w' \in \mathcal{L}(F, E)$ die jeweiligen Umkehroperatoren modulo $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$. Dann ist die Parametrix zu dem Produkt $z \circ z'$ gegeben durch $w' \circ w$, denn $(w' \circ w) \circ (z \circ z') \in w' \circ (1_F + \mathcal{I}(F)) \circ z' \subset 1_E + \mathcal{J}(E) + \mathcal{I}(E) = 1_E + \mathcal{J}(E)$ und analog auf der anderen Seite. □

2.3.2 Die restringierte Grassmannsche und die restringierte Gruppe

Nun steht das Werkzeug bereit, um mittels eines Ideals $\mathcal{I} \lhd \mathcal{L}$ die Grassmann-Mannigfaltigkeit weiter zu verkleinern. Wir gehen aus von einer fest gewählten Zerlegung $B = B_+ \oplus B_-$ unseres Banachraumes.

2.17 Definition. *Die Grassmannsche der von B_+ nur um $\mathcal{I}$ abweichenden Unterräume von B sei bestimmt durch*

$$\operatorname{Gr}_{\mathcal{I}}(B) := \{W \in \operatorname{Gr}(B) \;:\; \operatorname{pr}_+^W \in \operatorname{Fred}_{\mathcal{I}}(W, B_+),\ \operatorname{pr}_-^W \in \mathcal{I}(W, B_-)\},$$

wobei mit $\operatorname{pr}_\pm^W$ die Projektionen auf $B_\pm$ eingeschränkt auf W gemeint sind.

2.18 Proposition. *Für verschiedene Ideale ergibt sich* $\mathrm{Gr}_{\mathcal{L}}(B) = \mathrm{Gr}(B)$, $\mathrm{Gr}_0(B) = \{B_+\}$ *und*

$$\mathrm{Gr}_{\mathcal{F}}(B) = \{W \in \mathrm{Gr}(B) \,:\, \operatorname{codim} W \cap B_+ < \infty \textit{ in } W \textit{ und } B_+\}.$$

Unterräume, die diese Bedingung an die Kodimension erfüllen, heißen kommensurabel *mit* B_+.

Beweis. Die beiden ersten Gleichungen sind klar, da $\mathrm{Fred}_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$ und $\mathrm{Fred}_0 = \mathrm{GL}$ ist. Zum Beweis der dritten Behauptung sind zwei Beobachtungen nützlich, nämlich

$$(1) \quad \ker \mathrm{pr}_\pm^W = W \cap B_\mp \qquad \text{und} \qquad (2) \quad \operatorname{ran} \mathrm{pr}_\pm^W = W/W \cap B_\pm.$$

Dabei ist (1) klar und (2) folgt aus dem Homomorphiesatz und (1).

Sei zuerst $W \in \mathrm{RHS}$. Nach den beiden Vorbemerkungen ist $\ker \mathrm{pr}_+^W = W \cap B_- \subset \operatorname{ran} \mathrm{pr}_-^W = W/W \cap B_+$ und damit $\dim \ker \mathrm{pr}_+^W \leqslant \operatorname{codim}_W W \cap B_+ < \infty$. Außerdem gilt wegen $\operatorname{ran} \mathrm{pr}_+^W \supset W \cap B_+$ auch $\operatorname{codim}_{B_+} \operatorname{ran} \mathrm{pr}_+^W \leqslant \operatorname{codim}_{B_+} W \cap B_+ < \infty$ und daher insgesamt $\mathrm{pr}_+^W \in \mathrm{Fred}(W, B_+) = \mathrm{Fred}_{\mathcal{F}}(W, B_+)$. Zugleich ist $\mathrm{pr}_-^W \in \mathcal{F}(W, B_-)$, da aus (2) $\dim \operatorname{ran} \mathrm{pr}_-^W = \operatorname{codim}_W W \cap B_+ < \infty$ folgt.

Sei nun umgekehrt $W \in \mathrm{Gr}_{\mathcal{F}}(B)$. Genauso ist $\operatorname{codim}_W W \cap B_+ = \dim \operatorname{ran} \mathrm{pr}_-^W < \infty$ und es bleibt zu zeigen, dass auch die Kodimension in B_+ endlich ist. Dazu betrachten wir mit der Zerlegung $W = \mathrm{pr}_+ W \oplus \mathrm{pr}_- W \ni w_+ + w_- = w$ die Abbildung

$$\mathrm{pr}_+ W/W \cap B_+ \to \mathrm{pr}_- W/W \cap B_-, \; [w_+] \mapsto [w_-],$$

die offensichtlich ein Isomorphismus wäre, wenn sie nur wohldefiniert ist. Für $w_+ + w_- \in W$ und $w'_+ + w'_- \in W$ mit $[w_+] = [w'_+]$ ist aber tatsächlich $w_- - w'_- = (w_+ + w_-) - (w'_+ + w'_-) - (w_+ - w'_+) \in W$, also $[w_-] = [w'_-]$. Mit diesem Isomorphismus ist dann $\operatorname{codim}_{B_+} W \cap B_+ = \dim B_+/W \cap B_+ = \dim B_+/\mathrm{pr}_+ W + \dim \mathrm{pr}_+ W/W \cap B_+ < \infty$. Das letzte Gleichheitszeichen rechtfertigt sich dabei aus der endlichen Dimension, die beim ersten Summanden von der Fredholm-Eigenschaft der Projektion pr_+^W kommt. □

2.19 Proposition. *Die duch* $\mathcal{I}$ *eingeschränkte Grassmannsche* $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$ *hat die Karten*

$$\mathcal{I}(E, F) \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$$

zu $E \in \mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$ *und einem Komplement* F, *also* $E \oplus F = B$, *die wiederum durch die Graphenabbildung* (2.1) *beschrieben werden, so dass sich tatsächlich alle zuvor behandelten Konzepte übertragen lassen.*

2.20 Bemerkung. Allerdings zeigt sich hier auch, dass $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$ keine echte Untermannigfaltigkeit der vollen Grassmannschen $\mathrm{Gr}(B)$ ist, da die obige Proposition nur

$$\mathcal{I}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F) \cap \mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$$

liefert, wo dann nämlich Gleichheit nötig wäre. Darüberhinaus wollen wir $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$ auch nicht mit der Relativtopologie betrachten, sondern wieder mit der von diesen Karten induzierten Topologie, welche wegen der bloßen Enthaltensrelation feiner ist.

Beweis. Sei $z \in \mathcal{I}(E, F)$. Wegen der Beziehung

$$\mathrm{pr}_{\pm}^{E_z} = \mathrm{pr}_{\pm}^{E} \circ \mathrm{pr}_{E}^{E_z} + \mathrm{pr}_{\pm}^{F} \circ z \circ \mathrm{pr}_{E}^{E_z}$$

sind dann sowohl $\mathrm{pr}_{+}^{E_z}$ als Summe eines $\mathrm{Fred}_{\mathcal{I}}$-Operators und eines $\mathcal{I}$-Operators enthalten in $\mathrm{Fred}_{\mathcal{I}}(E_z, B_+)$ als auch $\mathrm{pr}_{-}^{E_z}$ im Ideal $\mathcal{I}(E_z, B_-)$, weshalb der Graph von z wirklich Grassmann-Element ist. Bei $\mathrm{pr}_{+}^{E_z}$ ist dabei der erste Summand $\mathrm{Fred}_{\mathcal{I}}$, da $\mathrm{pr}_{E}^{E_z}$ sogar Isomorphismus, also Fred_0 ist. □

In dieser Topologie zerfällt die restringierte Grassmannsche in weitere Zusammenhangskomponenten $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}^{d}(B)$, die alle Unterräume gleicher *virtueller Dimension d* enthalten.

2.21 Definition. *Als eine wichtige Kennzeichnung von Unterräumen W von B aus* $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$ *für Ideale* $\mathcal{I}$ *zwischen* $\mathcal{F}$ *und* $\mathcal{K}$ *soll die* virtuelle Dimension *oder der* Index *von W festgehalten werden als der Operator-Index der Projektion* $\mathrm{pr}_{+}^{W} \in \mathrm{Fred}(B_+)$, *der orthogonalen Projektion auf* H_+ *eingeschränkt auf den Unterraum W. Das heißt*

$$\mathrm{ind}(W) = \mathrm{ind}(\mathrm{pr}_{+}^{W}) = \dim(\ker \mathrm{pr}_{+}^{W}) - \dim(\mathrm{coker}\, \mathrm{pr}_{+}^{W}). \tag{2.13}$$

2.22 Bemerkung. Der Index ist für Fredholm-Operatoren wohldefiniert, da ihr Kern und Kokern endlich-dimensional sind. Zudem ist der Index eines Operators immer ganzzahlig. Im Fall eines Hilbertraumes H gilt darüberhinaus

$$\mathrm{ind}(W) = \dim(W \cap H_-) - \dim(W^{\perp} \cap H_+).$$

Beweis. Zum einen ist $\ker \mathrm{pr}_{+}^{W} = W \cap H_-$ und zum anderen genauso $\mathrm{coker}\, \mathrm{pr}_{+}^{W} = \ker(\mathrm{pr}_{+}^{W})^* = W^{\perp} \cap H_+$. Denn $h \in H_+$ gehört genau dann zu $\ker(\mathrm{pr}_{+}^{W})^*$, wenn für alle $w \in W$ das innere Produkt $\langle(\mathrm{pr}_{+}^{W})^* h|w\rangle = \langle h|\, \mathrm{pr}_{+}^{W} w\rangle = \langle h|\, \mathrm{pr}_{+} w\rangle = \langle \mathrm{pr}_{+}^{*} h|w\rangle = \langle h|w\rangle$ verschwindet, womit h gerade auch in $W^{\perp}$ liegt. □

Nun zerfällt der Raum der Fredholmoperatoren in die durch ganz $\mathbb{Z}$ indizierten Zusammenhangskomponenten der Operatoren vom Index $d \in \mathbb{Z}$, was sich auch auf die Grassmannsche übertragen wird.

Um das zu sehen, wollen wir $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$ wieder homogen darstellen und untersuchen dazu die Operation auf $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$. Die volle invertierbare lineare Gruppe operiert nicht mehr auf $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$, wie die folgenden Rechnungen zeigen werden. Statt dessen ist eine geeignete Untergruppe zu bestimmen. Hierzu führen wir auf $B = B_+ \oplus B_-$ die Involution

$$J := 1_+ \oplus -1_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

ein und kommen damit zu folgender

2.23 Definition. *Die durch das Ideal $\mathcal{I}$ restringierte Untergruppe von* $\mathrm{GL}(B)$ *sei*

$$\mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(B) := \{g \in \mathrm{GL}(B) \ : \ [J, g] \in \mathcal{I}\}. \tag{2.15}$$

2.24 Bemerkung. $\mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(B)$ ist tatsächlich Untergruppe von $\mathrm{GL}(B)$, denn für $g, h \in \mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(B)$ enthält $\mathcal{I}(B)$ auch den Term $[J, g]h^{-1}h - gh^{-1}[J, h] = (Jgh^{-1})h - gJ - (gh^{-1}J)h + gJ = [J, gh^{-1}]h$ und wegen Invertierbarkeit von h auch schon $[J, gh^{-1}]$, so dass $gh^{-1} \in \mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(B)$ ist.

Die folgende Beschreibung dieser Untergruppe legt schon nahe, daß sie ein geeigneter Kandidat für die Operation auf $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$ ist.

2.25 Lemma. *Ein Operator* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(B_+ \oplus B_-)$ *gehört genau dann zu* $\mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(B)$*, wenn b und c auf der Gegendiagonale $\mathcal{I}$-Operatoren sind. Außerdem sind dann schon die beiden Diagonaleinträge a und d* $\mathrm{Fred}_{\mathcal{I}}$.

Beweis. Der Kommutator $[J, g]$ ist für $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ einfach

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist dieser Element von $\mathcal{I}(B)$, so auch

$$b = (1, 0)\begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } c = -(0, 1)\begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

von $\mathcal{I}(B_-, B_+)$ beziehungsweise $\mathcal{I}(B_+, B_-)$. Umgekehrt gehören mit b und c auch

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} b(0, 1) \text{ und analog } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

zum Ideal und daher auch $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$.

Mit dem inversen Operator erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix},$$

so dass $ap = 1 - br \in 1 + \mathcal{I}(B_+)$ ist und $ds = 1 - cq \in 1 + \mathcal{I}(B_-)$, also a und c wirklich $\mathrm{Fred}_{\mathcal{I}}$-Operatoren sind. □

Tatsächlich zeigt dieses Lemma nun sofort, dass $\mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(B)$ auf $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$ operiert, denn für $w \in \mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$ und einen Operator $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = g \in \mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(B)$ haben die Elemente in gW die Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W,$$

weshalb die Projektion von gW auf B_+ der $\mathcal{I}$-Fredholm-Operator $a \circ \mathrm{pr}_+^W + b \circ \mathrm{pr}_-^W$ ist und die Projektion auf die zweite Komponente $c \circ \mathrm{pr}_+^W + d \circ \mathrm{pr}_-^W$ zum Ideal $\mathcal{I}(gW, B_-)$ gehört.

Setzen wir nun noch einmal die in den nächsten Abschnitten gezeigte Transitivität dieser Operation voraus, so können wir damit zugleich die noch offene Beschreibung der Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$ klären. Denn da nach Lemma 2.25 die Diagonalkomponenten von $\mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(B)$ Fredholm-Operatoren sind, zerfällt diese Gruppe in $\mathbb{Z}$ Zusammenhangskomponenten. Zugleich ist aber der Stabilisator zusammenziehbar, da die Diagonaleinträge der oberen Dreieckmatrizen nach Proposition 2.12 bereits invertierbar sein müssen. Damit bleiben die Zusammenhangskomponenten im Quotienten $\mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(B)/\operatorname{Stab}(B_+) = \mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$ erhalten. Die Zugehörigkeit eines Unterraumes zu einer Zusammenhangskomponente wird dabei von der virtuellen Dimension bestimmt, wie folgendes Resultat zeigt.

2.26 Proposition. *Für ein Element* $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(B)$ *ist*

$$\operatorname{ind}(gW) = \operatorname{ind}(a) + \operatorname{ind}(W). \tag{2.16}$$

Beweis. Da zu $W \in \mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(B)$ die Dimension von $\operatorname{coker} \mathrm{pr}_+^W = H_+/\operatorname{ran} \mathrm{pr}_+^W$ endlich ist, kann W nicht endlichdimensional sein und ist damit sofort isomorph zu H_+. Wähle also einen Isomorphismus $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : H_+ \to W$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(gW) &= \operatorname{ind}(\mathrm{pr}_+^{gW}) = \operatorname{ind}(\mathrm{pr}_+^{gW} \circ g \circ w) = \\
&= \operatorname{ind}(\mathrm{pr}_+ \circ g \circ w) = \operatorname{ind}(au + bv) = \operatorname{ind}(au) \\
&= \operatorname{ind}(a) + \operatorname{ind}(u) = \operatorname{ind}(a) + \operatorname{ind}(\mathrm{pr}_+ \circ w) \\
&= \operatorname{ind}(a) + \operatorname{ind}(\mathrm{pr}_+^W \circ w) = \operatorname{ind}(a) + \operatorname{ind}(\mathrm{pr}_+^W) \\
&= \operatorname{ind}(a) + \operatorname{ind}(W),
\end{aligned}$$

da $bv \in \mathcal{I} \lhd \mathcal{K}$ ist. □

Hier haben wir die folgenden Eigenschaften des Index für Operatoren benutzt:

1. Der Index ist ein Homomorphismus von der Gruppe der Fredholm-Operatoren auf die ganzen Zahlen,

$$\operatorname{ind}(ab) = \operatorname{ind}(a) + \operatorname{ind}(b).$$

2. Ein Operator ist genau dann Fredholm, wenn er in $\mathcal{L}/\mathcal{K}$ invertierbar ist. Der Index ist verträglich mit dieser Struktur der Fredholm-Operatoren, da für jeden kompakten Operator b

$$\operatorname{ind}(a + b) = \operatorname{ind}(a)$$

gilt.

3. Ist a invertierbar, so ist $\operatorname{ind}(a) = 0$. Insbesondere gilt dann

$$\operatorname{ind}(ab) = \operatorname{ind}(b) = \operatorname{ind}(ba).$$

Die ersten beiden Eigenschaften seien hier nur aus der allgemeinen Index- und Operator-Theorie zitiert. Die dritte Eigenschaft lässt sich sofort aus der Definition ablesen, da ein invertierbarer Operator nur trivialen Kern und Kokern hat. Die letzte Gleichung ergibt sich dann mit Eigenschaft 1.

Wir wollen das erreichte Resultat noch einmal in einem Satz festhalten.

