Der Mengenbegriff in den Mathematiken

Diskussion der klassischen und konstruktivistischen Standpunkte

Hausarbeit im Nebenfach Philosophie

20. April 2000

Thomas Eckert
eckert@mathematik (Bitte „.uni-marburg.de“ anhängen!)

Barfüßerstraße 35
35037 Marburg

Vorwort

Der Genitiv im Untertitel dieser Arbeit, *Diskussion der klassischen und der konstruktivistischen Standpunkte*, ist im doppelten Sinn als *genitivus objectivus* und als *genitivus subjektivus* zu verstehen. Denn einerseits sollen die beiden Standpunkte, die in vielerlei Hinsicht als konträre Seiten aus der Grundlagenkrise der Mathematik hervorgegangen sind – wie weit auch immer man diese Bezeichnung fassen mag –, einerseits also sollen sie diskutiert werden. Dies ist ihre Rolle als Objekt. Da aber andererseits die Argumente verteidigend oder angreifend wechselseitig aufeinander bezogen sind, sollen die Standpunkte auch wechselweise das Wort erhalten, sollen also selbst diskutieren. Das ist ihre Rolle als Subjekt.

Obwohl sich der Titel *Der Mengenbegriff in den Mathematiken* sehr konkret auf die Mengenlehre bezieht oder besser – wie der Plural andeutet, der auch am Ende der Arbeit noch einmal aufgenommen werden soll – auf die Mengenlehren, so werden doch zahlreiche allgemeinere Argumentationen aus dem Bereich der Philosophie der Mathematik behandelt, weshalb erst nach einem prinzipieller gehaltenen Vorspann der Rahmen genügend geklärt ist, um auf die Problematik des Mengenbegriffs genauer eingehen zu können. Geleitet vom Verdacht eines Zirkels im konstruktivistischen Ansatz, werden beide Erklärungen von *Menge* vorgestellt. Dabei fällt auf, dass in moderneren mathematischen Darstellungen viele Elemente des Konstruktivismus vorkommen, und es wird untersucht, ob nicht dessen Kritik in einer solchen Mathematik bereits berücksichtigt und bereinigt ist. Dieser Eindruck wird sich aber als trügerisch erweisen, so dass es notwendig bleibt, die Zirkelfreiheit des methodischen Ansatzes in diesem Punkt herauszuarbeiten, deren Konsequenzen abschließend diskutiert werden sollen.

Einleitung

Herrschte noch in der ersten Hälfte des inzwischen vorigen Jahrhunderts große Unruhe und heftiger Streit um die Grundlagen der Mathematik, so scheinen die Mathematiker bereits in der zweiten Hälfte wieder beruhigt ihrer gewohnten Tätigkeit nachgegangen zu sein und noch nachzugehen. Nachdem nämlich die entdeckten Antinomien der Mengenlehre – „one of the worst shocks of the history of logic and mathematics“ wie Fraenkel schreibt[1] – in neuen Axiomensystemen beseitigt worden waren, konnte man sich getrost auf dieses unterdessen etablierte Fundament stützen. Damit einhergehend hatte auch der restliche Aufbau der Mathematik eine gründliche Überarbeitung und Präzisierung erfahren, was in dem Monumentalwerk *Éléments de Mathématique* Bourbakis [2] gipfelte und das Bestreben nach Exaktheit in gewisser Weise zu einem Abschluss brachte. So stieg denn auch die Entwicklung neuer mathematischer Methoden und ganzer Teildisziplinen sprunghaft an, auch wenn dies gleichzeitig durch Erfordernisse aus anderen Wissenschaften, vor allem der mathematischen Physik bedingt war. Dabei sind die unterschiedlichen Auffassungen der beiden Parteien keinesfalls ausdiskutiert und geklärt worden, wie man in der Mathematik erwarten würde, die ja gerade für ihre sicheren, will heißen unbezweifelbaren, allgemeingültigen Resultate gerühmt wird. Sondern vielmehr hat sich die Seite der Formalisten faktisch durchgesetzt, wobei im (eingetretenen) Zweifelsfall sowieso die bequemere und gewohnte Richtung beibehalten wird. Die Gegenposition des Intuitionismus oder dann des Konstruktivismus hat im Mathematikalltag allenfalls dort Spuren hinterlassen, wo etwa ein konstruktiver Beweis, wenn er denn zur Hand ist, aus ungutem Gefühl einem indirekten vorgezogen wird, sei es aus „Sicherheitsgründen“, sei es, um das Resultat auch unter strengsten Anforderungen zu behalten. Diese strengeren Forderungen sind zum einen logischer Art wie zum Beispiel die Ablehnung des *Tertium non datur* der klassischen Logik, da eben nicht alle Aussagen entscheidbar seien – gerade in der Mathematik als sozusagen *der* Wissenschaft vom Unendlichen. Aber sie sind auch prinzipieller Natur, wenn es nämlich um den axiomatischen Aufbau selbst geht.

Axiomatische Mathematik

Gegen die Axiomatisierung einer Wissenschaft ist von konstruktivistischer Seite zunächst einmal nichts einzuwenden, obwohl gerade die Auffassung des Theorienaufbaus aus kleinen Systemen von Axiomen, genauer gesagt inhaltslosen und interpretier*baren*, in nichtextremer Sichtweise auch -*bedürftigen* Aussageformen die konkurrierende formalistische Position charakterisiert. Allerdings, so Lorenzen in [21], gebe es für die axiomatische Mengenlehren (noch) kein konstruktives Modell, sie seien also „bloßes Phantasieprodukt“ (p. 48). Und „sollte man dagegen in Zukunft einmal Schichten von Mengen konstruieren können, für die die Axiome wahr sind, so würde dadurch natürlich zugleich eine axiomatische Grundlegung der Mengenlehre überflüssig“ (ebenda). Nun, ebenso natürlich wird – abgesehen von der aufklärenden und auch sonst hilfreichen Funktion von Axiomen innerhalb der Mathematik selbst, die wohl vergleichbar ist mit der Entdeckung der Röntgenstrahlen für die medizinische Diagnostik, – wird späte-

[1] [7], p. 10

[2] Im Folgenden beziehen sich Zitate von Bourbaki immer auf den ersten Band, die *Théorie des Ensembles* [1], in der überarbeiteten Auflage von 1970.

stens mit der immer weiter zunehmenden Marktbeschleunigung vor allem im Software-Bereich und den dadurch entstehenden Effizienz- und Flexibilitätsanforderungen klar, dass ein Axiomensystem als kleinst- und genauestmögliche *Schnittstelle* im arbeitsteiligen Wissenschaftsbetrieb erst eine Zusammenarbeit von Wissenschaftstheoretikern und Fachwissenschaftlern ermöglicht. Nebenbei bemerkt scheint mir die Arbeitsteilung bei dem heute erreichten Spezialisierungsgrad auch nicht mehr anders möglich zu sein. Denn auch wenn offensichtlich die konstruktivistische Schule im Ganzen sich sehr um verständliche Darstellung bemüht, so kann doch ein an den Grundlagen seines wissenschaftlichen Tuns interessierter Forscher nicht andere Ansätze als diese „kritische Philosophie" , (ebenda, p. 57) unkritisch außen vor lassen, die dann zugleich unklarer sein werden und nicht mehr einfach „zur Propädeutik der Wissenschaft ..., zum Elementarunterricht, wenn man so will" zu rechnen sind (ebenda).

Zurück zur Nützlichkeit von Axiomensystemen. Mancher „working mathematician" (Mac Lane in [23]) intendiert mit seiner Berufung auf Axiome tatsächlich gerade diese Schnittstellenfunktion, was sehr deutlich, wenn auch heute ein wenig einfältig wirkend dargestellt ist in dem Klassiker von Mangoldts [24]: „Was sind die natürlichen Zahlen? Diese Frage ist sehr leicht gestellt; ihre Beantwortung dagegen ist schwer und gehört mehr in den Bereich der Philosophie als in den der Mathematik. Jene versucht, in irgendeinem Sinne das Wesen der in Frage kommenden Dinge unmittelbar zu erfassen. Diese dagegen, da noch kein derartiger Versuch voll befriedigt hat, begnügt sich im allgemeinen damit, die *Eigenschaften* ihrer Objekte festzustellen und die Tatsachen zu belegen, daß Objekte aufgezeigt werden können, die diese Eigenschaften haben. ... Die hervorgehobenen Eigenschaften werden dann die *Axiome* des betreffenden Gebiets genannt" (p. 102). Oder in einem anderen Lehrbuch [18]: „Wir verwenden in diesem Buch den Mengenbegriff als Grundbegriff, aus dem ... alles andere abgeleitet wird. Man kann keine Wissenschaft deduktiv aus dem Nichts aufbauen, sondern muß ihr irgendein Fundament zugrunde legen. ... Zu der Frage, ob und wie es sich aus anderen Grundlagen ableiten läßt, muß auf die Literatur über mathematische Grundlagenforschung verwiesen werden" (p. 21). Scheinbar sieht also mancher Mathematiker mit einer Einengung des – sagen wir – unspezifizierten Fundaments auf wenige unhinterfragt vorausgesetzte Begriffe seinen Part der Arbeit als erledigt an. Dass Wissenschaftstheoretiker mitunter die damit übertragenen Aufgaben nicht einfach übernehmen wollen und ihre Funktion eher in einer *methodischen* Begründung als in einer Begründung der Grundbegriffe sehen[3], ist dann ein anderer, hier nicht ausgeführter Diskussionspunkt.

