Thomas Eckert
eckert(@)mathematik.uni-marburg.de

Dr. E. Düsing
Philosophisches Proseminar
Plato, Politeia

Die zentrale Bedeutung der Mathematik in Platos Lehrplan

POLITEIA, BUCH VII, 521c-531c

Ausarbeitung eines Referates zu diesem Thema
am 3. Februar 1995

Marburg, 7. März
1995

Die zentrale Bedeutung der Mathematik in Platos Lehrplan

POLITEIA, BUCH VII, 521c-531c[1]

Im Anschluß an das Höhlengleichnis stellt sich natürlich die Frage, wie es denen, die später die Lenker des Staates werden sollen, ermöglicht werden kann, aus dem Dunkel der Höhle in das Licht zu gelangen, welche Kenntnis zur *Erkenntnis* der Ideen und zuletzt der höchsten Idee, der Idee des Guten führt, zur „*wahren Philosophie*“ (521c).

Hier wird Plato nicht nur *eine* Kenntnis, *eine* Wissenschaft vorführen, sondern ein ganzes System von Wissenschaften, die zusammengenommen dazu imstande sein sollen, die ganze Seele in einem behutsam angelegten Ausbildungsgang umzulenken, hin auf die vollkommene Erkenntnis. Diese Kenntnisse, die sich als Fächerkanon im mittelalterlichen Quadrivium und bis in die Lehrpläne unseres Jahrhunderts gehalten haben, das, „was man, wie wir sagen, wissen muß“ (531e), all das ist nicht unbedingt neu, nein, Plato greift lediglich auf bereits institutionalisierte Wissenschaften zurück, aber – und das ist wichtig – er verleiht ihnen ein neues Verständnis und eine neue Ordnung.

Zu beachten ist bei der Konzeption eines Lehrplanes die Überzeugung Platos, wie er sie im MENON darstellt, wo Sokrates einen Sklavenjungen allein durch Fragen unterrichtet[2]. Die Seele ist nicht späteren Auffassungen zufolge eine *tabula rasa*, sondern sie hat bereits alle Ideen einmal geschaut, und ein Lehren könne demnach nicht darin bestehen, den Schülern neues Wissen einzutrichtern, sondern wird in ihnen nur die Erinnerung an diese Dinge erwecken.

Gleich zu Beginn der Überlegungen gibt Platos Sokrates einen Hinweis, wie diese Kenntnis zu finden ist, wenn er daran erinnert, daß die Herrscher auch Krieger sein müssen, und jene Kenntnis also auch dem Kriegswesen dienlich sein müsse. Dabei ist natürlich dieses Argument nur Nebensache, da es ja eigentlich um die wahre Erkenntnis geht, sie zu finden oder zu ihr zu führen.

Zuerst fallen ihm Gymnastik und Musik ein, die ja anfangs schon einmal als für die Erziehung so ergiebig befunden wurden. Aber Gymnastik könne doch niemals zum Sein hinführen, da sie es ja ganz mit der Entwicklung des Körpers zu tun habe. Und auch in der Form des Trainings, der gymnastischen Ausbildung, steckt ein Entstehen, das dem Vergehen entgegenwirkt.

Wie nun die Musik? Diese allerdings ist ja, so Glaukon, keine Kenntnis, keine Wissenschaft, sondern sie beeinflußt nur, bewirkt Wohlgestimmtheit. Damit sind zugleich schon alle Künste ausgeschlossen.

Und Sokrates bietet etwas überraschend sofort die Lösung an: das, was alle Künste und Wissenschaften benötigen, nämlich „*arithmoi kai logismos – Zahl und Rechnung*“, (522c). Er zeigt an der Kriegskunst, für die ja die gesuchte Kenntnis auch hilfreich sein soll, wie notwendig dies ist.

1Als Übersetzung von Schleiermacher liegt zugrunde die Ausgabe Plato, Politeia, Rowohlts Klassiker, Hamburg 1992

2 Plato, Menon, 81e-85d

Seltsamerweise lenkt er gleich wieder von seiner Idee ab, um erst grundlegende Eigenschaften der gesuchten Kenntnis zu klären. Doch ist dieser Schritt berechtigt, da er so am Ende seinen Vorschlag der Rechenkunst zugleich abgesichert hat. – Und er äußert hier tatsächlich Bedenken über die Akzeptanz.

Zuerst einmal gebe es Wahrnehmungen, die die Vernunft beanspruchen, und wiederum andere, die dazu völlig wertlos seien, die sich bereits selbst genügen. Und zwar, erklärt er, wenn eine Wahrnehmung zugleich sein Gegenteil zuließe, genau dann sei die Vernunft beansprucht zu entscheiden, wie sich dieses Merkwürdige nun wirklich verhalte und wie es einzuschätzen sei. Dazu ein Beispiel. Drei Finger, so zeigt er, seien alle drei Finger, egal ob dick, dünn, weiß oder schwarz, das beanspruche keine Überlegung. Das Erkennen der Größe an sich hingegen erfordere mehr als nur das Sehen, denn ein Finger erscheine einmal groß und einmal klein, abhängig von der Entfernung und in Relation zu den anderen. Aber dies sei doch völlig einander entgegengesetzt, und wenn die Seele beides als *ein* Ding gemeldet bekomme, so habe sie mit der Vernunft zu entscheiden, ob es sich wirklich um ein Ding handelt, und wie dies dann zu verstehen sei.