2.27 Satz. *Bezeichnen wir die Zusammenhangskomponente der Unterräume vom Index $d \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{Gr}_\mathcal{I}^d(B)$, so gilt*

$$\mathrm{Gr}_\mathcal{I}^d(B) = \{W \in \mathrm{Gr}_\mathcal{I}(B) \;:\; \operatorname{ind}(W) = d\}. \tag{2.17}$$

2.3.3 Der Hilbertraum-Fall und die restringierte unitäre Gruppe

Eine genauere Beschreibung ergibt sich, sobald man der Situation ein wenig mehr Struktur abverlangt. Zum einen wollen wir uns nun auf die eigentlich interessanten Ideale $\mathcal{I}$ zwischen den Operatoren von endlichem Rang $\mathcal{F}$ und den kompakten Operatoren $\mathcal{K}$ beschränken. Wie beschrieben werden dann $\mathrm{Fred}_{\mathcal{I}}$-Operatoren einfach Fredholm im üblichen Sinn, haben also endlichdimensionalen Kern und Kokern. Alle wichtigen Ideale sind zudem $*$-Ideale, die kurz gesagt mit z auch z^* enthalten, was wir jedenfalls voraussetzen wollen. Zum anderen betrachten wir statt des bisherigen Banachraumes B jetzt spezieller einen separablen Hilbertraum H mit einer festen Orthogonal-Zerlegung

$$H = H_+ \oplus H_-$$

in zwei gleich große Hälften $H_+ \cong H_-$, das heißt beide unendlich-dimensional.

2.28 Satz. *Auf der $\mathcal{I}$-Grassmannschen $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(H)$ operiert bereits die durch $\mathcal{I}$ eingeschränkte unitäre Gruppe $\mathrm{U}_{\mathcal{I}}(H) := \mathrm{U}(H) \cap \mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(H)$ transitiv. Der Stabilisator dieser Operation reduziert sich auf*

$$\mathrm{Stab}(H_+) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{U}_{\mathcal{I}}(H)\} = \mathrm{U}(H_+) \times \mathrm{U}(H_-).$$

Um an die Transitivität zu kommen, braucht man noch einen Hilfssatz, der zugleich eine andere, einfacher zu handhabende Beschreibung dieser Grassmannschen liefert.

2.29 Proposition. *Für ein Ideal $\mathcal{F} \lhd \mathcal{I} \lhd \mathcal{K}$ besteht $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(H)$ genau aus den Bildern von Operatoren $w \in \mathcal{L}(H_+, H)$, für die die Verkettung mit den Projektoren jeweils $\mathrm{pr}_+ \circ w$ $\mathcal{I}$-Fredholm und $\mathrm{pr}_- \circ w$ Ideal-Element sind. Der erzeugende Operator w kann dabei als Isometrie gewählt werden.*

2.30 Bemerkung. Diese Proposition zeigt zugleich, dass die Grassmannsche schon homogen unter der „Hälfte" der Gruppe $\mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(H)$ ist, nämlich dem Raum der ersten der beiden Matrixspalten, $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = w$. Das ist gerade $\mathcal{L}(H_+, H)$. Für die rechts operierende Gruppe bleibt dann wegen der Bedingung $c = 0$ nur die obere Ecke übrig, also $\mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(H_+)$, welche durch Verkettung von rechts operiert. So erhält man ein Hauptfaserbündel – das etwa in [6] benutzt wird – bei dem zwar nicht mit der zweiten Spalte zu kämpfen ist, das dafür aber keine Gruppenstruktur mehr trägt.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass für ein solches w der Unterraum $W := wH_+$ Element von $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(H)$ ist. Da w surjektiv auf W abbildet, ist zum einen $\dim\ker \mathrm{pr}_+^W \leqslant \dim\ker \mathrm{pr}_+ \circ w < \infty$ und zum anderen $\operatorname{codim}\operatorname{ran}\mathrm{pr}_+^W = \operatorname{codim}\operatorname{ran}\mathrm{pr}_+ \circ w < \infty$, also $\mathrm{pr}_+^W \in \mathrm{Fred}_{\mathcal{I}}(W, H_+)$. Um zu sehen, dass auch $\mathrm{pr}_-^W \in \mathcal{I}(W, H_-)$ sein muss, schränken wir w ein auf das orthogonale Komplement seines Kernes in H_+. Darauf hat w nun eine inverse Abbildung $v \in \mathcal{L}(W, H_+)$, womit wirklich $\mathrm{pr}_-^W = \mathrm{pr}_- \circ w \circ v \in \mathcal{I}(W, H_-)$ ist.

Umgekehrt stellt die Verkettung mit den Projektoren bei vorgegebenem $W \in \mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(H)$ keine Bedingung an eine Isometrie oder allgemeiner an eine Injektion $w \in \mathcal{L}(H_+, H)$ mit Bild W. Bezeichnet man nämlich mit $\tilde{w}$ die Abbildung w auf sein Bild, so ist $\tilde{w}$ selbstverständlich invertierbar, weshalb $\mathrm{pr}_+ \circ w = \mathrm{pr}_+^W \circ \tilde{w}$ $\mathcal{I}$-Fredholm ist. Und trivialerweise gilt mit $\mathrm{pr}_-^W \in \mathcal{I}(W, H_-)$ auch $\mathrm{pr}_- \circ w = \mathrm{pr}_-^W \circ w \in \mathcal{I}(H_+, H_-)$. Wir haben also einfach irgendeine Isometrie von H_+ auf W zu finden. Wie bereits gesehen sind wegen $\dim(H_+/\operatorname{ran}\mathrm{pr}_+^W) < \infty$ die beiden Räume isomorph, weshalb sich daher zum Beispiel einfach zwei Orthonormalbasen aufeinander abbilden lassen. □

2.31 Bemerkung. Bei diesem Verfahren, eine lineare Abbildung auf einem separablen Hilbertraum auf einer Orthonormalbasis zu definieren, soll darauf aufmerksam gemacht sein, dass es sich nicht bloß um lineare Fortsetzung wie bei einer algebraischen Basis handelt, sondern um eine Fortsetzung im Hilbertraum-Sinn, also linear und stetig. Explizit heißt das für ein beliebiges Element $\sum \lambda_j e_j$ des Hilbertraums mit einer quadratsummierbaren Koeffizientenfolge $(\lambda_j) \subset \mathbb{C}$, also $\sum |\lambda_j|^2 < \infty$, und einer Orthonormalbasis e_j

$$w\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j e_j\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j w(e_j).$$

Damit können wir nun zum Beweis des vorangegangen Satzes über die Operation von $\mathrm{U}_{\mathcal{I}}(H)$ auf $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(H)$ kommen.

Beweis. Als Untergruppe von $\mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(H)$ operiert natürlich $\mathrm{U}_{\mathcal{I}}(H)$ auf $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(H)$. Es bleibt die Transitivität zu zeigen. Das heißt, zu $W \in \mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(H)$ ist ein Operator $g \in \mathrm{U}_{\mathcal{I}}(H)$ zu finden, der H_+ auf W dreht. Nach obiger Proposition existiert eine Isometrie $w \in \mathcal{L}(H_+, H)$ mit Bild W sowie Komponenten $a = \mathrm{pr}_+ \circ w \in \mathrm{Fred}(H_+, H_+)$ und $c = \mathrm{pr}_- \circ w \in \mathcal{I}(H_+, H_-)$. Außerdem existiert eine Isometrie $w^\perp \in \mathcal{L}(H_-, H)$ mit Bild $W^\perp$, wozu man einfach die Beschreibung aus dem vorigen Beweis auf diese ebenfalls unendlichdimensionalen Räume anwendet. Damit wird durch $g := w \oplus w^\perp$ ein unitärer Operator auf H definiert, der H_+ auf W abbildet. Um zu zeigen, dass er auch zu $\mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(H)$ gehört, schreiben wir g als die unitäre Matrix

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit den beiden Komponenten b und d von $w^\perp$. Mit a ist auch a^* $\mathcal{I}$-Fredholm, und es exitiert eine $\mathcal{I}$-Parametrix $p \in \mathcal{L}(H_+)$ von a^*, also $pa^* \in 1 + \mathcal{I}(H_+)$. Wegen Unitarität von g ist aber auch $a^*b + c^*d = 0$ und daher gilt $(1 + \mathcal{I}(H_+))b \ni pa^*b = -pc^*d$ oder anders ausgedrückt $b \in -pc^*d - \mathcal{I}(H_+)b \subset \mathcal{I}(H_-, H_+)$. Damit ist g schließlich $\mathcal{I}$-unitär, weshalb die Operation wirklich transitiv ist.

Die Aussage über den Stabilisator ergibt sich einfach aus der Tatsache, dass die Operation von $\mathrm{U}_{\mathcal{I}}(H)$ die Einschränkung der Operation von $\mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(H)$ ist und daher

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{U}_{\mathcal{I}}(H)}(H_+) = \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(H)}(H_+) \cap \mathrm{U}_{\mathcal{I}}(H)$$

sein muss. Direkt ergibt sich dasselbe aber auch aus der Beobachtung, dass wegen Unitarität

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^*a & a^*b \\ b^*a & d^*d \end{pmatrix}$$

ist und damit $a^*a = 1$ sowie $d^*d = 1$ und $a^*b = 0$ gilt. Das bedeutet aber, dass a und d sogar unitär sind und infolgedessen schon $b = 0$ war. □

2.3.4 Die Hilbert-Schmidt-Grassmannsche

Wir wollen uns ab jetzt auf das Ideal $\mathcal{I}_2$ der Hilbert-Schmidt-Operatoren konzentrieren und schreiben kurz $\mathrm{Gr}_2(H)$ und $\mathrm{GL}_2(H)$. Dieses Ideal verkleinert die Grassmann-Mannigfaltigkeit gerade so, dass sie trotz unendlicher Dimension auf natürliche Weise ein Determinantenbündel zulässt. Um dieses später als homogenes Bündel behandeln zu können, wollen wir die operierende Gruppe reduzieren auf eine Untergruppe G, die immer noch transitiv operiert, so dass wir mit dem Stabilisator $K = \mathrm{Stab}_G(H_+)$ schließlich

$$\mathrm{Gr}_2(H) = G/K$$

als homogene Mannigfaltigkeit erhalten.

2.32 Bemerkung. Der Begriff der Determinante kann weiter verallgemeinert werden, so dass sich auch für andere Schatten-Ideale $\mathcal{I}_{2p}$ ein Determinantenbündel über

$\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}_{2p}}(H)$ konstruieren lässt, was für die Modellierung von Raum-Zeit-Dimensionen d größer als eins auch nötig ist. Allgemein muss $p \geqslant \frac{1}{2}(d+1)$ sein. Vergleiche dazu [5, Kapitel 6].

Die Determinante eines Hilbertraum-Operators, die Fredholm-Determinante, lässt sich nur in bestimmten Fällen definieren, nämlich dann, wenn seine Differenz zur Identität ein Spurklasse-Operator ist. Für $a = 1 + \alpha$ mit $\alpha \in \mathcal{I}_1$ ist auch $\log a$ Spurklasse und als Verallgemeinerung des endlich-dimensionalen Falls wird

$$\log\det a = \operatorname{tr}\log a = \operatorname{tr}\Big(\sum_{j\geqslant 1} \frac{(-1)^{j+1}}{j}\alpha^j\Big)$$

gesetzt. Genauere Ausführungen finden sich zum Beispiel in [1].

Im nächsten Kapitel wird sich zeigen, dass beim Determinantenbündel eine Determinante der oberen Ecke a der Matrizen aus $\mathrm{GL}_2(H)$ benötigt wird. Nach Lemma 2.25 sind die beiden Diagonalelemente a und d aber nur Fredholm.

2.33 Proposition. *Beschränkt man sich auf diejenigen Operatoren in $GL_2(H)$, deren Diagonaleinträge eine Determinante besitzen, so erhält man eine* Untergruppe G^0 *von* $\mathrm{GL}_2(H)$. *Ihre Elemente sind von der Form*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & b \\ c & 1+\delta \end{pmatrix} = 1 + \begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & \delta \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

wobei α und δ Spurklasse-Operatoren sind und b und c vom Hilbert-Schmidt-Typ.

Beweis. Da $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G^0$ invertierbar ist, gibt es eine Matrix $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(H)$, so dass mit $a = 1 + \alpha$ und $d = 1 + \delta$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & b \\ c & 1+\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+\alpha p+br & * \\ * & cq+s+\delta s \end{pmatrix}.$$

Und da das Produkt zweier Hilbert-Schmidt-Operatoren Spurklasse ist, $\mathcal{I}_2\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}_1$, ist $p = 1-\alpha p-br$ von der Form 1 plus Spurklasse und ebenso $s = 1-cq-\delta s$. Also ist G^0 abgeschlossen unter Inversion und mit gleichen Überlegungen auch unter Multiplikation, denn

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha & b \\ c & 1+\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\alpha' & b' \\ c' & 1+\delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha+\alpha\alpha'+bc' & * \\ * & cb'+1+\delta+\delta'+\delta\delta' \end{pmatrix}.$$

□

2.34 Proposition. *Die Gruppe G^0 operiert transitiv auf der Zusammenhangskomponente* $\mathrm{Gr}_2^0(H)$ *der Unterräume vom Index* 0.

Beweis. Für $g \in G^0, g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $\alpha = a - 1$ ein Spurklasse-Operator auf H_+ und daher $\operatorname{ind}(a) = \operatorname{ind}(1 + \alpha) = \operatorname{ind}(1) = 0$. Nach Proposition 2.16 erhalten wir $\operatorname{ind}(gW) = \operatorname{ind}(a) + \operatorname{ind}(W) = \operatorname{ind}(W) = 0$ für $W \in \mathrm{Gr}_2^0(H)$. Umgekehrt haben wir ein Element $g \in G^0$ zu finden, welches H_+ auf $W \in \mathrm{Gr}_2^0(H)$ abbildet. Definieren wir $W_0 := \ker \mathrm{pr}_+^W \sqsubset W$ und $H_1 := \operatorname{ran} \mathrm{pr}_+^W \sqsubset H_+$ und bezeichnen wir mit $W_1 := W_0^{\perp_W}$ und $H_0 := H_1^{\perp_{H_+}}$ die Komplemente in W beziehungsweise H_+, so erhalten wir einen Isomorphismus $\mathrm{pr}_+^{W_1} : W_1 \xrightarrow{\cong} H_1$ und wegen $\operatorname{ind}(W) = 0$ auch $q : H_0 \xrightarrow{\cong} W_0$ als irgendeinen Isomorphismus der beiden endlich-dimensionalen Räume gleicher Dimension. Setze nun

$$w = q \oplus (\mathrm{pr}_+^{W_1})^{-1} : H_0 \oplus H_1 = H_+ \xrightarrow{\cong} W$$

und

$$v = q^{-1} \oplus 1 : W_0 \oplus W_0^{\perp_{H_-}} = H_- \to H.$$

Beachte dabei, dass W_0 als Kern der eingeschränkten orthogonalen Projektion im vollen Kern H_- enthalten ist. Setze außerdem

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := w \oplus v.$$

Dann ist $a = \mathrm{pr}_+ \circ w = 0_{H_0} \oplus 1_{H_1} = 1_{H_+} - \mathrm{pr}_{H_0}$ von der Form 1 plus Spurklasse, sogar 1 plus endlichem Rang, und genauso $d = \mathrm{pr}_- \circ v = 0_{W_0} \oplus 1_{W_0^{\perp_{H_-}}}$. Außerdem hat $b = \mathrm{pr}_+ \circ v = q^{-1} \oplus 0_{W_0^{\perp_{H_-}}}$ endlichen Rang, ist also Hilbert- Schmidt, und auch $c = q \oplus \mathrm{pr}_-^W \circ (\mathrm{pr}_+^{W_1})^{-1}$ ist Hilbert-Schmidt, da es bereits pr_+^W ist und q nur endlichen Rang hat. Weiterhin wirkt g bijektiv auf H, nämlich durch

$$gH = wH_+ + vH_- = W \oplus (H_0 \oplus W_0^{\perp_{H_-}}),$$

was auch ganz H ergibt, denn unter Anwendung von $\mathrm{id} = \mathrm{pr}_+ + \mathrm{pr}_-$ schreibt sich dieser Raum als $(H_1 + H_0) + (W_0 + W_0^{\perp_{H_-}}) = H_+ + H_- = H$. Damit gehört g tatsächlich zu G^0 und nach Konstruktion gilt $gH_+ = wH_+ = W$. □

Durch Translationen von G^0 erhält man dann eine auf der vollen Grassmannschen $\mathrm{Gr}_{\mathcal{I}}(H)$ transitiv operierende Gruppe. Wir wählen dazu wieder eine feste Orthonormalbasis (e_j) von H mit Indizes $j \in \mathbb{Z}$, so dass H_+ von den Vektoren e_j mit

$j \in \mathbb{N}$ erzeugt wird. Sei nun s der Shiftoperator bezüglich dieser Basis. Das heißt $se_j = e_{j+1}$. Dann gilt für dessen d-faches Produkt s^d, den *d-Shift*,

$$s^d e_j = e_{j+d}. \tag{2.19}$$

Wir wollen noch kurz die folgenden sofort ablesbaren Eigenschaften des Shiftes festhalten. Für ganze Zahlen d und d' ist

$$s^d s^{d'} = s^{d+d'}$$

und insbesondere

$$(s^d)^{-1} = s^{-d}.$$

Wir brauchen außerdem mehrfach die folgende Formel.