Natürlich wird man damit nicht allen Auffassungen der axiomatischen Methode gerecht. Gerade die konsequenten Axiomatizisten nämlich würden sich vehement gegen die obige Interpretation wehren und Axiome statt dessen auf Freges klärende Einwände[4] hin als Aussageformen verstehen, die erst zu Axiomen im herkömmlichen Sinn von „wahren" Gesetzen werden, wenn man die „undefinierten Grundbegriffe" – jetzt als bloße Leerstellen aufgefasst – durch dann Modell genannte geeignete Objekte ersetzt. Mit dem Strukturalismus Bourbakis ([1], E I.8) wird das Argument der ordnenden und *strukturierenden* Funktion von Axiomensystemen intensiviert, so dass man gar unterschiedliche inner- oder außermathematische Realisierungen für die nun *Struktur* genannten Axiomensysteme finden kann, die man also alle mit einer einzigen

[3]So ausgesprochen etwa bei Lorenzen [22].

[4]im Briefwechsel mit Hilbert [12], vor allem vom 6.1.1900, und in der darauf beruhenden Veröffentlichung [10].

Theorie abgehandelt hat. So stellt sich beispielsweise die Monoid-Struktur als fundamentale Eigenschaft jeglicher algebraischer Objekte heraus, etwa der Gruppen oder der bereits interessanteren Körper oder Vektorräume, hier sogar doppelt. Letztere bilden zusammen mit den Algebren einen Grundbegriff der Funktionalanalysis, durch die zum Beispiel die moderne Physik in ihrer Art erst möglich geworden ist. Genauso taucht die Monoid-Struktur aber auch grundlegend in der Kategorientheorie auf und wird dort als fast allen mathematisch interessanten Objekten innewohnend erkannt. Umgekehrt kristallisieren sich vom strukturalistischen Standpunkt aus gesehen verschiedene Eigenschaften deutlich heraus: „De plus ... la méthode axiomatique permet, lorsqu'on a affaire à des êtres mathématiques complexes, d'en dissocier les propriétés et de les regrouper autour d'un petit nombre de notations“ (Bourbaki [1], E I.9). Zuletzt lassen sich mit diesem Überblick vielleicht sogar neue Objekte oder gar Disziplinen gewissermaßen erst synthetisieren. Und tatsächlich entstanden in der Mathematik zeitgleich mit der Ausdehnung der Axiomatisierung hochgradig abstrakte Objekte und um sie herum riesige neue Theorien wie etwa Homologie- oder K-Theorie oder die Indexsätze von Atiyah-Singer, die ein starkes Instrumentarium bereitstellen zur Behandlung bis dahin ungelöster Fragen und Probleme.

All dies sind schwerwiegende Argumente für ein axiomatisches Vorgehen, die auch nicht mehr infiltriert sind oder zumindest wieder leicht befreit werden können von gleichsam ontologischen Ansprüchen. Trotzdem „klafft im axiomatischen Aufbau der mathematischen Theorien eine Lücke“, da „die dabei benötigten mengentheoretischen Überlegungen intuitiv durchgeführt“ würden: „Durch eine axiomatisch aufgebaute Mengenlehre wird diese Lücke geschlossen“ ([5], p. 5). Gerade aus der Basisfunktion der Mengenlehre entsteht diese Lücke. Aber eben diese Basisfunktion weckt auch Widerstand gegen ihre Axiomatisierung. „Der einzige Einwand gegen die axiomatischen Mengenlehren“, so Lorenzen in [20], „... liegt in der Frage: Wozu eigentlich?“ (p. 36). Und dies ist nicht bloß die Frage des Steuerzahlers, der sein Geld natürlich sinnvoll investiert sehen will. Dieser muss sich nämlich mit den Mathematikern auf eine wegen unklarer Gewichtung allgemeiner gesellschaftlicher Werte und Ziele wohl unentscheidbare Diskussion einlassen über den kulturellen Wert der reinen und vielleicht von allem losgelösten Mathematik einerseits und die indirekte Anwendbarkeit und damit Leistungsfähigkeit der bestehenden und betriebenen Theorien andererseits. Lorenzens Frage hat darüber hinausgehend ganz andere Hintergründe, die deutlich werden, wenn er wenige Zeilen zuvor ebenso polemisch schreibt: „Gegen die Aufstellung axiomatischer Theorien ... ist logisch nichts einzuwenden. Selbst wenn man nicht weiß, ob das Axiomensystem der Theorie widerspruchsfrei ist, ist das Ableiten von Theoremen aus den Axiomen eine logisch-einwandfreie Beschäftigung.“ Hier schneidet Lorenzen einen für die Grundlagenforschung sehr prekären Punkt an. So gelangt Ebbinghaus in seiner *Einführung in die Mengenlehre* [5] auf die Frage hin, ob das erweiterte Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem „gut“ sei, zu der Antwort, dass es zwar den entwickelten Stand der Mengenlehre im Großen und Ganzen erfasse, aber zum einen auch bisher unberücksichtigte und doch „interessante“ Aussagen nicht entscheiden könne, und dass vor allem seine Widerspruchsfreiheit nicht gezeigt werden könne wegen des zweiten Unvollständigkeitssatzes von Gödel. „Wir werden jedoch ... Methoden und Ergebnisse kennenlernen, die wenigstens eine *partielle* positive Antwort auf die Frage nach der Widerspruchsfreiheit ermöglichen“ (p. 13). Und mögen ähnlich windige Erklärungen wie diejenige, dass „eine andere Sicherheit als die Übereinstimmung mit der Erfahrung vieler Forschergenerationen ... nicht angestrebt“ wird ([18], p. 22), für ein in die Mathematik einführendes Lehrbuch noch angehen, so sind sie doch schwach für Bourbakis enzyklopädisches Werk [1], das mit dem Anspruch beginnt: „Le traité prend les mathématiques à leur début.“ Ausgerechnet gegen Ende der Einleitung fühlen sich die Autoren zu der Verteidigung gedrängt, man hätte ja erfolgreich relative Konsistenzbeweise anderer mathematischer Disziplinen gefunden, welche durch die nun extrahierten Strukturen so eng mit der Mengenlehre verbunden seien, dass – und dies Argument sei „tellement simple qu'il ne semble guère possible de la mettre en doute sans renoncer à tout emploi rationnel de nos facultés intellectuelles“ – dass ein irgendwo in der Mathematik eventuell trotzdem auftretender Widerspruch sich sofort in der Mengenlehre absetzen und hier entdeckt werden müsste. Dies sei aber ein halbes Jahrhundert lang nicht geschehen, „et on est fondé à espérer qu'il ne s'en produira jamais“ (E I.13).

Angesichts dieses für die Mathematik als *der* exakten und sicheren Wissenschaft schlechthin vielleicht unerwartet einschneidenden Mankos wirkt die Formulierung „mengentheoretisch exakt“ im Vorwort eines etwas späteren Lehrbuchs der Mengenlehre [17] fast schon karikierend. Überhaupt scheint dieses Problem unter heutigen Mathematikern wenn zwar nicht in Vergessenheit geraten zu sein, so doch zumindest schlichtweg ignoriert zu werden. In Lehrbüchern zu Analysis und Linearer Algebra wird allenfalls der naive Mengenbegriff Cantors eingeführt. Mitunter findet man sogar nur eine Berufung auf die Autorität des Gründervaters wie bei den Formulierungen „Nach G. Cantor ist unter einer Menge M zu verstehen ... “ ([16], p. 5) oder „Von G. Cantor stammt folgende Erklärung ... [Hier dessen berühmte Definition von Mengen in [3]]. Wir werden Mengen mit Großbuchstaben bezeichnen“ ([26], Abschnitt 1). Oder es wird wenigstens Cantors Definition begründet: „Wir müssen es als eine grundlegende Fähigkeit des menschlichen Geistes ansehen, gegebene Objekte gedanklich zu einem Ganzen zusammenfassen zu können“ ([14], p. 17). Meistens wird dem Zitat von Cantors Definition noch nachgeschoben, dass diese „Interpretationshilfe“ ([25], Stichwort Mengenlehre) nicht als Definition ausreiche oder einfach dass der Ansatz eben *naiv* sei. Jedoch wird die damit geweckte Erwartungshaltung auf eine Alternative dann nicht erfüllt. Selbstverständlich ist die Axiomatisierung der Mengenlehre nicht Sache der Analysis oder Linearen Algebra. Jedoch werden Mathematiker zu Beginn ihres Studiums gerade hier das erste Mal mit Mengen konfrontiert – ohne dass der Begriff geklärt würde.