Mit diesem neuen Aspekt nun fällt es leichter, die zuvor genannte Rechenkunst, die Arithmetik, als eine Kenntnis einzustufen, die wirklich als Hinleitung zum Wesentlichen geeignet ist, denn es läßt sich feststellen, daß niemals ein Ding einheitlich wahrgenommen werden kann, sondern immer so oder so oder auch ganz anders. Die Einheit also ist genau wie die Größe oder jeder abstrakte Begriff einzuschätzen als nur erkennbar, nicht aber bereits sichtbar oder hörbar, – wahrnehmbar.

Aber mit der Einheit, dem Eins, der Eins beschäftigt sich in herausragender Weise die Arithmetik, die gerade viel auf das Erklären der Zahlen verwandte. So entwickelte man folgende Theorie der Zahlen: Zu anfangs hat man eine Einheit, die Eins. Nimmt man zwei davon zusammen, so bekommt man eine neue Einheit, eine größere, die Zwei. Nun, die Drei ist nicht zusammengesetzt, wie man später versucht war zu denken, aus drei mal der ersten Einheit, sondern aus der ersten und der zweiten. Auf gleiche Weise die Vier, nämlich aus zweimal der Zwei. Und hier angekommen, bemerkt man schon, daß sich alle Zahlen, je nach dem ob ungerade oder gerade, aus großen und kleinen Einheiten aufbauen, womit man wieder am Punkt der Größe aus dem Fingerbeispiel angelangt wäre.

Wie man sieht, ist Arithmetik eben nicht nur Rechenkunst, wie sie auch Kaufleute betreiben, sondern sie beschäftigt sich mit den Zahlen selbst und ihrem eigentlichen Wesen. Von daher ist die Übersetzung Schleiermachers hier ein wenig ungünstig gewählt, denn der Begriff *Rechenkunst* assoziiert viel mehr das praktische Rechnen, eine angewandte Mathematik, als die theoretische, die reine Mathematik. *Zahlenkunst* würde das Gemeinte besser verdeutlichen. Außerdem schreibt Plato ständig *arithmétiké te kai logistiké*. Wahrscheinlich wird Schleiermacher davon ausgegangen sein, daß gerade *logistiké* in der Antike die Rechenkunst, das praktische Rechnen bezeichne, wie dies auch viele antike Autoren bezeugen – siehe Proklos. Aber *„there is a great gulf between what Plato is describing and what the neo-Platonic commentators understand by these terms* [scilicet *arithmétiké te kai logistiké*]" behauptet Fowler und zeigt, daß in den Texten zu Platos Zeit eine solche Unterscheidung nicht festgestellt werden kann, sondern beide Begriffe willkürlich einmal für die Theorie, ein andermal für die Rechnerei der „*Handelsleute und Krämer*“ (525c) benutzt werden. Im Gegenteil identifiziert er innerhalb seiner neuen Rekonstruktion der frühen griechischen Mathematik *logistiké* mit einer speziellen, später verlorengegangen *Verhältnistheorie*, abgeleitet von *logos*, das im mathematischen Kontext gerade im Sinn von *Verhältnis* gebraucht wird. Und er rekonstruiert diese *Theorie*, die um alles andere als der Praxis willen so intensiv untersucht und erforscht wurde, und in der gesamten mathematischen *Theorie* der Griechen eine bedeutende Rolle spielt, wie wir noch sehen werden. Sie ist charakterisiert durch den Begriff *anthuphairein* von *anti-hypo-hairesis*, also *reziproke Sub-Traktion*, was von der Verfahrensweise zur Berechnung eines solchen Verhältnisses zweier Größen herrührt, welche sich heute noch erhalten hat im sogenannten *Euklidschen Algorithmus* zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers. Die Auswertung eines Verhältnisses *7:5* geschieht nicht durch die uns selbstverständlich erscheinende Berechnung des Bruches zur Dezimalzahl *1,4* – das, so Fowlers These, war den Griechen unbekannt, sonst hätten manche Probleme einfacher oder überhaupt gelöst werden können; und auch Platos Worte in der Politeia selbst schließen diese Möglichkeit unmißverständlich aus, wenn er sagt, daß „*die sich hierauf verstehen, wenn einer die Einheit selbst im Gedanken zerschneiden will, wie sie ihn auslachen und es nicht gelten lassen; sondern wenn du sie zerschneidest, vervielfältigen jene wieder, aus Furcht, daß die Einheit etwa nicht als Eins, sondern als viele Teile angesehen werde*“ (525d). Nein, der „*anthyphairetische*“ Algorithmus arbeitet anders. Er erzeugt durch wiederholte Subtraktion des kleineren gegebenen Wertes vom größeren und durch umgekehrtes Verfahren mit dem Rest eine Kette von Zahlen, die angeben, wie oft sich der jeweilige Wert subtrahieren ließ, was einer Division mit Rest entspricht. Um dies an unserem einfachen Beispiel zu veranschaulichen, würde man feststellen, daß die *5 einmal* in der *7* enthalten ist, und es bleibt *2*. Nach dem Prinzip des *Kleineren zum Größeren* ist dann die *2 zweimal* in der *5* enthalten mit Rest *1*, welcher sich zuletzt genau *zweimal* von der vorigen 2 abziehen läßt, was zur Anthyphairesis *7:5=[1,2,2]* führt. Anhand dieser *repetition numbers*, so benennt sie Fowler, die das Verhältnis eindeutig beschreiben, wird ein Vergleich verschiedener solcher Verhältnisse ermöglicht. Dabei ist zu beachten, daß die ungeraden Stellen der Anthyphairesis wegen der Vertauschung während der Berechnung auch umgekehrt verglichen werden müssen. Wieder wie bei den Zahlen spielt also die Größe in Abhängigkeit von gerade und ungerade eine Rolle.