2.35 Lemma. *In einer Matrixzerlegung des d-Shiftes ist die linke obere Komponente $a(s^d)$ ein Fredholm-Operator vom Index $-d$.*

Beweis. Wir unterscheiden die beiden Fälle $d \geqslant 0$ und $d < 0$. Für $d \geqslant 0$ ist $\operatorname{coker}(a)$ d-dimensional, nämlich das Erzeugnis der ersten d Basisvektoren, und es gibt keinen Kern. Also ist in diesem Fall $\operatorname{ind}(a) = \dim\ker a - \dim\operatorname{coker} a = -d$. Und analog hat a für $d < 0$ einen Kern der Dimension $|d| = -d$, aber keinen Kokern. Dann ist ebenso $\operatorname{ind}(a) = -d$. □

2.36 Lemma. *Die Gruppe G^0 ist invariant unter Adjunktion eines d-Shiftes, also $s^d G^0 s^{-d} = G^0$ oder äquivalent*

$$s^d G^0 = G^0 s^d. \tag{2.20}$$

Beweis. Es genügt, die Enthaltensrelation für alle d in *eine* Richtung zu zeigen, da man daraus die Umkehrung erhält, indem man bloß beide Seiten mit s^{-d} adjungiert. Wir können $g \in G^0$ schreiben in der Form $g = 1 + t$ mit einer Matrix $t = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & \delta \end{pmatrix}$, wobei α und δ Spurklasse-Operatoren sind. Damit gilt $s^d g s^{-d} = 1 + s^d t s^{-d}$ und wir haben zu zeigen, dass die Einträge der Matrix $s^d t s^{-d}$ genauso vom Typ $\mathcal{I} - 1$ beziehungsweise $\mathcal{I}_2$ sind. Nun ist aber die Matrix des Shiftoperators s^d bezüglich der Basis (e_j) gegeben durch eine um d verschobene Diagonale der Einheitsmatrix und damit ganz allgemein von der Form $\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{L} \end{pmatrix}$. Dann ist

$$s^d t \in \begin{pmatrix} \mathcal{L}\mathcal{I}_1 + \mathcal{F}\mathcal{I}_2 & \mathcal{L}\mathcal{I}_2 + \mathcal{F}\mathcal{I}_1 \\ \mathcal{F}\mathcal{I}_1 + \mathcal{L}\mathcal{I}_2 & \mathcal{F}\mathcal{I}_2 + \mathcal{L}\mathcal{I}_1 \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 & \mathcal{I}_2 \\ \mathcal{I}_2 & \mathcal{I}_1 \end{pmatrix}$$

und genauso $s^d t s^{-d}$ von der gewünschten Form. □

Wir definieren nun $G^d := s^d G^0$ und erhalten die folgende Aussage.

2.37 Proposition. *Die Komponenten G^d sind disjunkt und ihre Vereinigung*

$$G := \bigcup_{d\in\mathbb{Z}} G^d \sqsubset \mathrm{GL}_2(H) \tag{2.21}$$

gibt eine graduierte Untergruppe der restringierten Gruppe $GL_2(G)$.

2.38 Bemerkung. Die Graduierung bedeutet, dass für $d, d' \in \mathbb{Z}$ gilt

$$G^d G^{d'} \subset G^{d+d'}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussagen in umgekehrter Reihenfolge. Für $g, g' \in G^0$ und $d, d' \in \mathbb{Z}$ ist nach dem eben gezeigten Lemma 2.20 das Produkt $(s^d g)(s^{d'} g')^{-1} = s^d g g'^{-1} s^{-d'}$ enthalten in $s^d G^0 s^{-d'} = s^d s^{-d'} G^0 = s^{d-d'} G^0$. Insbesondere zeigt die Rechnung schon die Graduierung.

Sei nun $s^d g = s^{d'} g'$. Dann ist $s^{-d'} s^d = g' g^{-1}$ und daher gilt $\mathrm{ind}(a(s^{d-d'})) = \mathrm{ind}(a(g' g^{-1})) = 0$, denn $a(g' g^{-1})$ ist von der Form $1 + \mathcal{K}$. Also muss nach Lemma 2.35 $d = d'$ sein und damit auch $g = g'$. Die Vereinigung ist also tatsächlich disjunkt. □

2.39 Satz. *Die Gruppe G operiert transitiv auf* $\mathrm{Gr}_2(H)$*. Es ergibt sich also mit dem Stabilisator*

$$\mathbb{K} = \mathrm{Stab}_G(H_+) = \{\begin{pmatrix} 1+\alpha & b \\ 0 & 1+\delta \end{pmatrix} : \alpha \in \mathcal{I}_1(H_+),\ \delta \in \mathcal{I}_1(H_-)\} \tag{2.22}$$

dieser Operation von G die homogene Darstellung

$$\mathrm{Gr}_2(H) = G/K \tag{2.23}$$

der Hilbert-Schmidt-Grassmannschen.

Beweis. Als Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(H)$ operiert G jedenfalls auf $\mathrm{Gr}_2(H)$. Ist nun ein Unterraum $W \in \mathrm{Gr}_2^d(H)$ gegeben, so ist $s^d W$ in $\mathrm{Gr}_2^0(H)$ enthalten. Denn nach (2.16) gilt

$$\mathrm{ind}(s^d W) = \mathrm{ind}(a) + \mathrm{ind}(W)$$

und nach Lemma 2.35 ist damit $\mathrm{ind}(s^d W) = -d + d = 0$. Da wie gezeigt die Aktion von G^0 auf der 0-Komponente $\mathrm{Gr}_2^0(H)$ transitiv ist, existiert $g \in G^0$, so dass $s^d W = gH_+$. Schließlich ist damit $W = s^{-d} g H_+$ und G tatsächlich transitiv. □

Da $\mathrm{Gr}_2(H)$ in Zusammenhangskomponenten $\mathrm{Gr}_2^d(H)$ zerfällt, und $\mathrm{Gr}_2^d(H)$, wie im Beweis gesehen, gerade der Orbit von H_+ unter G^d ist, gilt auch Folgendes:

2.40 Korollar. *Die Gruppe G besteht aus den Zusammenhangskomponenten $G^d = s^d G^0$. Jede Komponente G^d ergibt den Orbit $\mathrm{Gr}_2^d(H)$ von H_+.*

2.41 Bemerkung. Bei der Bezeichnung als Orbit ist zu berücksichtigen, dass G^d selbst keine Gruppe ist, falls d nicht null ist. Denn jedes Produkt von zwei Elementen aus G^d liegt in G^{2d}, so dass G^d nicht abgeschlossen ist im algebraischen Sinn.

Zuletzt wollen wir noch zwei invariantere Formulierungen für diese Gruppe angeben, die jedoch im Folgenden nicht mehr benutzt werden.

2.42 Bemerkung. Mit der Involution $J = 1_+ \oplus -1_-$ aus (2.14) gilt

$$G^0 = \{g \in \mathrm{GL}_2(H) \;:\; g + JgJ \in 2 + \mathcal{I}_1\}$$

oder auch näher an der Beschreibung (2.15) von $\mathrm{GL}_{\mathcal{I}}(H)$ selbst

$$G^0 = \{g \in \mathrm{GL}_2(H) \;:\; g - \frac{1}{2}J[J,g] \in 1 + \mathcal{I}_1\}.$$

Beweis. Die erste Behauptung ergibt sich aus der Berechnung von $g - JgJ$ als

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Die zweite folgt daraus wegen $g - \frac{1}{2}J[J,g] = g - \frac{1}{2}JJg + \frac{1}{2}JgJ = \frac{1}{2}(g + JgJ)$. □

2.4 Die analytischen Strukturen der homogenen Beschreibung

Bevor wir später die homogene Formulierung der Grassmann-Mannigfaltigkeiten benutzen können, ist es nötig, ihre analytischen Strukturen zu klären. Und wirklich ihre Struktur*en*. Denn neben der analytischen Struktur, die zur Mannigfaltigkeit gehört und hier nun auch unter der Identifikation

$$\mathrm{Gr}^E(B) = \mathrm{GL}^1(B)/K \tag{2.24}$$

beschrieben werden soll, trägt nach Satz 1.3 der Quotient auch die Struktur eines Hauptfaserbündels $\mathrm{GL}^1(B)$. Bei der Konstruktion der Schnitte im zentralen Kapitel 4 dieser Arbeit werden tatsächlich beide Strukturen benötigt.

Stellvertretend soll hier nur der allgemeine Fall der Grassmannschen über einem Banachraum B diskutiert werden. Alle Ergebnisse übertragen sich dann in offensichtlicher Weise auf die spezielleren Grassmann-Mannigfaltigkeiten.

Zuerst beobachten wir, dass es genügt, beide Strukturen nur über einem einzigen Kartengebiet zu untersuchen, welches nämlich an jeden anderen Punkt translatiert werden kann wegen der Linksoperation der Gruppe $\mathrm{GL}^1(B)$ auf dem Quotienten. Das gilt zumindest für die Kartenstruktur. Für die Trivialisierungen des Bündels reicht das aber ebenso, weil nach (1.12) die Beziehung $k_{\sigma_g}(gp) = k_\sigma(p)$ zwischen einer Trivialisierungskomponente und ihren Translationen besteht.

2.43 Proposition. *Unter der obigen Identifizierung* (2.24) *der Grassmann-Mannigfaltigkeit* $\mathrm{Gr}^E(B)$ *mit* $\mathrm{GL}^1(B)/K$*, bei der ein Element gK des Quotienten mit dem Bildraum gE gleichgesetzt wird, sind die Kartengebiete U_F, die Graphen von $\mathcal{L}(E,F)$, gegeben durch*

$$U_F = \{gK \;:\; g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}^1(B),\; a \in \mathrm{GL}(E),\; d - ca^{-1}b \in \mathrm{GL}(F)\}. \tag{2.25}$$

Wir fixieren ein F und schreiben U für U_F. Die Kartenabbildung $z : U \to \mathcal{L}(E,F)$ selbst wird nun zu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} K \mapsto ca^{-1}$$

mit der Umkehrabbildung

$$z \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} K.$$

Für die lokalen Trivialisierungen, die die K-Bündel-Struktur beschreiben, lässt sich auf natürliche Weise ein Schnitt $\sigma \in \mathcal{O}(U_F, \mathrm{GL}^1(B))$ angeben durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} K \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

der dann die lokalen Trivialisierungen $\phi_g = (\pi, k_{\sigma_g})$ über gU_F induziert, wobei

$$k_\sigma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Beweis. Wir wollen auch für den weiteren Gebrauch für $z \in \mathcal{L}(E,F)$ definieren

$$g_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}^1(B). \tag{2.27}$$

Dann ist $g_z E = E_z$ der Graph von z, so dass gelten muss

$$U = \{g_z K \,:\, z \in \mathcal{L}(E,F)\}.$$

Aus Sicht der Gruppe gehört also die Projektion gK eines Elementes $g \in \mathrm{GL}^1(B)$ genau dann zu U, wenn $gK = g_z K$ ist für ein $z \in \mathcal{L}(E,F)$ oder anders gesagt, wenn $g_z^{-1} g$ in K liegt. Nun berechnet sich das Produkt zu

$$g_z^{-1} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c - za & d - zb \end{pmatrix}$$

und die Bedingung wird zu $a \in \mathrm{GL}(E)$, $c = za$ und $d - zb \in \mathrm{GL}(F)$. Das heißt, $z = ca^{-1}$ und wir erhalten die behauptete Bedingung.

Die Formel für σ ist selbstverständlich holomorph und wirklich invariant unter K, denn

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix} K\right) = \sigma\left(\begin{pmatrix} ap & * \\ cp & * \end{pmatrix} K\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cpp^{-1}a^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Und die induzierte Trivialisierung ist dann nach (1.9) gegeben durch

$$k_\sigma(g) = \sigma(gK)^{-1} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix}.$$

□

2.44 Bemerkung. Die Translation der Kartenabbildung auf gU ist dann $z_g : gU \to \mathcal{L}(E,F)$ mit $z_g(gu) = z(u)$ für $u \in U$ und ihre Umkehrung wird beschrieben durch $z \mapsto g g_z K$.

2.45 Bemerkung. Wir wollen noch einmal festhalten, dass $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in derselben Äquivalenzklasse liegt wie der durch σ ausgewählte Vertreter $g_{ca^{-1}}$, oder anders formuliert der Unterraum gE mit dem Graphen von $z = ca^{-1}$ übereinstimmt. Das entspricht der Zerlegung (1.3), die sich in diesem Fall schreiben lässt als $g = g_z k_\sigma(g)$ mit $z = ca^{-1}$. In Matrixform lautet dies

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $\sigma(g_z K) = g_z$ und $k_\sigma(g_z k) = k$ für $z \in \mathcal{L}(E,F)$ und $k \in K$.

3 Determinantenbündel

Für Vektorraumbündel lassen sich verschiedene Konstruktionen auf den Fasern durchführen, aus denen neue Vektorbündel entstehen: zum Beispiel die Summe zweier Fasern oder ihr Tensorprodukt. Ihre lokalen Trivialisierungen sind gerade Summe und Tensorprodukt der gegebenen Trivialisierungen. Ebenso kann man ein duales Bündel erklären, dessen Fasern die Dualräume der ursprünglichen Fasern sind. Auch hier lassen sich auf natürliche Weise lokale Trivialisierungen angeben, die wie die Tensorkonstruktion im Folgenden auch vorgeführt werden. Über einer endlich-dimensionalen Faser kann genau wie beim Tensorprodukt die höchste äußere Potenz gebildet werden, die wir mit Det bezeichnen wollen. Das heißt

$$\operatorname{Det} E = \Lambda^{\dim E} E.$$

Mit dem Determinantenbündel einer Mannigfaltigkeit ist eben diese Konstruktion über dem Standardvektorbündel gemeint, das zu jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit gehört, dem Tangentialbündel. Im Fall der Grassmann-Mannigfaltigkeit muss aber nicht erst zu jedem Punkt ein Vektorraum künstlich hergestellt werden, auf den dann das Det-Verfahren angewendet werden kann. Hier sind die Punkte der Mannigfaltigkeit selbst schon Vektorräume, und man versteht unter dem Determinantenbündel das Bündel, das entsteht, wenn man die Det-Konstruktion auf diese einzelnen *Punkte* anwendet. Die Faser eines Unterraumes in der Grassmannschen ist also seine eigene höchste äußere Potenz. Diese Definition ist allerdings nur im endlich-dimensionalen Fall möglich. Wir werden aber – unter anderem durch die homogene Beschreibung – Möglichkeiten finden, sie auf den hier betrachteten unendlich-dimensionalen Fall zu verallgemeinern.

Der oben genannte Weg, lineare Verfahren auf lineare Fasern anzuwenden, braucht aber auch bei der Konstruktion des Determinantenbündels über einer Grassmann-Mannigfaltigkeit nicht verlassen zu werden. Denn die Grassmannsche trägt ein Vektorbündel, das gerade ihre Punkte aufsammelt und als Fasern nebeneinanderstellt, das *Tautologische Bündel*. Bei der vorigen Erklärung des Determinantenbündels als höchste äußere Potenz der Grassmann-Punkte ist zudem noch nicht gesagt, wie die Fasern *nebeneinander stehen*: Wir haben noch lokale Trivialisierungen zu definieren. Allerdings ist erst einmal nicht ersichtlich, welche kanonische Art es dafür geben soll. Diese Struktur bringt aber das Tautologische Bündel schon mit, so dass es in der gesamten Theorie effizienter ist, dieselbe Arbeit nicht noch einmal zu unternehmen, sondern von dort zu übernehmen. Wir wollen also zuerst das Tautologische Bündel beschreiben – auch in seiner homogenen Version, da sich diese auf das Determinantenbündel übertragen wird.