Aber auch bei den Mengentheoretikern selbst scheint das Problembewusstsein stark in den Hintergrund getreten zu sein. Wie eine eklektische Mischung aus den beiden beschriebenen Auffassungen der axiomatischen Methode und zudem ein wenig dogmatisch mutet es an, wenn sogar neueste Darstellungen der Mengenlehre mit dem Satz anfangen: „Any mathematical theory must begin with undefined concepts“ ([4], p. 6). Aber es ist wohl auch recht schwer, den Faden anders aufzunehmen, wenn man zuvor ganz undiskutiert die Probleme der offenen, ja nicht lösbaren Widerspruchsfreiheit und der erwiesenen Unvollständigkeit jedes möglichen axiomatischen Zugangs in den Raum gestellt hat – einzig mit dem Fazit, dass man dann ja auch dieses vorhandene ungenügende Axiomensystem benutzen könne, wenn doch kein anderes Besseres leiste.

Konstruktive Mathematik

Ein solches ignorantes Vorgehen wäre vielleicht gerechtfertigt, wenn man erwiesenermaßen tatsächlich keinen besseren Zugang finden könnte. Aber hier müssen wir die bereits zitierte Kritik Lorenzens noch einmal genauer anschauen. Vollständig schreibt er dort nämlich: „Der einzige Einwand gegen die axiomatischen Mengenlehren (*selbstverständlich nur gegen diejenigen, für die man kein konstruktives Modell hat*) liegt in der Frage: Wozu eigentlich?“ (p. 36). Das „im Grundlagenstreit der Mathematik altehrwürdige Argument“ ([28], p. 196) fordert nämlich den Erhalt des klassischen Bestandes an Sätzen der Mathematik und dies nicht nur aus ästhetischen Gründen, sondern als Notwendigkeit für andere Wissenschaften, deren Erfolg wie etwa bei der Physik gerade von solchen Resultaten abhängt. Nun, ein konstruktiver Aufbau der Mathematik rekonstruiert zwar gerade nicht alle Sätze der Mengenlehre, denn Cantors Gleichbehandlung des Endlichen und Unendlichen, das dadurch zu einem aktual Unendlichen wird, und deren Rettungsversuche in den Axiomatisierungen sind ja gerade der Kritikpunkt. Aber für die Mengenlehre kann auch keiner das Argument vorbringen, sie werde in der Physik oder anderswo direkt gebraucht. Und für die tatsächlich benötigten mathematischen Verfahren und Gebiete gibt es sehr wohl Durchführungen eines intuitionistischen oder konstruktiven Aufbaus. Schon Brouwer hatte dies beginnend mit seiner Promotion unternommen, und sein ganzes Lebenswerk teilt sich in intuitionistische Arbeiten und Arbeiten im klassischen Sinn, von denen er sagt, er sei bestrebt gewesen, „nur solche Resultate herzuleiten, von denen ich hoffen konnte, dass sie nach Ausführung eines systematischen Aufbaues der intuitionistischen Mengenlehre, im neuen Lehrgebäude, eventuell in modifizierter Form, einen Platz finden und einen Wert behaupten würden“ ([2], p. 231). „Daß heute – etwa bei dem über Weyl (übrigens mit dessen begeisterter Zustimmung) hinausgehenden eleganten System in Lorenzen 1965 – nicht mehr von einer Bedrohung des klassischen Satzbestandes durch die intuitionistische Unbeweisbarkeit zentraler Sätze … die Rede sein kann, wird, als der Erhaltung des *Status quo* nicht evidentermaßen dienlich, nur in den seltensten Fällen zur Kenntnis genommen.“ (Thiel [28], p. 348). Oder noch stärker gesagt: „Diese Neuformulierung [in Lorenzen 1965] kommt der Intention des klassischen Satzes so nahe, daß er eher als eine Präzisierung desselben denn als Abschwächung aufgefaßt werden kann und der Einwand der „Unbeweisbarkeit“ des Satzes von der oberen Grenze in konstruktiven Systemen der Analysis nicht länger als gültig betrachtet werden kann“ (ebenda, p. 196).

Konstruktive Mengentheorie

Setzen wir uns einmal über die Nichtbeachtung der konstruktivistischen Vorschläge seitens der klassischen Mathematik hinweg und schauen, ob eine Ablehnung dieses Zugangs mit ihm immanenten Schwierigkeiten begründbar wäre. Natürlich soll dabei nicht eine komplette konstruktive Mathematik und die ihr zugrundeliegende Logik unter die Lupe genommen werden, sondern ein ganz spezieller Aspekt, der Mengenbegriff.

Selbstverständlich ist die Aussage der naiven Mengenlehre, das Zusammenfassen von Gegenständen zu einem Ganzen sei uns einfach gegeben, nicht von der Hand zu weisen. Man hat es also mit einem Phänomen *Menge* zu tun, und das nicht nur, weil etwa die Mathematiker seit Cantor unentwegt davon redeten. So stellt sich auch der

Konstruktivismus die Frage, was denn eine Menge sei, oder besser, wie wir den Begriff Menge benutzen – und findet auch eine Antwort: „Mengen sind hiernach nichts anderes als Abstrakta aus Aussageformen.“, so Lorenzen in [19] (p. 47). Das ist aber nur die Zusammenfassung der folgenden Erklärung.

Wir betrachten Aussageformen mit genau einer freien Variablen „für beliebige Objekte“ ([20], p. 23), die nun Formeln genannt werden sollen. Zwei solche Formeln $A(x)$ und $B(x)$ „heißen äquivalent, wenn für alle Objekte c des Variabilitätsbereichs von x gilt:

$$A(c) \leftrightarrow B(c)\text{“}$$

(p. 24). Man prüft nach, dass damit eine Äquivalenzrelation zwischen Formeln definiert ist, die durch Abstraktion neue, *abstrakte* Objekte liefert, die dann Mengen heißen sollen. Dabei bedeutet Abstraktion lediglich, sich auf invariante oder auch verträglich genannte Aussagen über die zugrunde liegenden Gegenstände, hier die Formeln, zu beschränken, wie Lorenzen immer wieder betont: „Diese *Beschränkung* der Aussagen auf invariante Aussagen ist das, was wir „*Abstraktion*“ nennen.“ (p. 16). Mit „invariant“ ist hier „invariant unter Ersetzung eines Objekts durch jedes dazu äquivalente“ gemeint. Bei Beschränkung auf solche Aussagen über die Gegenstände werden äquivalente Gegenstände dann ununterscheidbar, im Sinne seiner in der *Metamathematik* [19] behandelten *Logik der Gleichheit*[5] also gleich. Er nennt dort die Äquivalenzrelation auch einfach „abstrakte Gleichheit“. Dies legt überhaupt erst die Rede von abstrakten Objekten nahe. Aber Lorenzen macht noch einmal darauf aufmerksam, dass „nur hierdurch, nur insoweit ... auch die abstrakten Objekte selbst ‚definiert‘ “ sind (p. 46). Oder wie Thiel es ausdrückt: „Wir sind m.a.W. keine neuen ontologischen Verpflichtungen eingegangen und haben an keiner Stelle unseres Weges ... über das Wesen der Zahlen [als sein Beispiel eines abstrakten Objekts] spekulieren müssen“ ([28], p.133). Innerhalb dieser Erklärung des Begriffs Menge braucht schließlich auch die Enthaltensrelation der Mengenlehre nicht undefiniert bleiben. Denn mit einer darstellenden Formel $A(x)$ für eine Menge $M = \in_x A(x)$ ist diese Relation ja einfach durch

$$c \in M \iff A(c)$$

gegeben.