Und unter einem mathematischen Aspekt läßt sich damit das Fingerbeispiel insgesamt auch noch ganz anders verstehen, wenn man nämlich die Finger als Symbol für drei Linien auffaßt und ihre „*Größe und Kleinheit*“ (523e) als derartige Verhältnisse betrachtet. Sind diese Begriffe vielleicht nicht zufällig gewählt hier im Zusammenhang der Mathematik? Jedenfalls tauchen Formulierungen wie „*das Kleinere zum Größeren*“, „*ho elassón ton meizonos*“, in den ELEMENTEN des Euklid immer wieder auf. – Und Euklid gehörte ja auch zur Akademie Platos.

Außerdem, heißt es zuletzt noch im Abschnitt über *arithmétiké te kai logistiké*, zeige sich beides auch auf ganz einfache Weise als sehr brauchbar in bezug auf Erkenntnis. Denn es verleihe eine allgemeine Auffassungsgabe, die in jeder anderen Wissenschaft und Fertigkeit von Nutzen sei, nicht zuletzt weil die Beschäftigung mit diesen Dingen so überaus schwierig sei.

Aus all diesen Gründen seien also *arithmétiké te kai logistiké* bestens geeignet, sie zum Kernstück der Ausbildung zum echten Philosophen zu machen.

Wenn aber die Arithmetik eine so große Rolle auch in anderen Disziplinen spielt, „*oder ist es damit nicht so, daß jegliche Kunst und Wissenschaft daran teilnehmen muß*" (522c), so werden solche, die stark mit ihr zusammenhängen wohl die gleiche Eigenschaft besitzen, dem gesuchten Zweck dienlich zu sein.

Da ist zuallererst die Geometrie, die man heute ja direkt unter die Mathematik einordnet, und die im Liniengleichnis in einem Atemzug genannt wird mit – und sogar vor – der Arithmetik. Zudem wurde im antiken Verständnis die Geometrie erst aus der Arithmetik abgeleitet, bevor Euklid etwas später eine neue, konstruktive Theorie entwickelte.

Ordnet man die oben beschriebenen Zahlen ihrer Größe nach hintereinander an und vernachlässigt einmal ihr Wesen, vergißt sogar, daß zwischen der zwei und der fünf noch andere Zahlen stehen, und betrachtet nur diese beiden, so erkennt man einen Abstand, eine Ausdehnung, *auxé*, lateinisch *dimensio*, und ist bei der ersten Dimension angelangt. Ähnlich wird die zweite Dimension entwickelt, so daß man eine gedachte Ebene erhält[3].

Auch hier beginnt Sokrates mit der Lappalie der Kriegskunst, in der die Geometrie – Schleiermacher übersetzt hierfür passend auch manchmal Meßkunst – natürlich wichtig ist. Aber „*zu dem allen, sagte ich, ist freilich ein sehr kleiner Teil der Rechenkunst und der Meßkunst notwendig*" (526d). Hier ist die Übersetzung Meßkunst schon nicht mehr ganz so gut gewählt, denn die Geometrie soll mehr sein als bloßes Messen.

Allerdings, so kritisiert Plato – wie auch schon im Liniengleichnis, – wird sie für gewöhnlich als solche angesehen, selbst von ihren „Meßkünstlern", die es oft darstellen, als betreibe man sie um der Praxis willen oder irgendeines Nutzens wegen für „*sichtbare Gestalten*", obwohl „*sie nicht von diesen handeln, sondern von jenem, dem diese gleichen, und um des Vierecks selbst willen und seiner Diagonale ihre Beweise führen*" (510d), man beachte nur den Eingangsdialog im MENON. In Wahrheit demnach, so betont Sokrates, bestünde ihr einziger Nutzen in der Erkenntnis, und das sei viel wertvoller einzuschätzen. Denn es handle sich um die Erkenntnis des Seienden.