3.1 Das Tautologische Bündel der Grassmann-Mannigfaltigkeit

Das *Tautologische Bündel* $\mathrm{Taut}(\mathrm{Gr}(B))$ eines Banachraumes B ist das Vektorbündel über der Grassmannschen $\mathrm{Gr}(B)$, bei dem die Faser über einem Punkt $W \in \mathrm{Gr}(B)$ gegeben ist durch den Vektorraum W selbst. Das heißt

$$\mathrm{Taut}(\mathrm{Gr}(B)) = \dot{\bigcup} \mathrm{Gr}(B) = \bigcup_{W \in \mathrm{Gr}(B)} \{W\} \times W \tag{3.1}$$

mit der Bündelprojektion

$$\pi : \mathrm{Taut}(\mathrm{Gr}(B)) \to \mathrm{Gr}(B),\ (W, \zeta) \mapsto W.$$

Um die lokalen Trivialisierungen zu beschreiben, betrachten wir die offene Überdeckung der Grassmannschen $\mathrm{Gr}^E(B)$, die durch die Kartengebiete U_F aus (2.2) mit einem Komplement F zu E gegeben wird. Nach (2.4) gilt

$$U_F = \{W \in \mathrm{Gr}^E(B) \ : \ \mathrm{pr}_E^W \ \text{Isomorphismus}\}.$$

Daher hat man über U_F die natürliche Identifizierung von $\pi^{-1}(U_F)$ mit $U_F \times E$ durch die trivialisierende Abbildung $\varphi_F = \mathrm{id} \times \mathrm{pr}_E^F$ mit der Projektion pr_E^F längs F auf E. Diese Formulierung ist aber nicht korrekt, da φ_F nicht auf einem Cartesischen Produkt definiert ist. Wir haben unterschlagen, dass die Projektion eigentlich einzuschränken ist auf den jeweiligen Unterraum. Das heißt

$$\varphi_F : \pi^{-1}(U_F) \to U_F \times E,\ (W, \zeta) \mapsto (W, \mathrm{pr}_E^F\big|_W \zeta). \tag{3.2}$$

Die Umkehrung ψ_F ist dann gegeben durch $\psi_F(W, \xi) = (W, (\mathrm{pr}_E^F\big|_W)^{-1}\xi)$, was sich für einen Graphen E_z von $z \in \mathcal{L}(E, F)$ schreibt als

$$\psi_F(E_z, \xi) = (E_z, (1 + z)\xi) \in \{E_z\} \times E_z \subset \pi^{-1}(U_F)$$

mit $\xi \in E$. Denn im Fall eines Graphen E_z von z wird die Umkehrung der eingeschränkten Projektion durch $(\mathrm{pr}_E^F\big|_{E_z})^{-1} = 1 + z$ beschrieben.

Die von diesen lokalen Trivialisierungen induzierten Übergangsfunktionen $k_{F'}^F \in \mathcal{O}(U_F \cap U_{F'}, \mathrm{GL}(E))$, definiert durch die Bedingung $\varphi_{F'} \circ \psi_F(W, \xi) = (W, k_{F'}^F(W)\xi)$

für alle $W \in U_F \cap U_{F'}$ und $\xi \in E$, sind wegen der beinahe komponentenweisen Zerlegung von φ_F gegeben als

$$k^F_{F'}(W) = \mathrm{pr}^{F'}_E \circ (\mathrm{pr}^F_E\big|_W)^{-1}.$$

Bezeichnen wir wieder mit

$$1_B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : E \oplus F \to E \oplus F' \tag{3.3}$$

die Matrix der Identität auf B bezüglich der beiden Zerlegungen, so können wir die Übergangsfunktionen für den Graphen von $z \in \mathcal{L}(E, F)$ berechnen zu

$$\begin{aligned} k^F_{F'}(E_z) &= \mathrm{pr}^{F'}_E \circ (1 + z) && (3.4)\\ &= (1, 0)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} && (3.5)\\ &= a + bz. && (3.6) \end{aligned}$$

Nachdem die übliche Beschreibung des Tautologischen Bündels vorgeführt ist, wollen wir nun eine homogene Version finden.

3.1 Proposition. *Das Tautologische Bündel zu einem Banachraum B und einem komplementären Unterraum E von B ist das Assoziierte Vektorbündel*

$$\mathrm{Taut}(\mathrm{Gr}^E(B)) = \mathrm{GL}^1(B) \underset{K}{\times} E \tag{3.7}$$

mit Faser E zum Gruppenbündel $\mathrm{GL}^1(B)$ über $\mathrm{GL}^1(B)/K$, wobei K die Untergruppe der oberen Dreieckmatrizen bezüglich einer Zerlegung $B = E \oplus F$ ist. Diese operiert auf E durch

$$k\xi = a\xi, \tag{3.8}$$

wobei $k = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in K$ sein soll und $\xi \in E$. Die Identifikation 3.7 der beiden Bündel geschieht durch Gleichsetzen eines Elementes $[g, \xi]$ von $\mathrm{GL}^1(B)/K$ mit dem Element $(gE, g\xi)$ von $\mathrm{Taut}(\mathrm{Gr}^E(B))$.

3.2 Bemerkung. Wie Proposition 2.12 zeigt, spielt bei der Definition der Untergruppe K die Wahl der Zerlegung $B = E \oplus F$, bezüglich der die Dreiecksgestalt vorliegen soll, keine Rolle. Eine andere Möglichkeit wäre danach auch, K als den Stabilisator der $\mathrm{GL}^1(B)$-Aktion auf $\mathrm{Gr}^E(B)$ zu definieren. In dieser Beschreibung operiert K *per definitionem* auf E, da $kE = E$ ist für alle $k \in K$. Allerdings ist k

dabei als Abbildung in E aufzufassen. Gemeint ist genaugenommen $\mathrm{pr}_E \circ k \circ i_E = a$, wobei i_E die Einbettung $E \hookrightarrow B$ bezeichnet. Diese Definition von K hat eine invariante Form, benötigt aber die ganze Maschinerie der Grassmannschen, während das Assoziierte Bündel unabhängig davon existiert.

Beweis. Wir wissen schon aus (2.10), dass $\mathrm{GL}^1(B)/K = \mathrm{Gr}^E(B)$ ist. Insbesondere wird durch $(g, \xi) \mapsto (gE, g\xi)$ eine holomorphe Abbildung $\mathrm{GL}^1(B) \times E \to \mathrm{Taut}(\mathrm{Gr}^E(B))$ definiert, die außerdem invariant ist unter K, da auch $(gk, k^{-1}\xi)$ auf $(gkE, gkk^{-1}\xi) = (gE, g\xi)$ abgebildet wird. Sie induziert also eine holomorphe Abbildung $[g, \xi] \mapsto (gE, g\xi)$ auf dem homogenen Vektorbündel $\mathrm{GL}^1(B) \underset{K}{\times} E$. Wiederum nach (2.10) lässt sich eine Umkehrabbildung τ durch $(gE, \zeta) \mapsto [g, g^{-1}\zeta]$ angeben. Denn die Wahl von g zur Erzeugung des Unterraumes gE verschwindet gerade in der Äquivalenzklasse: Jedes anderes Gruppenelement, das auch gE als Bild von E liefert, ist von der Form gk mit einem Operator k aus $\mathrm{Stab}(E) = K$. Aber $[gk, (gk)^{-1}\zeta] = [gk, k^{-1}g^{-1}\zeta] = [g, g^{-1}\zeta]$. Auch die Umkehrabbildung ist holomorph, was wir unter den lokalen Trivialisierungen zeigen wollen. In (2.25) haben wir die Mengen U_F als Teilmengen des Quotienten $\mathrm{GL}^1(B)/K$ beschrieben, dessen Projektion wir kurzzeitig mit π_{GL} bezeichnen. Wir erhalten so das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_{\mathrm{GL}}^{-1}(U_F) \times E & \xrightarrow{\tilde{\tau}_F} & \mathrm{GL}^1(B) \times E \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_F \times E & \xrightarrow[\tau_F]{} & \mathrm{GL}^1(B) \underset{K}{\times} E \end{array}$$

mit der holomorphen Abbildung $\tilde{\tau}_F : (g, \xi) \mapsto (g, g^{-1}(\mathrm{pr}_E^{gE})^{-1}\xi)$. Dann ist auch die Abbildung $\tau_F : (gK, \xi) \mapsto [g, g^{-1}(\mathrm{pr}_E^{gE})^{-1}\xi]$ holomorph. In nichthomogener Schreibweise übersetzt sich nach (2.11) gK zu gE und wir haben mit τ_F gerade die oben angegebene Umkehrabbildung τ unter der lokalen Trivialisierung φ_F konstruiert: Es ist

$$\tau\big|_{\pi^{-1}(U_F)} = \tau_F \circ \varphi_F,$$

denn $\tau_F \circ \varphi_F(gE, \zeta) = \tau_F(gE, \mathrm{pr}_E^{gE}\zeta) = [g, g^{-1}\zeta]$. Damit haben wir eine biholomorphe Abbildung zwischen $\mathrm{Taut}(\mathrm{Gr}^E(B))$ und $\mathrm{GL}^1(B)/K$ gefunden, die offensichtlich ein Isomorphismus auf den Fasern ist. Die beiden Bündel sind folglich isomorph. $\square$

Wir berechnen auch die lokalen Trivialisierungen dieser homogenen Version.

3.3 Proposition. *Die lokalen Trivialisierungen* $\varphi_\sigma^E = (\pi, k_\sigma^E)$ *des homogenen Tautologischen Bündels* $\mathrm{GL}^1(B)\underset{K}{\times}E$ *sind gegeben durch*

$$k_\sigma^E([g,\xi]) = \begin{pmatrix} a\xi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

für $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}^1(B)$ *und* $\xi \in E$.

Beweis. Nach (1.13) ist $k_\sigma^E([g,\xi]) = k_\sigma(g)\xi$ und dies wird nach (2.26) zu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\xi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

3.2 Das Determinantenbündel

Wir wollen nun wie beim Tautologischen Bündel zuerst die klassische und geometrische Formulierung des Determinantenbündels über der Grassmannschen geben, um anschließend die abstraktere homogene darin wiederzufinden.

Für einen Vektorraum E der Dimension $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\operatorname{Det} E := \Lambda^n E \tag{3.10}$$

als die höchste äußere Potenz von E. Typischen Elemente sind endliche Summen von Produkten $\wedge_j \xi_j = \xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{n-1}$ der Länge n. $\operatorname{Det} E$ ist immer eindimensional. Entsprechend wollen wir für eine lineare Abbildung $a \in \mathcal{L}(E,F)$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen E und F eine lineare Abbildung $\operatorname{Det} a \in \mathcal{L}(\operatorname{Det} E, \operatorname{Det} F)$ definieren durch

$$\operatorname{Det}(a) \wedge_j \xi_j := \wedge_j a\xi_j. \tag{3.11}$$

Dann ist offensichtlich $\operatorname{Det}(ab) = \operatorname{Det}(a)\operatorname{Det}(b)$ und $\operatorname{Det}(1_E) = 1_{\operatorname{Det} E}$ und damit Det ein kontravarianter Funktor in der Kategorie der endlich-dimensionalen linearen Räume. Für $E = F$ ist außerdem $\operatorname{Det}(a) = \det a 1_{\operatorname{Det}(E)}$, das heißt bis auf eine Identifizierung von $\operatorname{Det} E$ und $\mathbb{C}$ die skalare Multiplikation mit der Determinante $\det a$.

Nehmen wir nun diese höchste äußere Potenz jeder Faser im Tautologischen Bündel, so erhalten wir das Determinantenbündel

$$\mathrm{Det}(\mathrm{Gr}^E(B)) = \mathrm{Det}(\mathrm{Taut}(\mathrm{Gr}^E(B))) = \bigcup_{W \in \mathrm{Gr}^E(B)} \{W\} \times \mathrm{Det}\, W \tag{3.12}$$

über der Grassmann-Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}^E(B)$. Nach den allgemeinen Prinzipien der Bündelkonstruktion auf den Fasern beinhaltet diese Definition die Bündelprojektion

$$\pi : \mathrm{Det}(\mathrm{Gr}^E(B)) \to \mathrm{Gr}^E(B),\ (W, \zeta) \to W$$

und die lokalen Trivialisierungen

$$\phi_F : \pi^{-1}(U_F) \to U_F \times \mathrm{Det}\, E,\ (W, \zeta) \mapsto (W, \mathrm{Det}(\mathrm{pr}^F_E\big|_W)\zeta).$$

Die Umkehrabbildung ψ_F lautet entsprechend

$$\psi_F(W, \xi) = (W, \mathrm{Det}(\mathrm{pr}^F_E\big|_W^{-1})\zeta) = (W, \mathrm{Det}(\mathrm{pr}^F_E\big|_W)^{-1}\zeta).$$

Die letzte Gleichheit gilt dabei wegen der Funktorialität von Det.

Die Übergangsfunktionen werden, wie sich leicht ablesen lässt, unter der Det-Konstruktion zu $k^F_{F'}(W) = \mathrm{Det}(\mathrm{pr}^{F'}_E)\,\mathrm{Det}(\mathrm{pr}^F_E\big|_W^{-1})$. Wendet man noch einmal die Funktoreigenschaft von Det an, so lässt sich dies weiter berechnen zu

$$k^F_{F'}(W) = \mathrm{Det}(\mathrm{pr}^{F'}_E\ \mathrm{pr}^F_E\big|_W^{-1}) \tag{3.13}$$

für $W \in U_F \cap U_{F'}$. Für einen Graphen $W = E_z$ von $z \in \mathcal{L}(E, F)$ ergibt das nach (3.4)

$$k^F_{F'}(E_z) = \mathrm{Det}(a + bz) = \det(a + bz)1_{\mathrm{Det}\, E}, \tag{3.14}$$

wobei a und b wie in 3.3 die E-Komponenten der Identitätsmatrix bezüglich der beiden Zerlegungen sind. Hier bezeichnet det die Determinante für endlich-dimensionale lineare Automorphismen.

Diese Beschreibung ist nicht geeignet für eine Verallgemeinerung auf unendliche Dimensionen im Banachraum-Fall. In dieser Situation gibt es keine *höchste* äußere Potenz und alle symmterischen Tensorprodukte $\Lambda^n B$ bleiben unendlich-dimensional – geschweige denn, dass sie zu Geraden würden. Wir haben also das Det-Konstrukt in der Definition des Bündels auszuschalten. Zwar brauchen wir die verallgemeinerte Konstruktion erst für das duale Determinantenbündel, das im nächsten Abschnitt angegangen werden soll, doch wollen wir schon hier eine flexiblere Form finden. Denn erstens ist die Struktur des Bündels im dualen Fall unübersichtlicher und zweitens braucht dann nur wieder das allgemeine Konstruktionsprinzip auf den Fasern herangezogen zu werden.

Zu einer solchen verallgemeinerbaren Beschreibung gelangt man bereits, wenn man berücksichtigt, dass $\operatorname{Det} E$ nur eindimensional ist. Dann gibt es nämlich einen *kanonischen* Isomorphismus

$$\mathcal{L}(\operatorname{Det} E) = \mathbb{C},$$

der $1_{\operatorname{Det} E}$ mit $1_{\mathbb{C}}$ identifiziert. Betrachten wir die oben behandelten Übergangsfunktionen $k^F_{F'}$ als $\mathbb{C}^\times$-wertig unter dieser Identifikation $\mathrm{GL}(\operatorname{Det} E) = \mathrm{GL}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$, so induzieren sie nach Satz 1.1 ein zum beschriebenen Determinantenbündel $\operatorname{Det}(\mathrm{Gr}^E(B))$ isomorphes Bündel mit Standardfaser $\mathbb{C}$ statt $\operatorname{Det} E$.

3.4 Bemerkung. Dieser Prozess spiegelt sich darin wider, die Faser $\operatorname{Det} E$ selbst mit $\mathbb{C}$ zu identifizieren – zwar nicht mehr kanonisch, doch zumindest auf eine natürliche Weise, wie kurz eingeschoben werden soll.