Lorenzen liegt sehr daran, mit dieser Darstellung tatsächlich den intendierten Mengenbegriff zu treffen, was deutlich wird, wenn er schreibt: „... die Rede von „Mengen“ als abstrakten Objekten zu rechtfertigen. Wir gehen dazu davon aus, daß sich die Mengen als Begriffsumfänge auffassen lassen. Dies läßt sich so präzisieren, daß ... “ (p. 47). Außerdem wird das sogar sichtbar in der Schreibweise

$$\in_x A(x) \text{ oder konventioneller } \{x : A(x)\}$$

für die Menge, die durch die Formel $A(x)$ *dargestellt wird*, wie gesagt werden soll. Hier fungiert das Symbol $\in_x$ einfach als *Abstraktor* „die Menge“. Ein Abstraktor soll innerhalb einer Aussage lediglich ein Anzeichen dafür sein, dass es sich bei dieser Aussage um eine verträgliche Aussage handelt und dies vom Sprecher auch intendiert ist. Der Index x gibt hierbei die freie Variable an und dient gewissermaßen dazu, die Leerstelle

[5] Die dortige Bestimmung der Gleichheit als Ununterscheidbarkeit in einem System von Aussagen geht auf Leibniz' *principium identitatis indiscernibilium* zurück.

in der Formel zu binden. Nebenbei bemerkt deutet dabei die voneinander abweichende Darstellung in verschiedenen konstruktivistischen Behandlungen dieser Thematik nicht auf ein Problem des Konzeptes „Abstraktor“ hin. Diese Abweichung resultiert lediglich aus einer allzu legeren Handhabung oder unzureichenden Formalisierung von Aussageformen mit einer Leerstelle als $A(x)$, A oder bei Thiel $A(\hat{n})$, zusammen mit umständlichen Erläuterungen der Art: „... mit einem Zirkumflex über dem „n“ geschrieben, um anzudeuten, daß wir hier die Aussageform nicht prädikativ gebrauchen, sondern etwas über sie aussagen und daher von der Aufgabe ihrer Leerstellen, Zählzeichen aufzunehmen, absehen“ ([28], p. 151). Soviel zu der irreleitenden Ungenauigkeit in der konstruktivistischen Beschreibung des Begriffs Menge. Die Adäquatheit dieses Vorschlags hingegen wird, wie gesagt, sichtbar im Vergleich dieser hier bloßen *Schreibweise* $\{x : A(x)\}$ mit der üblichen Einführung wie etwa der folgenden: „Eine Menge können wir auf zwei Arten festlegen: Wir schreiben ihre Elemente auf ... oder geben, wenn dies unbequem oder unmöglich ist, eine ihre Elemente definierende Eigenschaft an“ ([14], p.17), womit gerade die obige Schreibweise gemeint ist. Da außerdem auch der erste Fall so beschrieben werden kann, nämlich

$$\{a, b, c\} = \{x : x = a \vee x = b \vee x = c\},$$

ist man also genau dort angekommen, wohin man wollte. „Bei unendlichen Mengen dagegen kann der Rede [Cantors] vom „Zusammenfassen“ wohl kaum ein anderer Sinn gegeben werden als der, daß eine Abstraktion von den Aussageformen vorgenommen werden soll, die die Menge darstellen“ ([19], p. 47).

Inwieweit stammt diese Idee von Lorenzen? Frege redet in seinen *Grundlagen der Arithmetik* [9] konsequent von Eigenschaften, die den betrachteten Objekten zukommen oder abgesprochen werden können, anstatt von Mengen. Dies entspricht bereits dem Kern der soeben vorgeführten Beschreibung der Mengen durch Aussageformen und dient auch derselben Intention, nämlich einer Definition des Begriffs Menge, allerdings nur im Rahmen einer Zurückführung der Mathematik auf die Logik. Frege begnügt sich aber damit, die Mengen der Mathematik zu ersetzen und vollzieht noch nicht den Abstraktionsschritt, um sie rekonstruieren zu können. Eine solche Rekonstruktion des Begriffs Menge findet sich dann im wahrsten Sinn des Wortes bei Brouwer, dem Initialzünder der konstruktiven Mathematik. Bei ihm ist eine Menge nämlich wirklich eine *Konstruktion*, „ein Gesetz, auf Grund dessen, wenn immer wieder ein willkürlicher Ziffernkomplex der Folge ζ [der zuvor konstruierten Grundzahlen] gewählt wird, jede dieser Wahlen entweder ein bestimmtes Zeichen, oder nichts erzeugt, oder aber die Hemmung des Prozesses ... herbeiführt ... “ ([2], p. 150). Während in seiner Grundzahlenreihe deutlich der Gedanke der Abstraktion enthalten ist – wenn er ebenda nach der Einführung der Zählung kurzerhand die arabischen Zählzeichen als „die geeignetsten“ erklärt –, so entsteht seine Menge rein konstruktiv auf Basis des undefinierten Zuordnungsbegriffs, bleibt also selbst unfundiert. Scheinbar ist das auch im späteren Intuitionismus bis in die fünfziger Jahre nicht korrigiert worden, womit wohl Lorenzen diese Präzisierung zugeschrieben werden kann.[6]

[6]Vgl. auch Stichwort *Abstraktion* in [27].

Zirkelverdacht

„Die obige Einführung der Abstraktion als einer „façon de parler“ vermeidet alle mengentheoretischen Voraussetzungen“ ([19], p. 46). So urteilt Lorenzen selbst über diesen neuen Ansatz, in dem der Begriff Menge nicht mehr undefiniert, sondern auf den Begriff der Aussage zurückgeführt ist. Dieser liegt erstens nicht mehr im Bereich der Mathematik und ist zweitens auch nicht undefiniert, denn „die Behauptung einer ... Aussage, etwa das Aussprechen in einem Dialog, ist jedenfalls eine Handlung, zu der ein Verfahren gehört, das entscheidet, ob diese Handlung richtig oder verkehrt war“ (ebenda, p. 15). Auch wenn diese Formulierung hier noch etwas unklar ist und man auf die Frage, was denn „richtig oder verkehrt“ heißen soll, nur eine Antwort bekommt wie: so etwas „wird beim Leser als bekannt vorausgesetzt: andernfalls müßte er praktischen Unterricht nehmen, um dies zu lernen“ (p. 20), so wird das doch im Rahmen eines methodischen Aufbaus der Wissenschaften geklärt, wie etwa in dem Artikel *Methodisches Denken* [21] umrissen. Hierdurch soll *zirkelfrei* eine Fundierung der Grundbegriffe der Sprachen und eben auch der Wissenschaftssprachen als Hochstilisierungen aus der Lebenswelt ([15], p. 22) geliefert werden.

Aber – und das ist der eigentliche Einwand, der hier behandelt werden soll – liegt nicht in der obigen Beschreibung von Menge gerade ein solcher Zirkel insofern, dass den Aussageformen immer ein *Objektbereich* oder *Variabilitätsbereich* zugrunde liegt, der doch nichts anderes ist als eine Menge? Oder genauer gesagt: Wird nicht zur Beschreibung dieses Variabilitätsbereichs der Begriff Menge bereits benötigt? Wenn dem so wäre, dann würde das die methodische Ordnung an dieser Stelle und sogar überhaupt zerstören, da die betroffene Logik in einem sehr frühen Stadium der Rekonstruktion schon der natürlichen Sprachen eingeflochten ist, in Lorenzens Bild der Sprache „als ein auf See befindliche[s] Schiff“ (p. 28) noch dort, wo „wir – mitten im Meer des Lebens schwimmend – uns ein Floß“ (p. 29) und ein „zusammengezimmertes Boot“ (p. 40) verschafft haben. Ist nicht, wie sich das eben auch in der Mathematik gezeigt hat, der Mengenbegriff fundamental für die verschiedensten Konzepte? So ja auch für die Logik, die heute nach dem Scheitern des Logizismus, der vor allem die Mengenlehre in der Logik aufgehen lassen wollte, umgekehrt mengentheoretisch beschrieben wird, zumindest in der mathematischen Logik. Hier wird gerade dieser Variabilitätsbereich vorab festgelegt als eine oft „Universum“ genannte *Menge*, über der man dann mit beliebig-stelligen Relationen zu tun hat (vgl. zum Beispiel [6]). Und lässt sich nicht ausschließlich auf diese Art genügend exakt ein Variabilitätsbereich abgrenzen, was doch notwendig ist bei Lorenzens Definition der Äquivalenz von Formeln $A(x)$ und $B(x)$ als (an anderer Stelle)

$$A(x) \sim B(x) \Longleftrightarrow \bigwedge\nolimits_c . A(c) \leftrightarrow B(c).$$