Wie er das meint und warum, ist nicht auf Anhieb klar, und es wird auch nicht begründet. Vielleicht war es für einen Griechen selbstverständlich, so daß dies keiner Erklärung bedurfte. Nämlich angesichts der Ableitung aus der Arithmetik beruht die Geometrie doch auf den Zahlen, auf der „*wahrhaften Zahl*" (529d), und man könnte ergänzen, auf der

3 nach mündlichen Erkundigungen, wie auch Zahlentheorie

wahrhaft seienden Zahl.
Aber Aufschluß darüber erteilen auch seine Worte „um des Vierecks selbst willen". Er meint wirklich das Viereck an sich, ein materieloses, allgemeines, in keiner Weise festgelegtes Viereck – eben die Idee des Vierecks.
Diese Vorstellung läßt sich ein wenig vergleichen mit der in den 80er Jahren aufgekommen sogenannten objektorientierten Computerprogrammierung, wo abstrakte Datentypen definiert werden, die allgemeine Idee eines Objekts, von denen spezielle Objekte abgeleitet werden können – etwa von der Klasse 'Viereck' die Objekte 'Quadrat', 'Rechteck', 'Parallelogramm'.

Aber wie dies auch sei, scheinbar spielte in der Mathematik vor unseren Tagen die Geometrie eine ganz andere Rolle, vielleicht die der heutigen Algebra. So sieht sich noch Fermat um 1685 zu der Frage veranlaßt, ob die vergleichsweise geringe Kenntnis auf dem Gebiet der Arithmetik „*darauf zurückzuführen ist, daß bis heute Arithmetik eher geometrisch behandelt wurde als arithmetisch*"[4]. Und bei Plato selbst und Aristoteles kann das Wort *diagramma* sowohl eine geometrische Figur als auch einen Beweis meinen, was uns direkt in den Kern der Sache führt. Schaut man in antike Werke der Mathematik, vornehmlich die ELEMENTE des Euklid, so findet man teils allgemeine Aussagen immer auf geometrischem Weg bewiesen, durch Konstruktion einer geeigneten Figur. Gegeben ist eine Linie, die als Einheit benutzt wird. Alle anderen Linien werden im Verhältnis zu ihr behandelt, womit man wieder bei Fowlers *logistiké* angekommen wäre. Aber diese Beziehung läßt sich auch anders herum herstellen, wenn man beachtet, daß im Prinzip auch komplizierte Längen wie $\sqrt{2}$ mit Hilfe der Anthyphairesis leicht angegeben werden konnten, allerdings nicht in unserem Verständnis einer Dezimalzahl, sondern einfach als Länge der Diagonale in einem Quadrat über der gegebenen Einheitslinie, also in einem geometrischen Verständnis als Verhältnis zur Seite. Und nicht nur das, auch entstehen Sätze und Propositionen überhaupt nur in solchem geometrischen Verständnis und mit geometrischer Deutung und Aussage und sind anders erst einmal nicht denkbar. Im ganzen läßt sich also gerade in der griechischen Mathematik um Plato eine enge Verknüpfung der *geómetria* mit *arithmétiké te kai logistiké* feststellen, – und das hat Platos Sokrates ja nur sagen wollen.

Zuletzt wird der Geometrie wie der Arithmetik zuvor ja auch zugutegehalten, daß sie Fähigkeiten bewirkt, die überall nützlich einzusetzen sind – man vergleiche nur das eingangs angeführte Kriegswesen, – wodurch sie also erst recht geeignet erscheint, die letztendliche Erkenntnis zu erleichtern.

Mit der dritten Wissenschaft ist es nun ein wenig anders, was man schon an dem Umstand bemerkt, daß die Reihenfolge der Aufzählung etwas durcheinander gerät. Das hat aber seine Bewandtnis, denn wie Glaukon bemerkt, „*scheint dies noch nicht gefunden zu sein*" (528b), war also noch gar keine Wissenschaft, oder besser, war noch nicht richtig Gegenstand von Wissenschaft und Untersuchung. Von was die Rede ist, läßt sich sogar leicht erraten, denn

---

4 nach Heath, Diophantus of Alexandria, 285 – aus D.H.Fowler, The Mathematics of Plato's Acadamy – A New Reconstruction, Oxford 1987, Seite 57, im Folgenden zitiert als Fowler.

war die Geometrie aus der Arithmetik abgeleitet worden, so läßt sich in dieser Ableitung natürlich noch weitergehen, indem man nach der zweiten Ausdehnung auch die dritte betrachtet, und zwar, so wendet Sokrates schlüssig ein, noch bevor man den Körper in Bewegung setzt, und diesen erforscht (528b). Die beschriebene Disziplin ist also die Stereometrie, die Geometrie des Körpers. Heute faßt man sie natürlich als Teilgebiet der Geometrie auf, genau wie Platos ebene Geometrie, aber bleiben wir trotzdem bei der Bezeichnung Geometrie nur für das zuvor Gesagte.