Wir konstruieren neue lokale Trivialisierungen

$$\varphi_F : \pi^{-1}(U_F) \to U_F \times \mathbb{C},\ (W, \wedge_j \zeta_j) \mapsto (W, \det(\mathrm{pr}^F_E\, \zeta_0, \ldots, \mathrm{pr}^F_E\, \zeta_{n-1})),$$

wobei wir $(\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1})$ als Isomorphismus $\mathbb{C}^n \to W$ auffassen, der $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})$ abbildet auf $\sum \lambda_j \zeta_j$. Außerdem identifizieren wir den – gewissermaßen – Mittelpunkt E von U_F mit $\mathbb{C}^n$ über irgendeine Basis $e_0, \ldots, e_{n-1}$ von E und die Standardbasis von $\mathbb{C}^n$. Dann ist det hier gemeint als die Determinante der $n \times n$-Matrix mit den Spalten $\mathrm{pr}^F_E\, \zeta_j$. Die inverse Abbildung ψ_F ist bestimmt durch

$$\psi_F(W, \lambda) = (W, \lambda \wedge_j \mathrm{pr}^F_E\big|_W^{-1} e_j).$$

Dies führt wie gewünscht zu den alten Übergangsfunktionen

$$\begin{aligned}\lambda \mapsto \det(&\mathrm{pr}^{F'}_E\, \mathrm{pr}^F_E\big|_W^{-1}(\lambda e_0), \mathrm{pr}^{F'}_E\, \mathrm{pr}^F_E\big|_W^{-1} e_1, \ldots, \mathrm{pr}^{F'}_E\, \mathrm{pr}^F_E\big|_W^{-1} e_{n-1})\\ &= \det(\mathrm{pr}^{F'}_E\, \mathrm{pr}^F_E\big|_W^{-1})\lambda \det(e_0, \ldots, e_{n-1})\\ &= k^F_{F'}(W)\lambda.\end{aligned}$$

Der homogene Zugang wird eine einfachere Möglichkeit zu Verfügung stellen, das Determinantenbündel auf unendliche Dimensionen zu erweitern. Wir haben das Determinantenbündel abstrakt über das Tautologische Bündel definiert und haben zugleich für dieses bereits eine homogene Beschreibung vorliegen. So möchten wir sehen, dass sich dessen homogene Fassung auf das Determinantenbündel überträgt. Die folgende Aussage, die diese Frage klärt, ist der Einfachheit halber nur für das Tensorprodukt formuliert, überträgt sich aber sofort auf das symmetrische und das alternierende Tensorprodukt.

3.5 Satz. *Werden nach den üblichen Prinzipien der faserweisen Konstruktion zwei Assoziierte Vektorbündel zum selben Hauptfaserbündel tensoriert, so gilt für das dadurch konstruierte Tensorbündel*

$$\mathcal{G}\underset{K}{\times}E \ \otimes\ \mathcal{G}\underset{K}{\times}F \ =\ \mathcal{G}\underset{K}{\times}(E\otimes F),$$

wobei die Operation von K auf $E\otimes F$ gegeben sei durch

$$k(\xi\otimes\eta) = k\xi\otimes k\eta.$$

Beweis. Wie in Lemma 1.22 gesehen, ist jedes Element einer Faser über gK von der Form $[g,\zeta]$. Daher können wir ein Element $[g,\xi]\otimes[g,\eta]$ der Faser über $\mathcal{G}\underset{K}{\times}E\otimes\mathcal{G}\underset{K}{\times}F$ identifizieren mit $[g,\xi\otimes\eta]$ in $\mathcal{G}\underset{K}{\times}(E\otimes F)$. Dies definiert offensichtlich einen Isomorphismus der Fasern und außerdem eine biholomorphe Abbildung γ zwischen den Bündeln, was unter den lokalen Trivialisierungen zu sehen ist:

$$\begin{tikzcd}
(\pi_E\otimes\pi_F)^{-1}(U_\sigma) \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "(\varphi_E)_\sigma\otimes(\varphi_F)_\sigma"'] & & \pi_{E\otimes F}^{-1}(U_\sigma) \arrow[dl, "(\varphi_{E\otimes F})_\sigma"] \\
& U_\sigma\times(E\otimes F) &
\end{tikzcd}$$

Das Diagramm kommutiert. Denn für $[g,\xi]\otimes[g,\eta]\in(\pi_E\otimes\pi_F)^{-1}(U_\sigma)$ erhält man auf der linken Seite unter der Trivialisierung $(\varphi_E)_\sigma\otimes(\varphi_F)_\sigma$ des Tensorbündels das Element $(gK, k_\sigma(g)\xi\otimes k_\sigma(g)\eta)$, welches mit dem Wert auf der rechten Seite, $(\varphi_{E\otimes F})_\sigma([g,\xi\otimes\eta]) = (gK, k_\sigma(g)(\xi\otimes\eta))$, übereinstimmt. Insgesamt ist γ damit ein Bündelisomorphismus. □

Genauso wie im klassischen Zugang lineare Konstruktionen auf den Fasern ausgeführt werden, geschieht das demnach auch im homogenen Fall. Hier steht dafür noch direkter eine Faser zur Verfügung, oder besser gesagt sind die Fasern dafür gewissermaßen isolierter.

3.6 Korollar. *Sei E ein endlich-dimensionaler Unterraum von B. Für das Determinantenbündel ergibt sich die homogene Beschreibung*

$$\mathrm{Det}(\mathrm{Gr}^E(B)) = \mathrm{GL}^1(B)\underset{K}{\times}\mathrm{Det}\,E. \tag{3.15}$$

Ein Element $k \in K$ mit der Zerlegung $k = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ operiert auf $\operatorname{Det} E$ *durch Multiplikation mit der Determinante* $\det a \in \mathbb{C}$ *der Matrix a,*

$$k\xi = \det a\xi. \tag{3.16}$$

Beweis. Wir haben in Proposition 3.1 bereits $\operatorname{Taut}(\mathrm{Gr}^E(B)) = \mathrm{GL}^1(B) \underset{K}{\times} E$ gezeigt, weshalb nach Satz 3.5 gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}(\mathrm{Gr}^E(B)) &= \operatorname{Det}(\operatorname{Taut}(\mathrm{Gr}^E(B))) \\ &= \operatorname{Det}(\mathrm{GL}^1(B) \underset{K}{\times} E) \\ &= \mathrm{GL}^1(B) \underset{K}{\times} \operatorname{Det} E. \end{aligned}$$

Die Operation ist ebenfalls mit Satz 3.5 gegeben durch $k\xi = \operatorname{Det}(a)\xi$. Aber $\operatorname{Det}(a)\xi = \det a\xi$. □

3.3 Das duale Determinantenbündel

Zu einem Vektorbündel $\mathcal{E}$ über M mit endlichdimensionaler Standardfaser E, Projektion π und lokalen Trivialisierungen $\varphi_\alpha = (\pi, k_\alpha) : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times E$ kann ein duales Vektorbündel $\mathcal{E}^\#$ konstruiert werden, dessen Fasern dual zu den Fasern von $\mathcal{E}$ sind. Wir setzen

$$\mathcal{E}^\# = \dot{\bigcup_{o \in M}} E_o^\# = \bigcup_{o \in M} \{o\} \times E_o^\#$$

und für die Bündelprojektion des dualen Bündels

$$\pi_\# : \mathcal{E}^\# \to M,\ (o, \lambda) \mapsto o.$$

Doch ist es komplizierter, natürliche lokale Trivialisierungen zu finden, da der naheliegende Weg, die dualen Abbildungen zu k_α heranzuziehen, wegen der Kontravarianz der Dualbildung zu einer Abbildung in die falsche Richtung führt. Aber wenn wir k_α auf eine Faser E_o über $o \in M$ einschränken, erhalten wir einen Isomorphismus $k_{\alpha,o} : E_o \cong E$ und wir können das Dual von dessen Inversen benutzen. So bekommen wir lokale Trivialisierungen

$$\varphi_\alpha^\# : \pi_\#^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times E^\#,\ (o, \lambda) \mapsto (o, (k_{\alpha,o}^{-1})^\# \lambda)$$

oder $\varphi_\alpha^\# = (\pi, k_\alpha^\#)$ mit $k_\alpha^\#(z, \lambda) = (k_{\alpha,o}^{-1})^\# \lambda = \lambda \circ k_{\alpha,o}^{-1}$. Deren Umkehrabbildungen $\psi_\alpha^\#$ sind dann gegeben durch

$$\psi_\alpha^\#(o, \mu) = (z, k_{\alpha,o}^\# \mu),$$

da Dualbildung und Inversion miteinander vertauscht. Damit berechnen wir die zugehörigen Übergangsfunktionen ${}^{\#}k^{\alpha}_{\beta}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} {}^{\#}k^{\alpha}_{\beta}(o) &= (k^{-1}_{\beta,o})^{\#}(k_{\alpha,o})^{\#} \\ &= (k_{\alpha,o} \circ k^{-1}_{\beta,o})^{\#} \\ &= (k^{\beta}_{\alpha}(o))^{\#}. \end{aligned}$$

Also gilt

$${}^{\#}k^{\alpha}_{\beta} = (k^{\beta}_{\alpha})^{\#}.$$

Zu beachten ist die Korrektur des Richtungswechsels, der durch die Dualbildung entsteht.

Wenden wir nun diese Konstruktion auf das (klassische) Determinantenbündel an, so erhalten wir das duale Determinantenbündel

$$\operatorname{Det}(\operatorname{Gr}^E(B))^{\#} = \dot{\bigcup_{W\in\operatorname{Gr}^E(B)}} \operatorname{Det}(W)^{\#} = \bigcup_{W\in\operatorname{Gr}^E(B)} \{W\} \times \operatorname{Det}(W)^{\#}. \tag{3.17}$$

Seine Projektion $\pi_{\#}$ ist wieder die Abbildung auf den Basispunkt. Die lokalen Trivialisierungen werden zu

$$\varphi^{\#}_F = (\pi_{\#}, k^{\#}_F) : \pi^{-1}_{\#}(U_F) \to U_F \times \operatorname{Det}(E)^{\#}$$

mit

$$k^{\#}_F(W, \lambda) = \operatorname{Det}(\operatorname{pr}^F_E\big|^{-1}_W)^{\#}\lambda.$$

Denn wir berechnen mit Resultaten des vorigen Abschnitts $k^{\#}_F(W, \lambda) = (k^{-1}_{F,W})^{\#}\lambda = \lambda \circ k^{-1}_{F,W} = \lambda \circ \operatorname{Det}(\operatorname{pr}^F_E\big|^{-1}_W)$. Die Übergangsfunktionen ${}^{\#}k^F_{F'}$ erhalten wir nach (3.13) für $W \in U_F \cap U_{F'}$ als

$${}^{\#}k^F_{F'}(W) = \operatorname{Det}(\operatorname{pr}^F_E \operatorname{pr}^{F'}_E\big|^{-1}_W). \tag{3.18}$$

Es soll noch einmal daran erinnert sein, dass gegenüber der Formel für die Übergangsfunktionen des Determinantenbündels hier F und F' vertauscht sind aufgrund der Inversion bei der Dualbildung. Um die Übergangsfunktionen in einem Graphen $E_z \in U_F \cap U_{F'}$ von $z \in \mathcal{L}(E, F)$ zu bestimmen, ist es nützlicher einen Schritt zurückzugehen. Wir haben ${}^{\#}k^F_{F'}(E_z) = (k^F_{F'}(E_z)^{-1})^{\#}$, was nach (3.13) $(\operatorname{Det}(a + bz)^{-1})^{\#} = (\det(a + bz)^{-1} 1_{\operatorname{Det} E})^{\#}$ ergibt. Also gilt

$${}^{\#}k^F_{F'}(E_z) = \det(a + bz)^{-1} 1_{\operatorname{Det}(E)^{\#}}. \tag{3.19}$$

Die Übergangsfunktionen operieren folglich auf den Fasern des dualen Determinantenbündels durch die invertierten Übergangsfunktionen des Determinantenbündels selbst. Oder anders ausgedrückt erhält man durch Invertierung seiner Übergangsfunktionen das duale Bündel.

Dasselbe Prinzip wird sich auch in der homogenen Formulierung wiederfinden, die wir jetzt untersuchen wollen.

3.7 Satz. *Zu einem Assoziierten Bündel $\mathcal{G}\underset{K}{\times}E$ können wir ein neues homogenes Bündel $\mathcal{G}\underset{K}{\times}E^\#$ konstruieren, indem wir K auf $E^\#$ wie üblich koadjungiert operieren lassen. Das heißt, wir setzen für $k \in K$ und eine Linearform $\lambda \in E^\#$*

$$k\lambda := (k^{-1})^\#\lambda = \lambda \circ k^{-1}. \tag{3.20}$$

Dann gilt

$$(\mathcal{G}\underset{K}{\times}E)^\# = \mathcal{G}\underset{K}{\times}E^\#.$$

Auch für die Dualbildung ist also die faserweise Konstruktion neuer Bündel kompatibel mit dem homogenen Zugang der Hauptfaserbündel und ihrer Assoziierten Bündel.

Beweis. Zu einem Element $[p, \lambda] \in \mathcal{G}\underset{K}{\times}E^\#$ definieren wir eine Linearform $\mu_{[p,\lambda]}$ auf der Faser über pK von $\mathcal{G}\underset{K}{\times}E$ durch

$$\mu_{[p,\lambda]}[p, \xi] := \lambda\xi. \tag{3.21}$$

Das ist möglich, weil in Anbetracht von Lemma 1.22 λ und ξ eindeutig bestimmt sind durch die Festlegung von p. Dann definiert $\mu([p, \lambda]) := (pK, \mu_{[p,\lambda]})$ eine fasertreue lineare Abbildung μ auf $(\mathcal{G}\underset{K}{\times}E)^\#$.

Um zu sehen, dass μ auf den Fasern der beiden Bündel einen Isomorphismus ergibt, konstruieren wir eine inverse Abbildung. Sei μ eine Linearform auf einer Faser von $\mathcal{G}\underset{K}{\times}E$ über einem Punkt $o \in \mathcal{G}/K$. Für $p \in \mathcal{G}$ mit $pK = o$ definieren wir dazu eine Linearform $\lambda_p(\mu)$ auf E durch

$$\lambda_p(\mu)\xi := \mu[p, \xi].$$

Dann gilt die Beziehung $\lambda_{pk} = k^{-1}\lambda_p$, denn $\lambda_{pk}(\mu)\xi = \mu[pk, \xi] = \mu[p, k\xi] = \lambda_p(k\xi) = (k^{-1}\lambda_p)\xi$. Daher ist $[p, \lambda_p(\mu)]$ ein wohldefiniertes Element der o-Faser im Bündel $\mathcal{G}\underset{K}{\times}E^\#$. Die Zuordnung ist auch invers zu der in (3.21): Denn einerseits haben wir $\lambda_p(\mu_{[p,\lambda]})\xi = \mu_{[p,\lambda]}[p,\xi] = \lambda\xi$, das heißt $[p, \lambda_p(\mu_{[p,\lambda]})] = [p, \lambda]$. Und andererseits gilt $\mu_{[p,\lambda_p(\mu)]}[p,\xi] = \lambda_p(\mu)\xi = \mu[p,\xi]$, also auch $\mu_{[p,\lambda_p(\mu)]} = \mu$.

Um zu sehen, dass μ ein Bündelisomorphismus ist, haben wir außerdem zu zeigen, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (\pi_E)_\#^{-1}(U_\sigma) \arrow[dr, "(\varphi_\sigma^E)^\#"'] & & \pi_(E^\#)^{-1}(U_\sigma) \arrow[ll, "\mu"'] \arrow[dl, "\varphi_\sigma^{(E^\#)}"] \\ & U_\sigma \times E^\# & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Beginnen wir rechts oben. Für $[p,\lambda] \in \pi_(E^\#)^{-1}(U_\sigma)$ ergibt der kurze Weg $\varphi_\sigma^{(E^\#)}([p,\lambda]) = [pK, k_\sigma^{(E^\#)}([p,\lambda])] = [pK, k_\sigma(p)\lambda]$ nach (1.13). Über den längeren Weg erhalten wir außerdem $(\varphi_\sigma^E)^\# \circ \mu([p,\lambda]) = (\varphi_\sigma^E)^\#((pK, \mu_{[p,\lambda]})) = (pK, (k_\sigma^E)^\#((pK, \mu_{[p,\lambda]})))$. Es ist also zu bestätigen, dass die beiden zweiten Komponenten übereinstimmen. Zuvor bemerken wir, dass

$$(k_{\sigma,pK}^E)^{-1}\xi = [pK, k_\sigma(p)\xi]$$

ist, denn $k_\sigma^E([pK, k_\sigma(p)^{-1}\xi]) = k_\sigma(p)k_\sigma(p)^{-1}\xi = \xi$. Wenden wir damit die zuletzt angegebene Komponente an auf ein $\xi \in E$, so können wir dies umformen in den Ausdruck $(k_\sigma^E)^\#((pK, \mu_{[p,\lambda]}))\xi = \left((k_{\sigma,pK}^E)^{-1}\right)^\#(\mu_{[p,\lambda]}) = \mu_{[p,\lambda}((k_{\sigma,pK}^E)^{-1}\xi) = \mu_{[p,\lambda]}[pK, k_\sigma(p)^{-1}\xi] = \lambda(k_\sigma(p)^{-1}\xi)$. Diese zweite Komponente reduziert sich also auf $\lambda \circ k_\sigma(p)^{-1}$, was nach Definition der K-Aktion auf $E^\#$ mit $k_\sigma(p)^{-1}\lambda$, also mit der zuerst angegebenen Komponente übereinstimmt. □

Als eine Folgerung erhalten wir nun direkt das gewünschte Resultat:

3.8 Korollar. *Das duale Determinantenbündel über der Grassmann-Mannigfaltigkeit* $\mathrm{Gr}^E(B)$ *zu einem endlich-dimensionalen Unterraum E eines Banachraumes B ist homogen unter der Gruppe* $\mathrm{GL}^1(B)$. *Es gilt*

$$\mathrm{Det}(\mathrm{Gr}^E(B))^\# = \mathrm{GL}^1(B) \underset{K}{\times} \mathrm{Det}(E)^\#.$$

Die Operation der Gruppe K = $\mathrm{Stab}(E)$ *der oberen Dreieckmatrizen bezüglich einer Zerlegung $B = E \oplus F$ auf der Standardfaser* $\mathrm{Det}(E)^\#$ *ist gegeben durch*

$$k\lambda = \det a^{-1}\lambda \tag{3.22}$$

für $k = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in K$ *und* $\lambda \in \mathrm{Det}(E)^\#$.