(nach [19], p. 47)? Hier liegt die kritische Formulierung „für alle Objekte c des Variabilitätsbereichs von x“ ([20], p. 24, siehe oben) nur ein wenig verschleiert in dem Quantor $\bigwedge_c$ vor. Bei einer formalen Einführung des Quantors in einer formalen Sprache liegt demgegenüber gar kein Problem, weil wie etwa bei Bourbaki der Buchstabe x in der Zeichenkette $(\forall x)T$ für eine andere Zeichenkette, genauer einen Term T überall durch Leerstellen $\square$ ersetzt und durch Klammern gebunden wird (vgl. dort I.4). Ist aber nicht gerade eine solche Unterschlagung verdächtig? Sie geschieht übrigens öfter auch an anderen Stellen wie etwa schon bei der Schreibweise $\in_x A(x)$ oder auch $\{x : A(x)\}$

(wo ein Mathematiker keine Schwierigkeiten hätte, eine Objekt*menge* X anzugeben durch $\{x \in X : A(x)\}$) oder in Thiels Beschreibung der Hilbertschen Geometrieaxiome als „*Aussageformen* mit [einer Grundrelation] ‚π‘ als Leerstelle“ ([28], p. 263). Dass der Objektbereich aber eine ebensolche Leerstelle ist, wird erst einmal vergessen, um dann später unscheinbar nachgereicht zu werden als „Variabilitätsbereiche der Quantoren“. Aber der Objektbereich wird nicht nur von den Quantoren benötigt, sondern auch von den Relationen. Zwischen wem oder was sollte sonst eine Beziehung ausgesagt werden? Außerdem ist er sogar der Hauptbestandteil der Interpretation von Axiomensystemen in einem sie erfüllenden Modell, da man ja vor allem an den behandelten Gegenständen interessiert ist, wenn man von einem Modell spricht.

Noch einmal: Um eine Aussage *für alle* Objekte eines Bereiches zu entscheiden, muss doch dieser Bereich bekannt, also genau abgegrenzt sein. Und schon steht man vor dem selben Problem wie die „Mengenlehrer“, die sich dann eben anfangs mit einer „naiven“ Definition von Menge zufrieden gaben. Wohlgemerkt *anfangs*. Denn dass dies nicht reicht, wurde schnell klar. „Cantor himself recognized this fact after having concluded his work; see his letters to Dedekind of 1899 ... where he speaks of *inkonsistenten Mengen*“ ([8], p. 15). Hausdorff dokumentiert die darauf folgende Entwicklung, die in sicherlich variierender Auffassung zur heutigen Lösung führt, im Vorwort seiner *Grundzüge der Mengenlehre* [13]: „Über das Fundament dieses Fundamentes, also über eine einwandfreie Grundlegung der Mengenlehre selbst ist eine vollkommene Einigung noch nicht erzielt worden. Die nächstliegenden Schwierigkeiten und Vorurteile dürften zwar als erledigt gelten ... Dagegen ist eine wirkliche Paradoxie noch nicht befriedigend aufgeklärt, auf die der naive Mengenbegriff, mit seiner Zusammenfassung beliebig vieler Elemente zu einer Menge, letzten Endes hinausführt ... Den hiernach notwendigen Versuch, den Prozeß der uferlosen Mengenbildung durch geeignete Forderungen einzuschränken, hat E. Zermelo unternommen. Da indessen diese äußerst scharfsinnigen Untersuchungen noch nicht als abgeschlossen gelten können ... “ (p. 1). Was ist die Idee? Wenn man schon nicht an den Begriff Menge selbst kommen kann, so kann man doch versuchen seine Eigenschaften und seine Benutzung exakt festzulegen, nämlich in den Axiomen. Alle Aussagen, die innerhalb der Mengenlehre getroffen werden können, sollen dann allein auf diesen Festlegungen aufbauen, das heißt aus ihnen abgeleitet werden können. Auf diese Weise können dann die Mathematiker anfangen exakt zu arbeiten, während die Grundbegriffe Menge und Enthaltensrelation offen bleiben (je nachdem) dürfen oder gar sollen.

Synthese in der modernen Mathematik?

Diese Lösung kommt doch dem methodischen Aufbau des Denkens sehr nahe, den Lorenzen vorgeführt hat. Um die Ähnlichkeit zu sehen, wollen wir noch einmal auf dessen Bild der natürlichen Sprache als ein Schiff eingehen, das wir zu Beginn nur schwimmend mitten auf hoher See erbauen müssen. Dabei soll der Anfang aus ein wenig Treibholz gemacht werden, das er *exemplarische Einführung von Prädikaten* nennt ([21], p. 30). Um dieses Treibholz zu einem ersten Floß zusammenzubinden, können Regeln eingeführt werden, die „den Gebrauch dieser Prädikate ... näher bestimmen“: So werde „eine Einengung der Unbestimmtheit möglich, die den Prädikaten der Distinktionsbasis auf Grund ihrer bloß exemplarischen Einführung anhaftet“ (p. 32). Lassen sich nicht die Axiome der Mengenlehre als ein ebensolches Regelwerk auffassen, das für den Ausschnitt des Denkens, der Mathematik genannt wird, der zweite Schritt ist nach einer etwa in Bourbakis überarbeiteter Auflage vollzogenen Einführung von formalen Sprachen. Kommt das nicht wirklich Lorenzens Ansatz der exemplarischen Einführung sehr nahe wenn nicht gar gleich? So gesehen wären Cantors Formulierung und seine oben zitierten Reformulierungen bei späteren Mathematikern nicht nur naiv, sondern auch sehr natürlich – denn Lorenzens Beschreibung wirkt doch gerade so: natürlich. Dann aber läge in der heutigen Mathematik bereits der Ausweg aus der Sackgasse, in die wir gesteuert sind, da einerseits die konstruktivistischen Vorschläge umgesetzt wären ohne sich dabei das Zirkelproblem eingehandelt zu haben. Um eine solche Parallelität beurteilen zu können, soll hier ganz knapp das axiomatische Konzept vorgestellt werden, in der Fassung von Bourbaki.

Axiomatische Mengentheorie

In den ersten Auflagen der *Théorie des Ensembles* war zuerst die Enthaltensrelation eingeführt worden als eine syntaktisch wohlgeformte Konstruktion („constructions formatives", E I.17). Wann diese Zeichenkette zu einer wahren oder falschen Aussage wird, das klären die ergänzend angegebenen Axiome. Offensichtlich bestand bei solcher Beschreibung weiterer Klärungsbedarf, so dass diesem Anfang später ein neues Kapitel vorgeschaltet ist mit dem Titel *Formale Sprachen.* Hier wird nun genauer dargestellt, was eine syntaktisch wohlgeformte Konstruktion innerhalb einer solchen formalen Sprache sein soll. Diese besteht aus einem Satz an Grundzeichen, die in jeder speziellen Theorie um weitere ergänzt werden dürfen, sowie einem ausreichenden Vorrat an Buchstaben. Über Definitionen können nun für bestimmte immer wieder benötigte Zeichenkombinationen Abkürzungen eingeführt werden (vgl. E I.10). Hier werden zum Beispiel aus den vier Grundzeichen $\tau, \square, \neg, \vee$ alle logischen Symbole zusammengesetzt (wobei die ersten beiden für die Quantoren benutzt werden). Durch Rückersetzung der Definitionen kann aber, wie ständig betont wird, jede Aussage wieder in der rein formalen Sprache ausgedrückt werden, in der die logischen und mathematischen Schlüsse dann sogar von einer Maschine überprüft werden könnten. Da das aber ein menschlicher Leser nicht genauso überschauen kann, hat die definitorische Einführung neuer Begriffe ihren Sinn – natürlich auch weil sie die Intuition des Wissenschaftlers fördern kann. „Nous abandonnerons donc très tôt la mathématique formalisée, mais non sans avoir pris soin de tracer avec précision le chemin par lequel on y pourrait revenir" (E I.11). Das Wort „Intuition" scheint ein Lieblingswort des Autorenkollektivs Bourbaki zu sein, da immer wieder abgesetzte Textpassagen den in der Formalisierung verlorengegangenen Sinn erläutern und ihn mit der natürlichen Vorstellung des Lesers verknüpfen sollen: „D'autre passages contiendront des commentaires destinés à rendre plus claire la marche des idées, au besoin par un appel à l'intuition du lecteur" (E I.11). Dabei gibt es aber nicht *die* geeignete Interpretation. Im Gegenteil soll ja gerade unterschiedliche Interpretierbarkeit der Kreativität der Mathematiker entgegenkommen. Ähnlich wie bei Lorenzen wird auch hier darauf hingewiesen, dass die Benutzung der normalen Sprache bei der Beschreibung der formalen Sprache unproblematisch ist, wenn auch das Argument der methodischen Ordnung nicht so explizit genannt wird, vielleicht auch hier im Ausschnitt der Mathematik nicht intendiert ist: „Nous ne discuterons pas de la possibilité d'enseigner les principes du langage formalisé à des êtres dont le développement intellecttuel n'irait pas jusqu'à savoir lire, écrire et compter"