Hier nun erbringt Sokrates überhaupt keinen Beweis dafür, daß es sich auch um eine geeignete Wissenschaft handelt, den Intellekt aufzuwecken. – Aber das ist ja auch selbstverständlich wegen ihrer Verwandtschaft mit der Geometrie. Beide beschäftigen sich mit abstrahierten Objekten, die den Ideen der Objekte schon viel näher kommen als die Objekte unserer Wahrnehmung. In einem sogar ausgesprochen anwendungsorientierten HANDBUCH DER MATHEMATIK habe ich folgende einleitende Beschreibung gefunden: „*Die Stereometrie vermittelt als Geometrie des dreidimensionalen Raumes eine vertiefte Einsicht in die räumlichen Beziehungen der objektiven Realität*.“[5]

Außerdem *kann* Sokrates hier noch nicht viel zum Beweis anführen, einfach weil es sich eben um ein noch zu unerforschtes Gebiet handelt. Zwar gab es schon einige Untersuchungen von Körpereigenschaften, etwa durch den Mathematiker Hippokrates oder auch bereits durch Archytas und Theaitetos, das schließt Plato ja auch nicht aus, aber richtig erforscht scheint dieses Gebiet tatsächlich wie beschrieben noch nicht gewesen zu sein, gerade in Bezug auf *logistiké* als Verhältnistheorie. Wie verhält sich etwa die Diagonale im Würfel zu dessen Einheitsseite? – Die Länge dieser Diagonale wäre $\sqrt[3]{2}$. Von daher kann Plato aufgrund seiner Fragestellung an die Mathematik mit Recht zu den Erfindern oder Entdeckern der Stereometrie gerechnet werden.

An diesem Punkt stellt sich die Frage, inwieweit Plato selbst Mathematiker war oder wenigstens bei „richtigen“ Mathematikern mithalten konnte. Darüber wird in der Forschung noch gestritten. Während die einen nur folgende Einschätzungen zulassen: „*Philodemus says that mathematics made great progress under the direction of Plato, who formulated problems which the mathematicians zealously investigated.*“ (Cherniss)[6], gehen andere schon weiter: „*It has been said that Plato was not an original mathematician. But it is worth remarking that the theorems he here uses are not attested before Hellenistic times.*“ (Allen)[7]. Fowler hingegen unterstellt ihm die sichere Fähigkeit, zumindest mit seinen Mathematikern diskutiert zu haben[8]. Das scheint mir das Mindeste zu sein, denn wie könnte er hier sonst so emphatisch seine *arithmétiké te kai logistiké* und seine *geométriké* präsentieren? Und nicht nur, daß er sie quasi am eigenen Leib erfahren haben muß, um ihre Bedeutung für die Erkenntnis einschätzen zu können, zudem kritisiert er ja sogar ihre bestehende Ausübung, und das verlangt tiefere Einsichten in ihr Wesen.

---

5 Gellert, Handbuch der Mathematik, Leipzig, 215

6 Cherniss, The Riddle of the Early Academy, – aus Fowler, 106

7 Allen, Plato's Parmenides, Translation and Analysis, 258, – aus Fowler, 64

8 Fowler, 107

Überhaupt fällt in diesem Abschnitt der Stereometrie eine Begründung für ihre Geeignetheit quasi der Untersuchung zum Opfer, wie die Tatsache zu erklären ist, daß diese eigentlich konsequente Weiterentwicklung der Geometrie bisher so wenig Interesse erregt hat. Und Plato erweist sich hier wieder als ein trefflicher Analysator. Als erstes, so beschreibt Sokrates, hindert die Schwierigkeit und Kompliziertheit dieses Gebietes daran, es in Angriff zu nehmen. Sodann bedürften Forscher eines Leiters, der gerade wegen der Komplexität die Bestrebungen zusammenhielte, der sich aber nur schwer finden wird, und selbst wenn, durch Arroganz und Ehrgeiz der Forschenden seinen Auftrag nicht gerade leichtgemacht bekäme. Der einzige Ausweg aus diesem Dilemma könnte sein, und dies ist wieder ein Plus für seine polis, daß ein Staat die Führung übernimmt, worauf bisher keiner Wert gelegt hat, was aber für die Ausbildung der Herrscher von äußerster Wichtigkeit und sogar Notwendigkeit ist. Denn „*das aber ist die Sache, nichts Geringes, jedoch schwer zu glauben, daß durch jede dieser Kenntnisse ein Sinn der Seele gereinigt wird und aufgeregt, der unter anderen Beschäftigungen verlorengeht und erblindet, obwohl an dessen Erhaltung mehr gelegen ist als an tausend Augen*“ (527e).