Beweis. Nach Satz 3.7 über das duale Bündel ist $\mathrm{GL}^1(B)\underset{K}{\times}\mathrm{Det}(E)^\# = (\mathrm{GL}^1(B)\underset{K}{\times}\mathrm{Det}\,E)^\#$, was wir aber nach Korollar 3.6 mit $\mathrm{Det}(\mathrm{Gr}^E(B))^\#$ identifizieren können. Für die Wirkung von $k \in K$ auf $\lambda \in \mathrm{Det}(E)^\#$ liefern die beiden Sätze auch die letzte Behauptung, denn für $\xi \in \mathrm{Det}\,E$ gilt $(k\lambda)\xi = \lambda(k^{-1}xi) = \lambda(\det a^{-1}\xi) = \det a^{-1}\lambda\xi$, also tatsächlich $k\lambda = \det a^{-1}\lambda$. □

3.4 Das Hilbert-Schmidt-Determinantenbündel

Wie wir in (3.16) und (3.22) gesehen haben, ist die Operation von K auf $\mathrm{Det}(E)$ und $\mathrm{Det}(E)^\#$ nur durch eine skalare Multiplikation gegeben: Ein Element $k \in K$ mit der Zerlegung $k = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ wirkt durch Multiplikation mit $\det a$ im Fall von $\mathrm{Det}\,E$ und mit $\det a^{-1}$ im dualen Fall $\mathrm{Det}(E)^\#$. Dieses Resultat gibt uns die Möglichkeit, die eindimensionalen Fasern $\mathrm{Det}\,E$ und $\mathrm{Det}(E)^\#$ durch $\mathbb{C}$ zu ersetzen. Das Assoziierte Bündel

$$\mathrm{GL}^1(B)\underset{K}{\times}\mathbb{C}$$

ergibt dann ebenfalls das Determinantenbündel, wenn wir die Gruppe K auf der Faser $\mathbb{C}$ durch Multiplikationen mit $\det a(k)$ operieren lassen für $k \in K$, und das duale Determinantenbündel bei der Multiplikation mit $\det a(k)^{-1}$.

Diese Formulierung des Determinantenbündels ist nun frei von Endlichkeitsbedingungen an E, da die Det-Konstruktion ausgeschaltet ist. Wir brauchen lediglich eine Determinante der linken oberen Ecke $a(k) \in \mathrm{GL}(E)$ der Operatoren k aus K. Im Fall der Hilbert-Schmidt-Grassmannschen $\mathrm{Gr}_2(H)$ aus Abschnitt 2.3.4 reduzierte sich die Gruppe G, unter der die Mannigfaltigkeit homogen ist, gerade auf Operatoren, die eine solche Determinante besitzen: Sie sind von der Form 1 plus Spurklasse.

Diese Überlegungen auf der Basis der vorangegangen Abschnitte rechtfertigen die folgende Definition. Wir benutzen die Bezeichnungen des Abschnitts 2.3.4. Insbesondere seien

$$G = \bigcup_{d\in\mathbb{Z}} s^d G^0 \sqsubset \mathrm{GL}_2(H)$$

und G^0 die Untergruppe aller Operatoren g in $\mathrm{GL}_2(H)$ mit Matrixzerlegung $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bezüglich der festen Orthogonalzerlegung $H = H_+ \oplus H_-$, so dass die Diagonalkomponenten a und d eine Determinante besitzen. Dann ist der Stabilisator K der transitiven G-Operation auf $\mathrm{Gr}_2(H)$ enthalten in G^0. Für $k \in K$ hat also $a(k)$ eine Determinante.

3.9 Definition. *Das Determinantenbündel über der Hilbert-Schmidt-Grassmannschen ist das Assoziierte Geradenbündel*

$$\mathrm{Det}(\mathrm{Gr}_2(H)) := G \underset{K}{\times} \mathbb{C} \tag{3.23}$$

mit der Operation von K auf der Faser $\mathbb{C}$, die für $k \in K$ gegeben ist durch die komplexe Multiplikation mit $\det a(k)$.

Analog zu Korollar 3.8 erhalten wir nach Satz 3.7 folgenden

3.10 Satz. *Das duale Determinantenbündel über der Hilbert-Schmidt-Grassmannschen ist gegeben als*

$$\mathrm{Det}(\mathrm{Gr}_2(H))^{\#} := G \underset{K}{\times} \mathbb{C} \tag{3.24}$$

mit der K-Operation auf $\mathbb{C}$, in der $k \in K$ wie die Multiplikation mit $\det a(k)^{-1}$ *wirkt.*

3.11 Bemerkung. Blicken wir noch einmal zurück auf diese Konstruktion des Determinantenbündels, so ist zu sehen, dass die Problematik der unendlichen Dimensionen weg vom Det-Konstrukt auf den schon gelösten Fall einer Operator-Determinante det verschoben wurde. Dieser Weg wird durch die homogene Beschreibung erleichtert, da sich dort die Faser besonders klar herauskristallisiert: Die einzelnen Fasern sind gerade über die Standardfaser definiert. Und die relevante Komponente der Trivialisierungen wirkt wie die Übergangsfunktionen als Element der Strukturgruppe auf der Standardfaser. Das heißt in (1.13) $k_\sigma^F[p,\xi] = k_\sigma(p)\xi$ mit den Bezeichnungen des ersten Kapitels.

Die Vorteile des homogenen Zugangs zeigen sich aber noch deutlicher in der folgenden Untersuchung der Schnitte, der das nächste und zentrale Kapitel gewidmet ist.

4 Fockraum und holomorphe Schnitte

Wie in Proposition 1.28 gesehen, können wir Schnitte eines homogenen Bündels $\mathcal{G}\underset{K}{\times}F$ aus äquivarianten Funktionen auf $\mathcal{G}$ mit Werten in der Faser F konstruieren. Genauer ist zu einer Funktion $\tilde{\phi} \in \mathcal{O}(\mathcal{G}, F)$ ein Schnitt $\phi \in \mathcal{O}(\mathcal{G}/K, \mathcal{G}\underset{K}{\times}F)$ gegeben durch $\phi(gK) = [g, \tilde{\phi}(g)]$. Dieser Ausdruck ist genau dann sinnvoll, wenn $\tilde{\phi}$ die Funktionalgleichung $\tilde{\phi}(pk) = k^{-1}\tilde{\phi}(p)$ aus (1.19) erfüllt.

Im Fall des Determinantenbündels $G\underset{K}{\times}\mathbb{C} = \mathrm{Det}(\mathrm{Gr}_2(h))^\#$ über $\mathrm{Gr}_2(H) = G/K$ (siehe (2.23) und (3.23)) lautet diese Bedingung an eine Funktion $\tilde{\phi} \in \mathcal{O}(G, \mathbb{C})$

$$\tilde{\phi}(gk) = \det a(k)^{-1}\tilde{\phi}(g) \tag{4.1}$$

für alle $g \in G$ und $k \in K$. Diese Gleichung hat keine von null verschiedenen Lösungen wegen des Exponenten -1. Eine Lösung der Form $\tilde{\phi}(g) = \det a(g)^{-1}$ ist nicht möglich, da $a(g)$ nicht für jedes $g \in G$ invertierbar sein muss – während das wegen der verschwindenden c-Komponente für die Elemente $k \in K$ immer der Fall ist.

Folglich ist nach Proposition 1.28 der Raum der holomorphen Schnitte im Determinantenbündel trivial.

Lässt man den Exponenten weg, so erhält man die Äquivarianzbedingung

$$\tilde{\phi}(gk) = \det a(k)\tilde{\phi}(g) \tag{4.2}$$

für das Assoziierte Bündel $G\underset{K}{\times}\mathbb{C}$ mit der K-Operation $\det a^{-1}$ auf $\mathbb{C}$. Das ist nach den Überlegungen des vorangegangenen Kapitels das duale Determinantenbündel über der Grassmannschen. Diese Gleichung besitzt Lösungen. Eine erste können wir direkt angeben, denn für die Determinante selbst gilt ja solch eine Produktformel. Und wegen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

ist $a(gk) = a(g)a(k)$. Für $g \in G^0$ besitzt $a(g)$ nach Definition eine Determinante und wir setzen

$$\tilde{\phi}_0(g) := \det a(g) \tag{4.3}$$

für $g \in G^0$ und $\tilde{\phi}_0 := 0$ auf den anderen Zusammenhangskomponenten $G^d = s^d G^0$ von G. Da K in G^0 enthalten ist, gilt $G^d K \subset G^d G^0 \subset G^d$. Daher liegt gk in derselben Komponente wie g, weshalb $\tilde{\phi}_0$ die Funktionalgleichung erfüllt und wir einen globalen Det$^\#$-Schnitt ϕ_0 auf der Grassmannschen erhalten. Wie wir sehen werden, ist der Raum der holomorphen Schnitte

$$\mathcal{O}(\mathrm{Gr}_2(H), \mathrm{Det}^\#) := \mathcal{O}(\mathrm{Gr}_2(H), \mathrm{Det}^\#(\mathrm{Gr}_2(H))) \tag{4.4}$$

ein unendlich-dimensionaler Vektorraum. Er enthält eine dichte Einbettung des Fockraumes, den wir zuerst beschreiben und in eine handhabbare Form bringen wollen, bevor wir die Einbettung konstruieren.

4.1 Der Fockraum

Unter dem Fockraum versteht man in der Physik den Phasenraum eines quantisierten Lagrange-Funktionals. Eine klassische Langrange-Funktion beschreibt die Teilchen einer physikalischen Theorie als ihre Extrema – ein wenig verkürzt die Nullstellen ihrer Ableitung. Auf diese Weise erhält man einen Hilbertraum H. Quantisieren der Lagrange-Gleichung entspricht im Fermionen-Fall dem Übergang zur äußeren Algebra

$$\Lambda H = \bigoplus \Lambda^p H.$$

Genauer gesagt, erhält man den fermionischen Fockraum

$$\hat{\Lambda}(H_+ \oplus \bar{H}_-) = \Lambda(H_+) \hat{\otimes} \Lambda(\bar{H}_-),$$

wobei H zerlegt wird in die Zustände positiver und negativer Energie $H_\pm$. Im Bosonen-Fall ergibt sich eine Summe aus Symmetrischer Algebren, die aber hier keine Rolle spielt.

Auf natürliche Weise trägt die äußere Algebra eines Hilbertraumes H ein inneres Produkt, unter dem die Komponenten $\Lambda^p(H)$ orthogonal sind. Innerhalb einer solchen Komponente ist es gegeben durch

$$\langle h_0 \wedge \cdots \wedge h_{p-1} | h'_0 \wedge \cdots \wedge h'_{p-1} \rangle = \det(\langle h_i | h'_j \rangle). \tag{4.5}$$

4.1 Satz. *Ist* $\{e_j \,:\, j \in \mathbb{Z}\}$ *eine Orthonormalbasis des Hilbertraumes H, so ist durch die Vektoren*

$$e_P := e_{j_0} \wedge \cdots \wedge e_{j_{p-1}}$$

für $P = \{j_0, \ldots, j_{p-1}\}$ *mit* $j_0 < \cdots < j_{p-1}$ *ein maximales Orthonormalsystem in* ΛH *gegeben.*

Allerdings ist ΛH nicht vollständig, so dass man nicht von einer Orthonormal*basis* sprechen kann. Denn die äußere Algebra enthält lediglich endliche Summen solcher Produkte. Wir haben aber folgendes

4.2 Korollar. *Für einen Hilbertraum H mit einer Orthonormalbasis aus Vektoren $e_j \in H$ für $j \in \mathbb{Z}$ ist durch die Vektoren $e_P \in \Lambda H$ mit endlichen Teilmengen P von $\mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis der Vervollständigung der äußeren Algebra von H gegeben. Das heißt*

$$\hat{\Lambda} H = \langle e_P \,:\, |P| < \infty \rangle_\infty.$$

Es ist klar, dass die Vektoren e_P ein Orthonormalsystem bezüglich des in (4.5) definierten inneren Produktes bilden. Wir beweisen die Aussage des Korollars, ohne den Satz zu benutzen, denn hierbei ist mehr von der Struktur des Fockraumes zu sehen. Daraus folgt umgekehrt die Maximalitätsaussage des Satzes.

Beweis. Für $p \leqslant \infty$ sei $E_p := \langle e_P \,:\, |P| < p \rangle$. Dann ist $\hat{E}_p = \langle e_P \,:\, |P| < p \rangle_\infty$. Wir beobachten, dass E_∞ in ΛH enthalten ist, weil die Elemente von E_∞ endliche Summen endlicher Dach-Produkte sind. Dann gilt auch

$$\hat{E}_\infty \sqsubset \hat{\Lambda} H. \tag{4.6}$$

Umgekehrt beweisen wir durch Induktion $\Lambda^p H \sqsubset \hat{E}_p$. Für $p = 0$ gilt $\Lambda^0 H = \mathbb{C} = E_0 = \hat{E}_0$. Sei nun $\Lambda^p H \sqsubset \hat{E}_p$ und $\zeta \in \Lambda^p H$ sowie $\xi \in H$. Nach Induktionsannahme ist $\zeta = \sum \zeta^P e_P$. Außerdem ist $\xi = \sum \xi^j j e_j$. Definieren wir ζ_n und ξ_n als die endlichen Ausschnitte dieser Summen über alle P mit $|P| < n$ beziehungsweise über alle j mit $|j| < n$, so gilt $\lim \zeta_n = \zeta$ und $\lim \xi_n = \xi$. Dann konvergiert auch $\zeta_n \wedge \xi_n$ gegen $\zeta \wedge \xi$ in $\Lambda^{p+1} H$. Auf der anderen Seite sind die Produkte $\zeta_n \wedge \xi_n = (\sum^n \xi^P e_P) \wedge (\sum^n \xi^j e_j) = \sum^n \zeta^P \xi^j (e_P \wedge e_j)$ Elemente von E_{p+1}. Da nach (4.6) $\hat{E}_{p+1}$ im Hausdorff-Raum $\hat{\Lambda} H$ enthalten ist und die Folge dort konvergiert, muss der Limes $\zeta \wedge \xi$ auch schon in der Vervollständigung $\hat{E}_{p+1}$ von E_{p+1} liegen. Ein allgemeines Element von $\Lambda^{p+1} H$ ist eine Summe solcher Produkte $\zeta \wedge \xi$ und daher auch in $\hat{E}_{p+1}$ enthalten. Damit ist die Induktion beendet. Benutzen wir nun dieses Ergebnis $\Lambda^p H \sqsubset \hat{E}_p$, so erhalten wir

$$\Lambda H = \bigoplus_p \Lambda^p H \sqsubset \bigoplus_p \hat{E}_p \sqsubset \hat{E}_\infty,$$

weshalb schließlich auch $\hat{\Lambda} H \sqsubset \hat{E}_\infty$ gilt. $\square$

4.3 Bemerkung. Die auftretenden Limiten sind zu verstehen als Grenzwerte bezüglich der Konvergenz im Netz der endlichen Teilmengen.

Unter dem Fockraum sei hier immer die Vervollständigung der äußeren Algebra über $H_+ \oplus \bar{H}_-$ verstanden.

4.2 Holomorphe Schnitte im dualen Determinantenbündel

In diesem Abschnitt geben wir einen Beweis des folgenden Hauptsatzes dieser Arbeit durch eine explizite Konstruktion von Schnitten.

4.4 Theorem. *Es gibt eine Einbettung*

$$\Phi : \hat{\Lambda}(H_+ \oplus \bar{H}_-) \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathrm{Gr}_2(H), \mathrm{Det}^\#) \tag{4.7}$$

des Fockraumes in den Raum der holomorphen Schnitte im dualen Determinantenbündel über der Hilbert-Schmidt-Grassmannschen $\mathrm{Gr}_2(H)$ *zur Orthogonalzerlegung* $H = H_+ \oplus H_-$. *Das Bild dieser Einbettung ist der dichte Unterraum*

$$\Phi(\hat{\Lambda}(H_+ \oplus \bar{H}_-)) = \mathcal{O}^2(\mathrm{Gr}_2(H), \mathrm{Det}^\#), \tag{4.8}$$

der Bergmannraum der quadratintegrierbaren holomorphen Schnitte bezüglich eines geeigneten Maßes auf $\mathrm{Gr}_2(H)$.