(E I.10). Und hat sich die konstruktive Erklärung des Begriffs Menge nicht auch bei Bourbaki niedergeschlagen, wenn dort in einer ersten der eben erwähnten beschriebenen „Intuitions-Passagen“ über die naive Mengenauffassung Folgendes zu lesen ist? „Nous ne chercherons pas à formaliser cette notion, et dans l'interprétation formaliste de ce qui suit, le mot „ensemble“ doit être considéré comme strictement synonyme de ‚terme‘ “ (E II.1). Die angebotene Alternative lautet nämlich, in der Mengentheorie die beiden Grundzeichen $=$ und $\in$ einzuführen, und zwar als zweistellige relationale Zeichen. Das heißt insbesondere Folgendes: „Si T et U sont des termes, l'assemblage $\in TU$ est une relation (dite *relation d'appartenance*) que nous noterons pratiquement $\ldots T \in U$“ (E II.1). In diesem Licht wird der obige Kommentar verständlich, so dass Bourbaki sogar sagen kann: „En particulier, des phrases telles que „soit X un ensemble“ sont, en principe, totalement superflues, puisque toute lettre est un terme; de telles phrases ne sont introduites que pour faciliter l'interprétation intuitive du texte“ (ebenda). Ist damit nicht genau die Funktion des Abstraktors wiedergegeben, als den Lorenzen den Mengenbegriff interpretiert hatte?

Und ähnlich wie bei Lorenzen wird trotzdem die Rede von Mengen als abkürzende Schreibweise eingeführt, und zwar als

$$\mathcal{E}_x(R) = \tau_y\big((\forall x)((x \in y) \iff R)\big),$$

das heißt als den (wie zuvor gezeigt) eindeutig so bestimmten Term y, dass die Beziehung $(\forall x)((x \in y) \iff R)$ gilt für eine gegebene Relation R (Abschnitt 1.6). Die Relation R entspricht der Formel A von Lorenzen. Die Übereinstimmung in der Bezeichnung ist möglicherweise allerdings zufällig, da das Symbol $\mathcal{E}$ hier wohl von *ensemble* abgeleitet ist, während sich Lorenzen auf die Elementrelation beruft ([19], p. 46). Aber der Kern, das übliche Mengenkonstrukt als vereinfachende Schreibweise einzuführen, ist beiden gemeinsam. Auch das Antinomienproblem wird vergleichbar behoben: Hier durch die Forderung, dass die letztgenannte Beziehung ableitbar sein soll, bei Lorenzen implizit durch die „Dialog-Definitheit“ der Formel A (ebenda, p. 20), was bei beiden Voschlägen auf eine effektive Überprüfbarkeit der definierenden Eigenschaft R bzw. A hinausläuft.

Angesichts all dieser Ähnlichkeiten in der Beschreibung des Mengenbegriffs stellt sich also wiederholt die Frage, ob denn nicht die beiden Ansätze Lorenzen und Bourbaki stellvertretend für die Kritiker und die Vertreter der klassischen Mathematik sich inzwischen angeglichen haben. (Ob die klassische Mathematik durch Bourbaki vertreten werden kann, ist insofern ein wenig problematisch, als das Konzept zum Beispiel hinsichtlich der Gliederungsfunktion der Strukturen oder auch des Formalismus ganz neuartig ist und erst einmal gar nicht klassisch. Außerdem ist es relativ jungen Datums. Aber bei Bourbaki geht es ja gerade darum, den Bestand der klassischen Mathematik – man kann auch sagen: die durch die klassische Logik beweisbaren Sätze der Mathematik – zu sichern, und zwar indem die Schlussweisen so weit expliziert, also formalisiert werden, dass sie sich einfach formal prüfen lassen, was, so Bourbaki, „ne demande qu'une attention en quelque sorte mécanique“ (E I.7). Dieses Vorhaben sowie die weite Akzeptanz machen die Gruppe Bourbaki natürlich sofort zu einem angemessenen Vertreter. Zudem wählt Lorenzen selbst Bourbaki als Kontrahent, wenn er in der Einleitung zu *Differential und Integral* [20] rekurriert auf die „axiomatische Methode, wie sie gegenwärtig insbesondere von Bourbaki gepflegt wird“.) Eine Angleichung und Einebnung der beiden ursprünglich widerstreitenden Standpunkte würde auch erklären, warum heute keiner mehr über solche doch sehr prekären Fragen diskutiert. Und hat nicht Lorenzen den ersten Schritt in Richtung der Streitbeilegung unternommen, wenn er ebenda die beiden Zugänge „durchaus verträglich“ nennt?

Antithese statt Synthese

So sieht es jedenfalls auf den ersten Blick aus. Dass man aber die Differenzen nicht mit genügend Großzügigkeit aus der Welt schaffen kann, belegt sofort eine eingehendere Untersuchung der beiden Beschreibungen. Ein erster Unterschied zeigt sich bei der Beantwortung der Frage, wie Bourbaki den Begriff *Term* benutzt. Ein Term ist nach Abschnitt 1.3 eine in der jeweils behandelten Theorie syntaktisch ableitbare Figur, die nicht mit einem relationalen Zeichen beginnt. „Intuitivement, les termes sont des assemblages qui représentent des *objets*, les relations sont des assemblages qui représentent des *assertions* que l'on peut faire sur des objets“ (E I.18). Demgegenüber gewinnt Lorenzen den Mengenbegriff als Abstraktum aus Aussageformen, die hier unter die Relationen fallen und nicht unter die Terme. Bei Lorenzens Ansatz entstehen bei gleichem Abstraktionsprozess aus Termen nicht Mengen, sondern Funktionen. Das zeigt deutlich, dass der Eindruck der Deckungsgleichheit der beiden Beschreibungen trügerisch war und dass vielmehr bei Bourbaki das Objekt Menge undefiniert bleibt und so zu einem bloßen Term verkommen kann, während dieser Term bei Lorenzen mit Erklärung über seine Entstehung gefüllt wird. Auch landet Bourbaki nicht versteckterweise bei Funktionen, wie sich nach Lorenzen ergeben müsste, so dass nochmals deutlicher wird, dass es sich hier um keinen Abstraktionsschritt handelt, um den Begriff zu gewinnen, geschweigedenn um seine Konstruktion, sondern um einen offengelassenen Begriff. Natürlich ist das Wort „Term“ zwar definiert worden, doch nur mit einer syntaktisch korrekt gebildeten Figur aus Grundzeichen, die zuletzt inhaltslos bleiben. Auch legen die angefügten Verwendungsregeln in keiner Weise diesen Inhalt fest. Die Möglichkeit oder zumindest die Aufgabe einer solch impliziten Definition durch Axiome ist ja gerade von den Formalisten verworfen worden (auch wenn Hilbert anfangs so etwas im Sinn hatte – vgl. [11], p. XIX, und den Briefwechsel mit Frege [12]).

Bei dieser Regelung der genaueren Verwendung durch Axiomensysteme zeigt sich dann auch die nächste Differenz der beiden sich nun wieder gegenüberstehenden Ansätze. In Bourbakis Aufbau werden an das übliche erweiterte Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem ZFF angelehnte Axiome und Axiomenschemata benutzt (vgl. Bourbakis *Note Historique*, E IV.64). Durch abstraktere Formulierung kommt Bourbaki jedoch mit nur noch sechs solcher Regeln aus, während in ZFF einschließlich des Fundierungsaxioms neun benötigt werden (etwa in [5], p. 165). So sind zum Beispiel das Schema der Aussonderungsaxiome und die beiden Vereinigungsaxiome in einem einzigen Schema (S8) erfasst. Ungeachtet dessen erhält man aber ein äquivalentes Axiomensystem mit der gleichen, bereits oben erwähnten Problematik der Widerspruchsfreiheit und der Unvollständigkeit. Lorenzen betont zwar seiner Intention einer Synthese aus Hilbertschem Formalismus und Brouwerschem Intuitionismus[7] entsprechend, dass die Auffassung der Mengen als Formelabstrakta sehr wohl axiomatisierbar sei: „Man erhält dann eine verzweigte Typentheorie, allerdings so vereinfacht, daß nur zwei Typen von Variablen übrig geblieben sind“ ([20], p. 3). Aber es ergibt sich damit ein von den

[7] vgl. [19], p. 10

bisher aufgeführten wirklich verschiedenes Axiomensystem, ein Axiomensystem also, das nicht äquivalent ist mit ZFF. Das ist ein sehr wesentlicher Unterschied, da infolgedessen nicht mehr die klassische Mengenlehre rekonstruierbar ist. Mit der heute in das Zornsche Lemma umformulierten und dann zum Auswahlaxiom äquivalenten transfiniten Induktion Cantors entfällt sodann ein wesentliches Beweismittel der modernen Mathematik – das allerdings auch nur für Aussagen benötigt wird, die in klassischen Axiomensystemen ableitbar sind. Wie bereits erwähnt gestattet aber die konstruktivistische Methode eine Neuinterpretation solcher Sätze, so dass ihr Ergebnis im Wesentlichen erhalten bleiben kann. Die Leistungsfähigkeit einer solchen Mathematik im Ganzen steht aber hier nicht zur Debatte.