Diese Worte stehen in einem für die ganze Konzeption der gesuchten Kenntnisse zentralen Zusammenhang, zu Beginn des dritten Abschnittes, also in der Mitte dieser Ausführung. Nach einer Einleitung, in der sich Sokrates endgültig von dem Seil der nebensächlichen Nützlichkeit für die Kriegskunst abwendet und sich gar über Glaukon lustig macht, der nur seinen anfänglichen Einfall hier fortsetzen möchte, legt er offen dar, daß es keinen Zweck hat, irgendjemanden von der Nützlichkeit dieser Kenntnisse zu überzeugen zu versuchen, der verbohrt auf seine Schattenwelt schaut. Die Folgerung, die Sokrates daraus zieht und die Glaukon ausspricht, wirkt ein wenig widersprüchlich zu der hoffnungsvolleren Feststellung, daß die Verwirklichung eines solchen Staates wenigstens nicht unmöglich ist (502a): „*So, sprach er, will ich am liebsten, vorzüglich meiner selbst wegen, reden sowohl als auch fragen und antworten.*“ (528a) Vielleicht erklärt sie sich ein wenig durch die vielen Mißerfolge Platos in dieser Hinsicht, als er mehrmals versuchte in Syrakus Einfluß zu nehmen zur Verwirklichung eines guten Staates. Außerdem wirkt es wie ein so vielleicht eindringlicheres Apellieren an den Leser des Dialogs, und Plato war ja bekanntlich ein sehr geschickter Schreiber.

Nun aber kommt er zur schon angekündigten Astronomie, die ebenfalls aus dem Bisherigen abzuleiten ist, und jetzt nach der „Entdeckung“ der Stereometrie sogar noch viel besser. Allerdings führt die Andeutung, daß „*wir nach der Fläche gleich den Körper in Bewegung nahmen, ohne ihn zuvor an und für sich betrachtet zu haben*“ (528b), auf eine falsche Fährte, denn der Bezug besteht für Plato gerade nicht in den Objekten der Sterne, wie wir später sehen werden. Unabhängig davon hat jedenfalls die *astronomia* eine ihr eigene Mathematik inne, was nur – wie beinahe erwartet – zu Platos Leidwesen in ihr zumeist nicht erkannt wird.

Irgendwie wirkt das ganze Thema des Curriculums sehr schwierig, denn konnten seine Hörer bisher gut folgen, so läßt Sokrates hier wieder den eigentlich doch gutwilligen

Glaukon mit seiner Beschreibung der Astronomie geradezu in eine Sackgasse laufen, um ihn anschließend auf eine fast sarkastische Weise auseinanderzunehmen, so daß Glaukon nur noch zugeben kann, „*da ist mir recht geschehen, und wohlverdient hast du mich gescholten*" (529c). Dies drückt möglicherweise ein wenig Verärgerung aus über das unzureichende Verständnis der Wissenschaften, das Plato immer wieder feststellt. Andererseits paßt natürlich eine solche Art in das Bild des Sokrates, der ja immer bedacht war, seine Mitmenschen darauf aufmerksam zu machen, wie wenig sie eigentlich wissen.

Und man muß ihm zugutehalten, daß die Darstellung Glaukons wirklich ein wenig einfältig ist, o ja, die Astronomie ließe die Seele nach oben schauen zum Sternenhimmel. Also, so unterstellt ihm Sokrates, wirst du auch sagen, daß einer, der nur ein Deckengemälde betrachtet, mit der Vernunft sehe statt mit den Augen. Na, da käme er aber im Lernen nicht sehr weit, „*und wenn er auch ganz auf dem Rücken liegend lernte*" (529c).

Wieder ernsthaft geworden beschreibt er dann eine wahrhafte Astronomie, die das erforscht, was nur *erkennbar* ist, dem Sichtbaren aber verborgen bleibt, nämlich die Bewegungen am Himmel, denen – und das ist der eigentliche Kernpunkt – bestimmte Zahlenverhältnisse zugrunde liegen und bestimmte Figuren. Diese bewirken den Zusammenhang zu den vorangegangenen Geometrien und zur Arithmetik, vor allem aber zur *logistiké*. Und diese, nur diese gilt es zu erforschen und zu begreifen. Daß es an den Bewegungen, dem Abwechseln von Tag und Nacht, den Monaten, den Jahreszeiten, genug zu erkunden gibt, ist klar, da sie „*doch Körper haben und sichtbar sind*" (530b).

Nicht die Gebilde am Himmel, sondern die „*Bewegungen, in welchen die Geschwindigkeit, welche ist, und die Langsamkeit, welche ist, sich nach der wahrhaften Zahl und allen wahrhaften Figuren*" (529d) richten, können durch ihre Teilhabe am Sein „*das von Natur Vernünftige in unserer Seele aus Unbrauchbarem brauchbar machen*" (530b).