4.5 Bemerkung. Nach Pickrell [6] schlägt die naheliegende Definition fehl, ein inneres Produkt durch Integration über die lokalen inneren Produkte $\phi\bar{\phi}'$ des hermiteschen Bündels $\mathrm{Det}^\#$ zu erhalten. Er konstruiert statt dessen eine Familie von Zylindermaßen μ_s, so dass das innere Produkt, gegeben durch

$$\langle \phi | \phi' \rangle = \int \frac{\phi\bar{\phi}'}{|\phi_0|^2} d\mu_1,$$

mit dem von der Einbettung Φ induzierten inneren Produkt übereinstimmt. Dabei ist ϕ_0 der in (4.3) angegebene holomorphe Schnitt von $\mathrm{Det}^\#$. Bezüglich dieses Maßes ist die Quadratintegrierbarkeit im Theorem zu verstehen. Dieses Resultat soll hier nur zitiert werden.

Wir wenden uns nun der Konstruktion der Einbettung Φ zu. Nach Korollar 4.2 ist eine Orthonormalbasis des Fockraums $\hat{\Lambda}(H_+ \oplus \bar{H}_-)$ gegeben durch die Vektoren $e_{PQ} := e_P \wedge \bar{e}_Q$ für endliche Indexmengen P natürlicher Zahlen und endliche Mengen Q negativer ganzer Zahlen. Um die Notation eingängiger zu machen, schreiben wir $\mathbb{Z}_+$ für $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}_-$ für $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Dann indiziert $\mathbb{Z}_\pm$ gerade die Basis von $H_\pm$. Wir wollen Φ definieren, indem wir zu jedem dieser Vektoren, das heißt zu jeder dieser Indexmengen P und Q, einen holomorphen Schnitt ϕ^{PQ} als dessen Bild unter Φ angeben. Die Einbettung Φ für ein allgemeines Element $\sum \lambda_{PQ} e_{PQ}$ des Fockraumes mit einer L^2-Folge von Koeffizienten λ_{PQ} ist dann gegeben durch

$$\Phi(\sum_{P,Q} \lambda_{PQ} e_{PQ}) := \sum_{P,Q} \lambda_{PQ} \phi_{PQ},$$

die Fortsetzung im Sinn von Orthonormalbasen. Wie schon zuvor sind die Summationen und Konvergenzen bezüglich des Netzes der endlichen Teilmengen aufzufassen.

Um durch dieses Verfahren eine lineare Einbettung zu erhalten, müssen allerdings zwei Bedingungen erfüllt sein. Erstens ist dazu notwendig, dass die Schnitte ϕ_{PQ} als ein Orthonormalsystem in $\mathcal{O}(\mathrm{Gr}_2(H), \mathrm{Det}^\#)$ aufgefasst werden können. Da der gesamte Schnittraum keine unitäre Struktur trägt und das Bild von Φ mit dem induzierten inneren Produkt ausgestattet sein soll, heißt das nur, dass die zu konstruierenden Schnitte ϕ^{PQ} als Bild der Basis linear unabhängig sind.

Zweitens müssen auch die unendlichen Summen, die im Erzeugnis der Orthonormalbasis entstehen, holomorph sein. Interpretieren wir nach Bemerkung 4.5 die konstruierten Schnitte als Elemente eines Bergmannraumes, so ist klar, dass die Reihen weiterhin holomorph sind, da die holomorphen Funktionen in L^2 eine abgeschlossene Unteralgebra bilden [3, Seite 364]. Allerdings gilt diese Aussage nur für endlich-dimensionale Räume, weshalb die Limiten nur schwach holomorph sind, das heißt auf endlich-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten holomorph. Ob unendliche Summen von Schnitten ϕ^{PQ} auch im starken Sinn holomorph sind, also komplex differenzierbar bezüglich der Banachmetriken auf $\mathrm{Det}^\#$ und $\mathrm{Gr}_2(H)$, muss hier eine offene Frage bleiben.

Wir beginnen mit der Konstruktion einer Funktion $\tilde{\phi}^{PQ} \in \mathcal{O}(G, \mathbb{C})$ zu endlichen Mengen $P \subset \mathbb{N}$ und $Q \subset \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, die dann einen Schnitt ϕ^{PQ} induziert. Die Idee ist, in der Komponente $a(g)$ eines Gruppenelementes $g \in G$ die Zeilen, die durch P indiziert werden, auszutauschen gegen die durch Q indizierten Zeilen aus der c-Komponente. Dieser Prozess soll durch eine lineare Transformation t^{PQ} beschrieben werden. Wir werden sehen, dass $t^{PQ} g$ dann ein Element von G^0 ist, auf welches der schon gefundene Schnitt ϕ_0 aus (4.3) angewendet werden kann, so dass schließlich

$$\phi^{PQ} = \det a(t^{PQ} g)$$

sein wird.

Um den Operator t^{PQ} zu beschreiben, definieren wir eine entsprechende Umordnung der ganzen Zahlen

$$(n_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z}_- \setminus Q,\ P;\ Q,\ \mathbb{Z}_+ \setminus P). \tag{4.9}$$

Dabei sollen die Mengenelemente jeweils in ihrer natürlichen Reihenfolge aufgezählt werden, und zwar so, dass hinter dem Semikolon in der Mitte der Index 0 steht. Bezeichnen wir mit p und q die Mächtigkeiten von P beziehungsweise Q, so heißt das zum Beispiel $n_0 = \min Q$, $n_{-1} = \max P$ und $n_q = \min(\mathbb{Z}_+ \setminus P)$. Formal exakt wäre, n_i für $i \geqslant 0$ festzulegen durch die Beziehung $Q = \{n_0, \dots, n_{q-1}\}$ und $\mathbb{Z}_+ \setminus P = \{n_q, n_{q+1}, \dots\}$ sowie der Forderung $n_i < n_{i+1}$.

Als wichtige Kennzeichnung der Mengen P und Q definieren wir

$$d := p - q. \tag{4.10}$$

Abweichend von der üblichen Konvention $\max\emptyset = -\infty$ wollen wir $\max P = -1$ setzen, falls P leer ist – was dieselbe Funktion erfüllt, die folgenden Formeln jedoch kürzer formulieren lässt. Entsprechend sei $\min Q = 0$, wenn Q leer sein sollte.

4.6 Lemma. *Ist $i > r_{PQ} := \max P - d$ oder $i < \min Q + d$, so gilt $n_i = i + d$.*

Beweis. Sei zuerst Q leer, also $q = 0$. Nach Konstruktion haben wir für $i \in \mathbb{Z}_+$ stets $n_i = i + p$, sobald $i > maxP - p$ ist. Und wenn wir eine beliebige Menge Q einfügen, ergibt das eine entgegengerichtete Verschiebung um q. Das heißt $n_i = i + p - q$ falls $i > \max P - p + q$ ist, also die Behauptung. □

Sei nun t^{PQ} der Operator auf H mit den Matrixeinträgen

$$(t^{PQ})^i_j := \delta^{n_i}_j \tag{4.11}$$

in Zeile i und Spalte j bezüglich der Orthonormalbasis e_i. Dabei bezeichnen wir mit δ^i_j das Kronecker-Symbol.

Proposition. *Der Operator $t^{PQ}s^d$ gehört zu G^0. Insbesondere gilt*

$$t^{PQ}G^d \subset G^0.$$

Beweis. Es ist $(t^{PQ*}t^{PQ})_{ij} = \sum \delta_{in_k}\delta_{n_k i} = \delta_{ij}$ und daher t^{PQ} unitär. Damit ist das Produkt $t^{PQ}s^d$ invertierbar. Die Matrix des Shiftoperators s^d ist gegeben durch die Einträge $(s^d)^i_j = \delta^i_{j+d} = \delta^{i-d}_j$. Wir berechnen damit

$$(t^{PQ}s^d)^i_j = \sum_k \delta^{n_i}_k \delta^k_{j+d} = \delta^{n_i}_{j+d}. \tag{4.12}$$

Nach Lemma 4.6 ist für Indizes i von großem Betrag immer $n_i = i + d$. Die Matrixeinträge des Produktes sind also weit oben und unten $\delta^{i+d}_{j+d} = \delta^i_j$, so dass die Matrix nur in endlich vielen Zeilen von der Einheitsmatrix abweicht. Als invertierbarer Operator vom Typ $1 + \mathcal{F}$ gehört $t^{PQ}s^d$ daher zu G^0.

Daraus folgt die letzte Behauptung, da die Elemente von G^d von der Form $s^d g$ sind mit $g \in G^0$. Multiplikation mit t^{PQ} ergibt demnach $t^{PQ}(s^d g) = (t^{PQ}s^d)g \in G^0G^0 = G^0$. □

Wir können also eine Funktion $\tilde{\phi}^{PQ}$ auf G definieren, indem wir für $g \in G^d$

$$\tilde{\phi}^{PQ}(g) := \det a(t^{PQ}g) \tag{4.13}$$

setzen und sie auf den anderen Komponenten als konstant null definieren.

4.7 Bemerkung. Die Funktionen $\tilde{\phi}^{PQ}$ entsprechen in der einschlägigen Literatur den verallgemeinerten Plücker-Koordinaten π_S mit $S := \mathbb{N} \setminus P \cup Q$. Man vergleiche etwa [7, Seiten 110, 115], [6] oder [5]. Dort wird der in Proposition 2.29 beschriebene Zugang benutzt und eine sogenannte zulässige Basis eines Unterraumes W bestimmt als ein Isomorphismus $w : H_S \to W$, wobei H_S zur Orthonormalbasis der von S indizierten Basis-Vektoren gehört. Die Plücker-Koordinate π_S ist dann für zulässige Basen definiert als

$$\pi_S(w) = \det(\mathrm{pr}_S \circ w),$$

wobei pr_S die orthogonale Projektion auf H_S bezeichnet. Eine zulässige Basis w entspricht hier der ersten Matrixspalte $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ des transformierten Operators $t^{PQ}g$. Und die Projektion pr_S findet sich dann genau in der Auswahl der Komponente a wieder.

4.8 Bemerkung. Nach Definition stimmt für die leeren Mengen P und Q die Funktion $\tilde{\phi}^{PQ}$ mit $\tilde{\phi}_0$ aus (4.3) überein. Allgemeiner ist $\tilde{\phi}^{PQ} = (t^{PQ})^*(\tilde{\phi}_0)$. Das heißt für $g \in G$

$$\tilde{\phi}^{PQ}(g) = \tilde{\phi}_0(t^{PQ}g).$$

Gleiches gilt für die induzierten Schnitte.

Wir haben nun zu zeigen, dass die Funktionen $\tilde{\phi}^{PQ}$ erstens äquivariant sind unter K, zweitens holomorph und drittens linear unabhängig in $O_K(G, \mathbb{C})$. Die beiden letzten Eigenschaften sind eigentlich für die induzierten Schnitte nachzuweisen, was aber wegen Satz 1.29 äquivalent ist.

Für die erste Eigenschaft können wir uns nach der obigen Bemerkung 4.8 auf die schon geleistete Arbeit bei ϕ_0 berufen. Denn es gilt $\tilde{\phi}^{PQ}(gk) = \tilde{\phi}_0(t^{PQ}gk) = \det a(k)\tilde{\phi}_0(t^{PQ}g) = \det a(k)\tilde{\phi}^{PQ}(g)$.

Wir zeigen nun zuerst die dritte Eigenschaft, die lineare Unabhängigkeit. Diese ist eine direkte Konsequenz aus folgendem

4.9 Lemma. *Für zwei Paare von Indexmengen P, Q und P', Q' gilt*

$$\tilde{\phi}^{P'Q'}(t^{PQ*}) = \delta_{PQ}^{P'Q'}.$$

Hierbei sei $\delta_{PQ}^{P'Q'}$ entsprechend dem Kronecker-Symbol definiert als 1 oder 0, je nachdem ob die gestrichenen Indexmengen mit den ungestrichenen übereinstimmen oder nicht.

Beweis. Es ist $(t^{P'Q'}t^{PQ*})^i_j = \sum \delta^{n'_i}_k \delta^k_{n_j} = \delta^{n'_i}_{n_j}$ und daher gilt auch $\tilde{\phi}^{P'Q'}(t^{PQ*}) = \det a(t^{P'Q'}t^{PQ*}) = \det((\delta^{n'_i}_{n_j})_{i,j\in\mathbb{N}})$. Dieser Term verschwindet, wenn in der Matrix Nullzeilen stehen, das heißt, wenn $n'_{\mathbb{N}} \neq n_{\mathbb{N}}$. Nun stimmt aber $n_{\mathbb{N}} = Q \cup \mathbb{N} \setminus P$ genau dann mit $n'_{\mathbb{N}}$ überein, wenn $Q = Q'$ und $P = P'$ ist. Im Fall der Gleichheit erhält man außerdem die Determinante der Einheitsmatrix, also 1. □

Es bleibt die zweite Eigenschaft nachzuweisen, die Holomorphie. Wir haben die holomorphe Funktion

$$\mathcal{I}_1(H_+) \to \mathbb{C},\ \alpha \mapsto \exp\operatorname{tr}\log(1+\alpha) = \det(1+\alpha)$$

auf dem linearen Raum der Spurklasse-Operatoren. $\tilde{\phi}^{PQ}$ ist nun die Verkettung dieser Funktion mit der Projektion $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a$ mit Operatornorm kleiner 1, einer Translation um -1 und der Multiplikation mit t^{PQ} in der komplexen Liegruppe G:

$$g \mapsto t^{PQ}g \mapsto a(t^{PQ}g) - 1 \mapsto \det a(t^{PQ}g).$$

Das gilt auf der d-Komponente. Auf den anderen verschwindet die Funktion. Und da es sich um Zusammenhangskomponenten handelt, ist $\tilde{\phi}^{PQ}$ und damit schließlich der Schnitt ϕ^{PQ} auf ganz G holomorph.

Der Beweis des Theorems ist damit abgeschlossen. Wir möchten nun die lokale Darstellung der Schnitte ϕ^{PQ} angeben. Dies wird noch einmal deutlicher ihre Holomorphie zeigen, da dabei nur die Determinante eines *endlichen* Matrix-Ausschnittes übrigbleibt.