Statt dessen ist noch auf den oben zentralen Einwand einzugehen, ob nicht die Axiome wie die Regeln bei Lorenzen einen anfänglich exemplarisch eingeführten Grundbegriff näher bestimmen. Zuerst einmal hatten wir ja schon festgehalten, dass mit den Axiomen keinesfalls eine implizite Definition intendiert ist. Außerdem wird ja bei wirklichen Formalisten gerade auf die völlige Offenheit des Grundbegriffs Wert gelegt. Von exemplarischer Einführung kann also kaum die Rede sein. Betrachtet man aber ein nicht so strenges Verständnis, das sehr wohl Raum für eine Konstruktion oder sonstige Definition dieser Begriffe lässt und das oben nachgewiesen wurde, so übernehmen die Axiome sehr wohl die Funktion einer näheren Bestimmung der zuvor noch verschwommenen Grundbegriffe. Allerdings nicht in der bei Lorenzen vorgeführten Weise durch Abgrenzung zu ähnlichen Begriffen entweder durch ein Hierarchieschema oder eine Polarisation. Das allein würde noch nichts bedeuten, doch präzisieren die Axiomensysteme nicht etwas, was der Grundbegriff durch exemplarische Benennung mit sich tragen würde, sondern sie legen es gerade neu fest: Sie sind gerade so formuliert, dass der Grundbegriff auch völlig unbestimmt sein kann, was bei Lorenzens Spracheinführung fehlschlagen müsste. Zuletzt erhält Lorenzen die Begriffe auch als Abstraktionen aus verschiedenen Regelsystemen, wobei eine Äquivalenz durch entsprechende Stellen in den Regelsystemen entsteht. Es ist aber nicht ersichtlich, wie die Axiome so eine Begriffsbestimmung gestatten, zumal sie ja absichtlich so klein gehalten sind, dass keine solchen entsprechenden Positionen in ihnen überhaupt aufkommen können. Zu einer vagen Behauptung auch eine vage Widerlegung. Aber so vage sie auch sein mag, die genannte Parallelität der Axiomensysteme und der methodischen Regelsysteme scheint Lorenzens Einführung der Grundbegriffe *vor* der Verwendung als Modell eines Axiomensystems nicht ersetzen zu können.

Auflösung der Zirkelvermutung

Akzeptiert man nun einmal die genannten Mängel des bisherigen Zugangs auch wirklich als Mängel, so bleibt die Frage übrig nach einem Ausweg. Abhilfe kann hier Lorenzens vielzitierte Kennzeichnung der Mathematik als „Wechselspiel von Konstruktion und Abstraktion“ ([20], p. 20) schaffen. Die Alternative zu undefinierten Grundbegriffen, die man dann nur formal betrachten kann, wären ganz einfach *definierte* Grundbegriffe, und zwar durch Konstruktionen definierte Grundbegriffe. Dabei ist dieser Einfall gar nicht neu. Er ist ja erst von der axiomatischen Methode seit dem ausgehenden neunzehnten Jahrhundert wegen Unzulänglichkeiten verdrängt worden. (Obwohl in der Geschichte der Philosophie solche Umdenkprozesse auch in die Gegenrichtung bezeugt sind: So wurde als klassischer Fall Platons Ideenwelt in der *Politeia* mit der

Vorstufe der *mathemata* von der sogenannten *Metaphysik* des Aristoteles angegriffen und durch Abstraktionen aus natürlichen oder konstruierbaren Gegenständen ersetzt.) Und tatsächlich stellt sich der Vorwurf eines Zirkels in der Gewinnung der Mengen aus Formeln als unhaltbar heraus, wenn man betrachtet, wie denn diese Formeln verstanden werden. Die Frage, ob nicht bei der Beschreibung und Abgrenzung des zugrunde liegenden Objektbereichs der Mengenbegriff benutzt werden muss, erübrigt sich bei einer Konstruktion des Objektbereichs. Damit ist dieser aber noch nicht auf einen endlichen Bereich eingegrenzt, denn Konstruktionsvorschriften liefern ja gerade Methoden, um zum Beispiel aus bisher konstruierten Objekten beliebig oft ein neues herzustellen, wie dies etwa beim Kalkül der Zählzeichen der Fall ist (siehe [20], Kapitel I). Aber die Konstruierbarkeit des Objektbereichs bringt auch seine Abgrenzung mit sich, eben im Sinn der Herstellbarkeit innerhalb eines natürlich abgegrenzten weil ja in endlich vielen Regeln angegebenen Kalküls – sonst ließe sich nicht mehr von Kalkül sprechen.

Diese Einschränkung ist tatsächlich zu stark, da man ja auch Aussagen über Aussagen machen möchte, was ja zum Beispiel bei der Mengenerklärung mit der Beschränkung auf invariante Aussagen über Formeln bereits geschieht. Und im Rahmen einer methodischen Ordnung ist erst einmal nicht klar, wie Aussagen über einen Objektbereich selbst in einem Kalkül herstellbar und damit abgrenzbar wären: „Für alle logischen Wahrheiten braucht man von den benutzten Aussagen nicht zu wissen, aus welcher (vergangenen, gegenwärtigen oder zukünftigen) Sprache sie stammen: Es genügt, vorauszusetzen, daß die benutzten Aussagen Zeichen (Figuren) sind, die behauptet werden können"([20], p. 10). In diesem Punkt ist der formalistische Ansatz strenger, wenn er sich auf lediglich solche Aussagen beschränkt, die in einer zur jeweils betrachteten Theorie gehörenden formalen Sprache formulierbar sind. Hierfür würde tatsächlich die Konstruktion des Objektbereichs und der verwendeten Operationen genügen. Lorenzen hingegen will durch eine Loslösung von der ausschließlichen Konstruktion von Onjektbereichen die methodische Einführung verschiedener sonst undefinierter Grundbegriffe wie auch hier der Menge ermöglichen. Nur, wie vollzieht man diese Wendung ohne zu schwindeln, will heißen, ohne in den vorgeworfenen Zirkel zu geraten?

„Daß wir solche unabgegrenzten oder ‚*indefiniten*', wie wir terminologisch sagen wollen, Variable sinnvoll benutzen können, liegt daran, daß die Bestimmung, daß A eine Aussage sein soll, schon genügt, um die Wahrheit gewisser Aussagen über A behaupten zu können" wie etwa $A \to A$ (ebenda, p. 10). Diese Unterscheidung zwischen definiten und indefiniten Variabilitätsbereichen ist Lorenzens entscheidende Idee, die auch seine Rekonstruktion der klassischen Analysis erlaubt. Entsprechend müssen auch die Quantoren den Umgang mit solchen indefiniten Variabilitätsbereichen beherrschen. Das leistet ihre dialogische Interpretation, die dabei dem natürlich Intendierten näher kommt als die klassische Interpretation durch Wahrheitstafeln oder allgemeiner gesagt Belegungen. Hier genügt es für den Nachweis einer Behauptung wie „$A(n)$ für alle n" bereits, „für jedes ... vorgelegte n einen Beweis von $A(n)$ zu erbringen" ([19], p. 20). Über nicht konstruierbare und nun weiter gefasst auch über nicht explizit vorliegende Gegenstände braucht demnach gar nichts gesagt werden. Obwohl also der Gegenstandsbereich nicht abgegrenzt ist, lassen sich doch Behauptungen über seine Objekte beweisen und damit erst sinnvoll aufstellen.