Während also alle vier genannten Wissenschaften der Reihe nach aufeinander aufbauten, so nimmt die letzte in dieser Hinsicht eine kleine Sonderstellung ein. Es geht um die Wissenschaft der Harmonie, also eine Art Musiktheorie, spezieller eine mathematische Musiktheorie.

Zwar stellt Plato sie direkt neben die Astronomie, wenn Sokrates sagt, „*es scheinen ja wie für die Sternkunde die Augen gemacht sind, so für die harmonische Bewegung die Ohren gemacht*" (530d), und er führt sie auch beide auf Bewegung zurück, doch läßt sich in dieser *harmoniké* mit der *geómetria* nicht mehr viel anfangen, dafür aber um so mehr mit *arithmétiké* oder noch eher *logistiké*. – Tatsächlich spricht er in den folgenden Zeilen auch nur noch von Zahlen und verweist auf die Pythagoräer, die bereits eine seiner Meinung nach vernünftige Theorie entwickelt haben. Diese hatten ja sogar den Zahlen als *arché* verschiedene Eigenschaften zugeordnet, zum Beispiel der vier die Gerechtigkeit. Ja, Pythagoras selbst scheint gerade über die Musiktheorie auf die Bedeutung der Zahlen gekommen zu sein, da er es war, der den Zusammenhang von Saitenlängen eines Instrumentes zu den Intervallen entdeckt hatte, etwa 2:1 für die Oktave, 3:2 für die Quinte oder 4:3 für die Quarte. Und dies sind Verhältnisse im Sinne unserer *logistiké*.

Wieder auf ironische Weise zieht Plato über die sogenannten Musikwissenschaftler her, die „*es mit der Harmonie ebenso machen*" (530e) wie die falschen Sternkundigen mit ihren Sternen. Sie vermessen die Akkorde selbst, mühen sich mit etwas ab, „*womit sie nicht zustande kommen*" (531a), „*suchen in diesen wirklich gehörten Akkorden die Zahlen, aber sie steigen nicht zu Aufgaben, um zu suchen, welches harmonische Zahlen sind und welches nicht, und weshalb beides*" (531c).

Das überrascht.
Scheinbar geht es gar nicht um die Wissenschaft der Harmonik oder Musiktheorie, sondern vielmehr um die Zahlen in ihr, um das Wesen der Zahlen, ihre Eigenschaften, ihr Verstehen, ihr Erkennen. Und das gar nicht nur hier. Wir haben in dem Vorangegangenen einiges übersehen, was aber zum Verständnis von Platos Konzeption eines Lehrplanes grundlegend ist.

Gerade innerhalb der *harmoniké* hat Fowler einen offensichtlich wichtigen Zusammenhang entdeckt. Bisher konnte scheinbar in der Theorie der *logoi*, der Verhältnisse, keine Vernünftige Komposition von solchen Verhältnissen hergestellt werden; weder konnten ihre Gesetzmäßigkeiten erkannt, geschweigedenn bewiesen werden, noch ließ sich eine geometrische Deutung für die Multiplikation erkennen. Aber gerade das ist in den Verhältnissen der musikalischen Intervalle, die manchmal selbst als *logoi* bezeichnet wurden, leicht abzulesen. Denn das Hinzufügen einer Quarte zu einer Quinte ergibt natürlich eine Oktave, entspricht aber nicht der Addition, sondern der Multiplikation ihrer Zahlenverhältnisse: $2{:}1 = 12{:}6 = 3{:}2 \times 4{:}3$.

In der Astronomie ist dies parallel der Fall. Interessant ist eben nicht die Betrachtung der Himmelskörper oder deren Berechnung, welche Zahlen ihnen also zugeordnet sind, sondern – genau anders herum – die Betrachtung der Zahlen selbst anhand der Gesetzmäßigkeiten, die sich dort zeigen. Auch hier lassen sich die Verhältnisse von Tagen zu den Monaten und zum Jahr wieder anthyphairetisch ausdrücken, aber zugleich in anderer Form, die in Fragmenten der vielen griechischen Kalender überliefert ist und die dann neuen Aufschluß über die Eigenschaften und Regularitäten der bisherigen Anthyphairesis liefert.

In bezug auf die Stereometrie schweigt sich Plato noch aus, da ja dieses Gebiet erst dem Erforschen vorgelegt ist, aber es läßt sich natürlich zusammen mit der Geometrie betrachten. Außerdem bewirkt auch hier, wie angedeutet, die Untersuchung neuartiger Verhältnisse, die durch die erweiterten geometrischen Figuren gegeben werden, vertiefte Einsicht in die *logistiké*.