Seien P und Q gegeben und sei $d \in \mathbb{Z}$ ihre charakteristische Differenz $|P| - |Q|$. Da die trivialisierenden Mengen in unserem Fall zugleich Kartengebiete sind, wollen wir direkt die Verknüfung der lokalen Darstellung ϕ_σ^{PQ} mit der Kartenumkehrung berechnen und auch diese mit ϕ_σ^{PQ} bezeichnen:

$$\begin{tikzcd} U_\sigma \arrow[r, "\phi_\sigma^{PQ}"] \arrow[d, "z"'] & \mathbb{C} \\ \mathcal{I}_2(H_+, H_-) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Weil außerdem die Kartengebiete dicht in den einzelnen Komponenten liegen, beschränken wir uns auf die Untersuchung der Standardkarte $\mathcal{I}_2(H_+, H_-)$ in $\mathrm{Gr}_2^0(H) = G^0/K$, genauer auf ihre Translation durch s^d in die d-Komponente G^d/K. Man beachte, dass diese Translation nach der Wahl der Orthonormalbasis zu Beginn der Schnittkonstruktion kanonisch geworden ist. Die Umkehrung der d-translatierten Karte lautet nun

$$z \mapsto s^d g_z = s^d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$$

auf $\mathcal{I}_2(H_+, H_-)$. Kürzen wir noch mit σ_d den Schnitt $\sigma_{s^d} = s^d \cdot \sigma \circ s^{-d}$ ab. Dann wissen wir bereits aus Proposition 1.30, dass für die lokale Darstellung gilt:

$$\phi_{\sigma_d}^{PQ}(s^d gK) = k_{\sigma_d}(s^d g)\tilde{\phi}^{PQ}(s^d g). \tag{4.14}$$

Nach (1.12) ist $k_{\sigma_d}(s^d g_z) = k_\sigma(g_z)$. Da es sich hier um die K-Operation auf $\mathbb{C}$ handelt, haben wir die Determinante der a-Komponente dieses Ausdrucks zu bilden. Diese a-Komponente stimmt nach (2.26) mit derjenigen von g_z selbst übereinstimmt, ist also 1. Es bleibt also nur der zweite Faktor in (4.14) und wir erhalten

$$\phi_{\sigma_d}^{PQ}(z) = \det a(t^{PQ} s^d g_z).$$

Wir haben also $a(t^{PQ} s^d g_z)$ zu bestimmen. Schreiben wir das Produkt $t^{PQ} s^d$ als Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so wird diese a-Komponente $a + bz$. Die Einträge von $a + bz$ sind nach (4.12) für $i, j \in \mathbb{Z}_+$ gegeben als

$$(a + bz)^i_j = \delta_j^{n_i - d} + \sum_{k \in \mathbb{Z}_-} \delta_k^{n_i - d} z_j^k.$$

Ist nun $n_i \geqslant d$, so verschwindet der hintere Summand, da nur über negative k summiert wird. Genauso verschwindet der vordere Summand im umgekehrten Fall

$n_i < d$. Außerdem sei an die Beobachtung im Beweis zu Proposition 4.2 erinnert, dass für große Indizes i nur $\delta_j^{n_i-d} = \delta_j^i$ übrigbleibt. Die Grenze ist nach Lemma 4.6 gegeben durch $r_{PQ} = \max P - d$. Das bedeutet, dass $a + bz$ selbst wieder in eine Blockmatrix

$$a + bz = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \alpha \end{pmatrix}$$

zerfällt mit einer endlichen Matrix α vom Rang r_{PQ}. Wir haben also die lokale Darstellung des Schnitts reduziert auf die endliche Determinante $\det \alpha$ und wollen nun noch α in z ausdrücken. Seien dazu

$$\begin{aligned} R &:= \{0, \dots, r_{PQ}\}, \\ S &:= \{i \in R \, : \, n_i \geqslant d\}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Dann können wir die Matrix α beschreiben durch

$$\alpha = \begin{pmatrix} e_R^{n_S-d} \\ z_R^{n_{R\setminus S}-d} \end{pmatrix},$$

wobei e_J^I die Matrix bezeichne, die durch Auswahl der durch I indizierten Zeilen und der durch J indizierten Spalten der Einheitsmatrix vom Rang r_{PQ} entsteht. Analog werden in der unteren Hälfte entsprechende Zeilen und (dieselben) Spalten von z ausgewählt. Durch eine Permutation der Spalten kann α schließlich auf die Form

$$\begin{pmatrix} 1_{|S|} & 0 \\ * & z_{R\setminus(n_S-d)}^{n_{R\setminus S}-d} \end{pmatrix}$$

gebracht werden. In der oberen Hälfte kommen die Zeilen $n_S - d$ vor. Um eine Einheitsmatrix als Block zu erzeugen, müssen die Spalten mit derselben Indexmenge auf die linke Seite verschoben werden. Die übrigen bilden die rechte Seite, wo in der oberen Hälfte jetzt nur noch Nullen vorkommen. Das sind die angegebenen Spalten $R \setminus (n_S - d)$. Damit gelangen wir schließlich zu folgendem Ergebnis.

4.10 Satz. *Ein Schnitt ϕ^{PQ} hat unter der Identifikation von lokal trivialem Bereich und Kartengebiet die holomorphe lokale Darstellung*

$$\phi_{\sigma_d}^{PQ}(z) = \pm \det(z_{R\setminus(n_S-d)}^{n_{R\setminus S}-d}) \tag{4.16}$$

auf der Komponente vom Typ $d = |P| - |Q|$. Dabei ist z_J^I die Matrix mit den Zeilen I und Spalten J von z. R enthält die Indizes $0, \dots, r_{PQ} = \max P - d$ und S deren Auswahl i, so dass $n_i < d$ ist.

Beweis. Wir haben nur noch zu zeigen, dass diese Funktion holomorph ist. Einerseits ist die Determinante hier endlich und daher als Polynom holomorph. Andererseits ist auch die Abbildung $z \mapsto z^I_J$ holomorph: Sie ist linear und beschränkt und damit schon stetig. Um das zu sehen, schreiben wir wieder $z^I_J = p_I \circ z \circ j_J$ mit der orthogonalen Projektion p_I auf das Hilbert-Erzeugnis H_I und entsprechend der Einbettung j_J von H_J in H. Da Hilbert-Schmidt-Ideale Norm-Ideale sind [8], ist dann $\|z^I_J\|_2 \leqslant \|p_I\|\|i_J\|\|z\|_2 \leqslant \|z\|_2$, weil Projektion und Einbettung die Operatornorm 1 haben (oder 0, falls I beziehungsweise J leer sind). Daher ist die Operatornorm von $z \mapsto z^I_J$ durch 1 beschränkt. $\square$

5 Operatoren

Ursprünglich war die Idee der Themenstellung dieser Arbeit, eine explizite Formel für den *Dirac-Operator* in der bekannten Gestalt

$$\not{D} = \bar{\partial} + \bar{\partial}^* \tag{5.1}$$

im Kontext der holomorphen Schnitte zu finden. Um genau zu sein, könnte der Dirac-Operator eine solche Summe eines geeigneten *echten* Ableitungsoperators auf den Punkten z (einer Karte) der Grassmannschen sein. Zwar besteht dabei das Problem, dass es sich um holomorphe Schnitte handelt und daher ein $\bar{\partial}$-Operator nur trivial operieren würde. Doch bestand die Vermutung, dass dies durch die Dualbildung ausgeglichen wird, die eng mit der komplexen Konjugation zusammenhängt. Eine solche Formel findet Wiesbrock in [12, Abschnitt 8]. Es wären nur die dort in physikalischen Begriffen angegebenen Summanden genauer zu bestimmen. Allerdings beschreibt diese Formel nicht den Dirac-Operator, sondern einen von ähnlichem Typ auf den sogenannten Geist-Fermionen. Diese werden eingeführt, um die unphysikalischen Freiheitsgrade eines mathematischen Modells zu absorbieren.

Grundsätzlich ist jedoch nicht klar, inwiefern man einen Dirac-Operator auf dem Fockraum und dann auf den holomorphen Schnitten erhält. Der Dirac-Operator lebt auf Spinoren. Und um die Zusammenhänge zu verstehen, wäre wie im endlichdimensionalen Fall ein Spinoren-Bündel zu konstruieren, nur auf der unendlichdimensionalen Grassmannschen. Dies erfordert eine Verallgemeinerung der Spinoren-Konstruktion, da die restringierte orthogonale Gruppe $O_2(H)$ keine Doppelüberlagerung mehr besitzt, die als Spin-Gruppe fungieren kann [5]. Eine solche verallgemeinerte Konstruktion eines Spinoren-Bündels liegt jedoch außerhalb des Rahmens dieser Arbeit.

So wollen wir uns hier darauf beschränken, einen ersten Schritt in die Richtung der ursprünglichen interessanten Idee anzudeuten und anhand der erzielten Ergebnisse einen Ausblick auf die weiteren Möglichkeiten zu geben, die die Resultate bieten.

Trotz des ungeklärten Zusammenhangs zwischen dem Dirac-Operator und dem Fockraum kann man sofort sehen, dass dieser jedenfalls in einer engen Verbindung mit dem Dirac-Operator steht. Der Fockraum oder die äußere Algebra ist eine wichtige Darstellung der Clifford-Algebra. Die Clifford-Algebra wiederum enthält die Spin-Gruppe, die Strukturgruppe des gesuchten Spinoren-Bündels, auf dessen Fasern der Dirac-Operator wirken wird.

Betrachten wir daher zuerst Operatoren direkt auf dem Fockraum. So spielen die *Erzeugungs-* und *Vernichtungsoperatoren* in den bisherigen Untersuchungen und Ergebnissen eine wesentliche Rolle bei der Beschreibung des Dirac-Operators oder seiner Entsprechung auf den Ghost-Fermionen. Gleiches gilt auch für weitere Operatoren, etwa vom Hamilton-Typ. Man vergleiche dazu vor allem [12], Abschnitt 8. Diese Formeln bleiben größtenteils algebraisch. Demgegenüber bietet die im vorangegangenen Kapitel konstruierte Einbettung in den Raum der L^2-holomorphen $\mathrm{Det}^{\#}$-Schnitte eine Brücke zu einer *analytischen* Beschreibung.

Die Erzeuger b^* und Vernichter b werden wie üblich definiert durch Multiplikation und Kontraktion. Zu Berücksichtigen ist allerdings die Zerlegung von H in $H_+ \oplus \bar{H}_-$, welche auf zwei getrennte Definitionen jedes der beiden Operatoren führt - am leichtesten auf der Orthonormalbasis. So haben wir zum Beispiel für den Erzeugungsoperator b^* und $m \in \mathbb{N}$

$$b^*(m)e_P = e_m \wedge e_P = e_{\{m\}\cup P} \tag{5.2}$$

in dem Fall, dass P nicht m enthält, sonst null. In dieser Form sehen wir, dass die Wirkung der Erzeuger und analog der Vernichter genau zu der Strukturierung der angegebenen Einbettung

$$e_P \wedge e_Q \mapsto \phi^{PQ}$$

passt. Eine Transformierte $b^*(m)e_P \wedge \bar{e}_Q$ gehört zu dem holomorphen Schnitt $\phi^{P'Q'}$, wobei P' und Q' die alten Indexmengen seien mit der einzigen Veränderung der Aufnahme von m an der passenden Stelle. Ist m bereits in $P \cup Q$ enthalten, so setzen wir P' und Q' leer. Um herauszufinden, welche Wirkung der Erzeuger in der Formulierung der Schnitte statt der Produkte hat, haben wir nun zu untersuchen, wie sich $\phi^{P'Q'}$ und ϕ^{PQ} unterscheiden. Dazu beobachten wir folgenden Zusammenhang, der auf der Definition der Schnitte als $\phi^{PQ}(g) = \det a(t^{PQ}g)$ mit einem Permutationsoperator t^{PQ} beruht. Es gilt

$$b^*(m)\phi^{PQ} = (t_{PQ}^{P'Q'})^*(\phi^{PQ}) \tag{5.3}$$

mit $t_{PQ}^{P'Q'} = (t^{PQ})^{-1}t^{P'Q'}$. Denn wir haben $\phi^{P'Q'}(g) = \phi^{PQ}((t^{PQ})^{-1}t^{P'Q'}g)$. Diese Formel ist aber noch nicht ausreichend, da die Funktion $(t_{\bullet}^{\bullet})^*$ noch von den Indexmengen P, Q ihres Arguments abhängt. Möglicherweise bietet stattdessen die lokale Darstellung ϕ_σ^{PQ} der Schnitte aus (4.16) einen Zugang zu einer Beschreibung, die nur von m abhängt und nicht den Mengen P und Q. Allerdings wird das aufgrund der diffizilen Formel

$$\phi^{PQ}_{\sigma_d}(z) = \pm \det(z^{n_{R\setminus S}-d}_{R\setminus(n_S-d)}) \tag{5.4}$$

sehr schnell kompliziert. Wir wollen ein Beispiel vorführen.

Sei $P \subset \mathbb{N}$, so dass P nicht $m = 0$ enthält. Sei außerdem $d = 0$, also P und Q gleich groß. Dann erhalten wir mit den obigen Bezeichnungen zuerst

$$d' = 1 = d + 1.$$

Damit ist

$$r' := r_{P'Q'} = \max P' - d' = \max P - d - 1 = r_{PQ} - 1 = r - 1.$$

Für die Berechnung von S überlegen wir anhand des Bildes (4.9) der Umordnung n_i,

$$(n_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z}_- \setminus Q,\ P;\ Q,\ \mathbb{Z}_+ \setminus P), \tag{5.5}$$

dass $n'_i < d' = 1$ genau dann gilt, wenn $i < q := |Q|$ ist. Für n_i heißt das hingegen $n_i < 0 = d$. Also ist die gestrichene Bedingungen $n'_i < d'$ äquivalent zur ungestrichenen und daher

$$S = S' = \{q, \ldots, r\} \text{ und } R \setminus S = R' \setminus S' = \{0, \ldots, q-1\}.$$

Nun ist

$$n'_{R'\setminus S'} - d' = Q - 1 = (n_{R\setminus S} - d) - 1$$

und weil $n_r - 1 = r - 1$ ist, gilt $n'_{S'} - d' = (n_S - d) \setminus \{r-1\}$, so dass wir erhalten

$$R' \setminus (n'_{S'} - d') = R \setminus \{r-1\} \setminus ((n_S - d) \setminus \{r-1\}) = R \setminus (n_S - d).$$

Durch die gestrichenen Indexmengen werden also die gleichen Spalten von z ausgewählt, aber die um -1 verschobenen Zeilen. Für diese Situation wirkt also $b^*(m)\phi^{PQ}$ lokal wie $\phi^{PQ} \circ s$ mit dem Shiftoperator s auf der zugrundeliegenden Basis.

Vielleicht ist jedoch aufgefallen, dass viele der Überlegungen oder Rechenschritte ausschließlich in diesem Spezialfall anwendbar waren und sich völlig verändern mit nur einer kleinen Abwandlung der Ausgangslage.

A priori lässt sich feststellen, dass mindestens Fälle an den folgenden Grenzlinien unterschieden werden müssen: $m \in \mathbb{N}$, $m \in P$, $m < \max P$ und wahrscheinlich

$d \geqslant m$. Da sie sich überlagern, kann es auch dadurch noch zu weiteren Fallunterscheidungen kommen, bevor man für ganze Gruppen solcher Situationen einheitliche Aussagen über die Wirkung der Erzeuger oder Vernichter treffen kann.

Allerdings – und das kann man vielleicht erahnen, wenn man das Beispiel noch einmal auf Verallgemeinerungen der gleichen Argumentationsmöglichkeiten in verschiedenen Situationen überprüft: Es könnte sein, dass viele dieser Fallunterscheidungen sich gegenseitig aufheben oder dass die Formeln selbst verschiedene Ausgangspositionen nivellieren. Etwas ähnliches passierte schon im Beispiel, als sich herausstellte, dass die Bedingungen $n_i < d$ und $n'_i < d'$ äquivalent wurden, obwohl die einzelnen Objekte sich sehr wohl unterscheiden.

Dennoch scheint mir dies nicht ein zu vielversprechender Weg zu sein, um eine Formel für die Wirkung der Erzeuger und Vernichter auf den Schnitten zu erlangen, auch wenn die lokalen Beschreibungen in gewisser Weise die Objekte, die sie beschreiben, greifbar oder verstehbar werden lassen. Die lokale Darstellung könnte auch nützlich sein, eine Idee oder fertige Formel zu verifizieren. Es könnte aus verschiedenen Gründen sein, dass eine Formel auf den Schnitten eine Art Laplace-Summe ergibt, die sich dann als Entwicklung einer Determinante interpretieren lassen könnte.

Diese Wege scheinen nicht recht eine Geodäte zum Punkt einer Gleichung der anfangs genannten Form

$$\not{D} = \bar{\partial} + \bar{\partial}^*$$

für einen Fermionen-Operator vom Dirac-Typ zu sein. Vielleicht ist der Umweg über den Fockraum auch gar nicht günstig oder nötig. Dabei wäre sowieso eine genaue Beschreibung der üblichen Dirac-Strukturen notwendig: des Spinorenbündels und der Cliffordalgebra. Dies bietet sich an auf der Basis der hier gebrachten Ausarbeitungen allgemeiner Bündelstrukturen und der relevanten Hilbert-Schmidt-restringierten Mannigfaltigkeiten und Gruppen.

Literatur

[1] P. Cartier, *A Course on Determinants*, in: Petre Dita & Vladimir Georgescu, Conformal Invariance and String Theory, Academic Press, Boston 1989.

[2] I. B. Frenkel, H. Garland & G. J. Zuckerman, *Semi-infinite Cohomology and String Theory*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **83** (1986), 8442–8446.

[3] Sigurdur Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York 1978.

[4] Shoshichi Kobayashi & Katsumi Nomizu, *Foundations of Differential Geometry I*, Interscience, New York, 1963.

[5] Jouko Mickelsson, *Current Algebras and Groups*, Plenum Press, New York 1989.

[6] Doug Pickrell, *Measures on Infinite Dimensional Grassmann Manifolds*, J. Funct. Anal. **70** (1987), 323–356.

[7] Andrew Pressley & Graeme Segal, *Loop Groups*, Oxford University Press, Oxford 1988.

[8] Robert Schatten, *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*, Ergebnisse der Mathematik 27, Springer-Verlag, Berlin 1970.

[9] Herbert Schröder, *Funktionalanalysis*, Akademie Verlag, Heidelberg 1997.

[10] G. B. Segal & G. Wilson, *Loop Groups and Equations of KdV type*, IHES, Publ. Math. **61** (1985), 5.

[11] Harald Upmeier, *Symmetric Banach Manifolds and Jordan C^*-Algebras*, Mathematics Studies 104, North-Holland, Amsterdam 1985.

[12] Hans-Werner Wiesbrock, *The C^*-Algebra of Bosonic Strings*, Commun. Math. Phys. **136** (1991), 369–397.