Abschließende Diskussion

Auf diese Weise wäre also eine konstruktive Einführung des Begriffs Menge freigesprochen von etwaigen Anschuldigungen der Zirkelhaftigkeit, die auf seiner angeblich grundlegenden Funktion beruhen. Zudem trifft diese Fundierung wie dargestellt genau unsere Benutzung des Begriffs, ist also adäquat. Warum trotzdem auf diesen Ansatz von Seiten der Mathematik nicht eingegangen wird, noch nicht einmal kritisierend, diese Frage lässt sich nicht so leicht beantworten. Sieht man von historischen und vielleicht wissenschaftssoziologischen Aspekten einmal ab, die man weniger diskutieren als nur beschreiben kann, so finden sich zumindest einige Anzeichen in den bisherigen Ausführungen. Beim Wechsel sozusagen der Sprecherseite in der obigen „Diskussion der Standpunkte" finden sich oft Formulierungen der Art „akzeptiert man dies einmal" oder „dies erstmal angenommen". Dies zeigt, dass die Position der Gegenseite oft nicht eindeutig widerlegt war. Eine Entscheidung der jeweiligen Frage hängt sicher noch ab von der Gewichtung oder sonstigen Einschätzung der gefallenen Argumente. So zum Beispiel bei der Beurteilung des offenen bzw. nicht erfüllbaren Beweises der Widerspruchsfreiheit der klassischen axiomatischen Mengentheorie. Aber sie hängt auch ab von nicht genannten Argumenten, die in einem größeren Rahmen stehen und deswegen nicht so kurz und nicht so lokal im Bereich der Mathematik behandelt werden können. Das gilt zum Beispiel für den ganzen methodischen Ansatz überhaupt: Es ist gar nicht so klar, ob man eine theoretische Fundierung des Denkens und der Wissenschaften braucht oder ob sie sich nicht aus anderen Gründen rechtfertigen können wie etwa der Anwendbarkeit und ihrem Erfolg dabei oder auch des Wertes an Kultur, den sie vielleicht besitzen. Und wenn man dem sogar zustimmte, so bliebe doch erst einmal unklar, ob tatsächlich die Lebenswelt als Grundlage geeignet wäre. (Wobei das, soweit ich sehe, schon durch das Argument der Sprache hinreichend begründet ist, da man ja bereits mit der Sprache, in der wir alle Aussagen formulieren, nicht „hinter die Lebenswelt zurück" gehen kann. Aber natürlich müsste man auch das erst erläutern und begründen.) Unter diese grundsätzlichen Probleme fällt aber auch schon die Frage, ob man sich nicht wie in den formalistischen Theorien mit einer einzigen Sprache begnügen könnte und von jeder Aussage in einer anderen Sprache anzugeben verlangt, wie sie in diese zu übersetzen wäre. Damit könnte man sich nämlich auf konstruierbare Aussagen beschränken – alle anderen beträfen einfach nicht die Theorie –, so dass Lorenzens Berücksichtigung der indefiniten Variablen überflüssig würde. Mengen würden dann eben nur für eine spezielle und genauso damit natürlich für jede andere Theorie eingeführt. Es änderte sich einfach der Grundbereich. An mehreren Stellen scheint Lorenzen das auch zu ahnen: „Soweit wir die Theorie der rationalen Zahlen entwickelt haben, stehen uns als Formeln vor allem Gleichungen und Ungleichungen zwischen (rationalen) Termen zur Verfügung" ([20], p. 22). Dieses „vor allem" wirkt doch sehr ausweichend, so als wollte er sich nicht festlegen. Aber, ob die indefiniten Bereiche nun nötig sind oder auch nicht, spielt eigentlich keine Rolle, da man sie quasi gratis, das heißt ohne Schwierigkeiten, geliefert bekommt.

Solche grundsätzlichen Fragen ufern jedoch sehr schnell aus, weshalb man vom konstruktivistischen Ansatz zumindest verlangen kann, dass er sich erst einmal an diesen und jenen Aufgaben bewährt, bevor man seine Ideen übernimmt – zumindest dann, wenn man sich über deren Notwendigkeit nicht einig ist. Sicher, eine höhere Effektivität einer der beiden Seiten würde die zumindest theoretisch offene Präferenz sehr schnell entscheiden, und „nirgendwo ist bewiesen, daß die Physik mit einer verstehbaren (konstruktiven) Infinitesimalmathematik nicht *besser* florieren würde als z.Z. mit einer unverstandenen (axiomatischen) Mathematik" ([21], p. 48). Aber wenn auch die breite Ignoranz vor allem in der Mathematik so eine Bewährung hinsichtlich des Erfolgs chancenlos macht, bleibt doch die Bewährung in der Wissenschaftstheorie und dann, falls man das noch nicht als gegeben ansehen sollte, auch noch deren langsames Setzen.

Über alles Abwägen für oder gegen eine der beiden Seiten, der etablierten oder der widersprechenden, bleibt aber noch das Nebeneinander beider Vorschläge. „Man kann ja beides tun", so Lorenzen in [19]. „So wie die Mathematik Platz hat für den Arithmetiker und für den Geometer, so hat sie auch Platz für eine konstruktive Mengenlehre und Analysis und für eine axiomatische Mengenlehre und Analysis" (p. 10). Das ist, auch wenn auf den ersten Blick merkwürdig, meiner Ansicht nach sehr wohl möglich. Denn erstens gibt es inzwischen auch sonst andere Ansätze in der Mathematik wie etwa die Nichtstandard-Analysis oder auch manchmal widerstreitende, aber sich doch nicht ausschließende Fundamentaldisziplinen wie die Kategorientheorie und die universelle Algebra, die durchaus ihre Berechtigung haben. Und zweitens kann man die klassische Mathematik vielleicht einfach so auffassen, dass ihre Schlussweisen in einem leicht simplifizierten, aber somit eben „schönen" logisch-mathematischen Modell vollzogen werden. Das trägt unbestreitbar sehr zur Effizienz bei, denn wenn alle ihre Strukturen und Objekte hier schon so kompliziert sind, dass man nur mühevoll und mit teilweise riesigen Maschinerien die heutigen Problemstellungen behandeln kann, wie soll man dann erst in einer präziseren und somit komplizierteren Mathematik zu Lösungen finden? Insofern relativiert sich auch die Ignoranz der Mathematiker, die ja schon mit diesem *toy model* alle Hände voll zu tun haben. In dieser Sichtweise möchte ich den Plural des Titels verstanden wissen – Mathematiken.

Literatur

[1] Nicolas Bourbaki, *Éléments de Mathématique. Théorie des Ensembles*, Hermann, Paris 1970.

[2] L. E. J. Brouwer, *Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten*, in: ders., *Collected Works*, pp. 150-190, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Oxford 1975.

[3] Georg Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, in: ders., *Gesammelte Abhandlungen*, pp. 282-351, Verlag Julius Springer, Berlin 1952.

[4] Krzysztof Ciesielski, *Set Theory for the Working Mathematician*, Cambridge University Press, Cambridge 1997.

[5] Heinz-Dieter Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1977.

[6] Herbert B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, San Diego 1972.

[7] Abraham A. Fraenkel, *Abstract Set Theory*, 4. Auflage, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Oxford 1976.

[8] Abraham A. Fraenkel & Yehoshua Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory*, 2. Auflage, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London 1973.

[9] Gottlob Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Wilhelm Koebner, Breslau 1884.

[10] Gottlob Frege, *Über die Grundlagen der Geometrie*, in: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XII, pp. 319-324, 1903.

[11] Gottlob Frege, *Nachgelassene Schriften*, Felix Meiner Verlag, Hamburg 1969.

[12] Gottlob Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Felix Meiner Verlag, Hamburg 1976.

[13] Felix Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Reprint, Chelsea Publishing Company, New York 1978.

[14] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, 9. Auflage, Teubner Verlag, Stuttgart 1991.

[15] Peter Janich, *Kleine Philosophie der Naturwissenschaften*, Verlag C. H. Beck, München 1997.

[16] E. Kamke, *Mengenlehre*, 3. Auflage, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1955.

[17] Dieter Klaua, *Mengenlehre*, Verlag de Gruyter, Berlin, New York 1979.

[18] Hanfried Lenz, *Grundlagen der Elementarmathematik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.

[19] Paul Lorenzen, *Metamathematik*, Bibliographisches Institut, Mannheim 1962.

[20] Paul Lorenzen, *Differential und Integral. Eine konstruktive Einführung in die Analysis*, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main 1965.

[21] Paul Lorenzen, *Methodisches Denken*, in: ders., *Methodisches Denken*, 3. Auflage, Suhrkamp-Verlag, Frankfurt am Main 1988.

[22] Paul Lorenzen, *Wie ist Philosophie der Mathematik möglich?*, in: ders., *Konstruktive Wissenschaftstheorie*, Suhrkamp-Verlag, Frankfurt am Main 1974.

[23] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New-York 1971.

[24] H. v. Mangoldt & Konrad Knopp, *Einführung in die höhere Mathematik*, 13. Auflage, S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1967.

[25] Joseph Maurer, *Mathemecum*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1981.

[26] Kurt Meyberg & Peter Vachenauer, *Höhere Mathematik 1*, 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1991.

[27] Redaktion für Philosophie des Bibliographischen Instituts, *Schülerduden „Die Philosophie“*, Dudenverlag, Mannheim 1985.

[28] Christian Thiel, *Philosophie und Mathematik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1995.