Innerhalb der Geometrie aber ist offensichtlich, daß es Plato nicht an der Entwicklung von Meßtechniken gelegen ist oder an geeigneten Berechnungsverfahren, denn er schlägt ja gerade an dieser Stelle den Nutzen für die Kriegskunst aus, gleichsam symbolisch für jede Art von Anwendung, die höchstens Nebeneffekt sein kann. Außerdem zeigt die Selbstverständlichkeit, mit der die Geometrie zum Seienden gerechnet wurde – „*denn offenbar ist die Meßkunst die Kenntnis des immer Seienden*" (527b) -, daß es im Verständnis Platos um eine tiefere Erkenntnis geht, die aber nur wieder auf die Zahlen und deren

Verhältnisse gerichtet sein kann. Nun ja, und wie bereits ausführlich beschrieben, stellt natürlich die Geometrie die Quelle dar, aus der die Mathematiker gerade in ihrer *logistiké* schöpfen und Deutungen für die verschiedensten Zusammenhänge finden können.

Ein interessanter, ein wenig vorgreifender Satz findet sich in den Topoi des Aristoteles: „*Es gibt eine enge Verwandtschaft zwischen Dialektik und geometrischem Prozeß.*“[9]

Zuletzt in der Arithmetik fällt dies eigentlich sofort ins Auge, wiederholt Plato doch sogar ausdrücklich, „*wie herrlich sie ist und uns vielfältig nützlich zu dem, was wir wollen, wenn einer sie des Wissens wegen betreibt und nicht etwa des Handelns wegen*“ (525d). Jede andere Wissenschaft macht ja auch von ihr Gebrauch, benutzt ihre Objekte, die Zahlen, um Maße, Proportionen und Verhältnisse ausdrücken zu können.

Oder man vergleiche nur, wie Plato selbst gesellschaftliche Ereignisse mit Hilfe einer Zahl beschreibt, wenn er in seiner Untersuchung der Staatsverfassungen schreibt: „*Es hat aber das göttlich erzeugte einen Umlauf, welchen eine vollkommene Zahl umfaßt, das menschliche aber eine Zahl, in welcher... Diese gesamte geometrische Zahl entscheidet hierüber, über bessere und schlechtere Zeugungen.*“ (546b-d)

Und er formuliert sogar wörtlich: „ ... *bis sie zur Anschauung der Natur der Zahlen gekommen sind durch die Vernunft selbst*“ (525c).

Das also ist das erklärte Ziel all dieser Wissenschaften, die Erkenntnis der Zahlen, ihrer Eigenschaften, Wesenheiten und Beziehungen, „*wegen der Seele selbst und der Leichtigkeit ihrer Umkehr von dem Werden zum Sein und zur Wahrheit*“ (525c).

Nun sieht Plato also alle diese fünf Wissenschaften unter dem Aspekt der Mathematik, und es ist somit gerechtfertigt, sie alle als die Mathematik in seinem Lehrplan zu bezeichnen.

Aber die eigentliche Idee seines Lehrplanes geht noch weiter, und wir dürfen nicht vergessen, daß die Fragestellung doch lautete, „*welche Wissenschaft wohl ein solcher Zug sein könnte für die Seele von dem Werdenden zu dem Seienden*“ (521d). Man muß sich natürlich fragen, warum Plato solchen Wert auf die Zahlen legt, wo doch „*niemand sich ihrer recht als eines auf alle Weise zum Sein Hinziehenden bedienen*“ will (523a).

Einen Ansatzpunkt legt ein Interpretationsversuch von Harvey dar, der aufgrund einer Textstelle zu zeigen versucht, Plato und auch Archytas haben den Unterschied zwischen geometrischer und arithmetischer Gleichheit benutzt „*to discredit democracy*“, in der nach arithmetischem Prinzip einfach alle gleich gemacht werden, während doch eigentlich eine Beurteilung nach dem wirklichen Wert, repräsentiert in der geometrischen Gleichheit, die eigentlich wahre sei.[10] Egal, ob nun zutreffend oder nicht, jedenfalls würde eine solche Beschreibung gut in Platos Gedanken von Erkenntnis passen.

Auch die Zahlen sind nicht der letzte Grund seiner Anordnung der Wissenschaften.

Das könnten sie gar nicht, da auch sie immer noch auf Hypothesen beruhen: Gerade die Einheit, die Grundlage jeder Zahl, kann mathematisch nicht mehr erfaßt werden und wird einfach als gegeben vorausgesetzt. Begann nicht auch die Darlegung der antiken

9 Aristoteles, Topoi, VIII3, 159a2, – nach Fowler, 18

10 Harvey, Two kinds of equality, beruhend auf Gorgias, 508a – nach Fowler, 202

Zahlentheorie vorhin mit den Worten „*zu anfangs hat man eine Einheit*"?

Und, so Plato, die Mathematiker „*suchen von Voraussetzungen aus, nicht zum Anfange zurückschreitend*" (510b).

Genauso bildeten doch im Liniengleichnis die *mathemata* nur den Übergang vom *kosmos horaton* zum *kosmos noéton*, vom Sichtbaren zu den Intelligibilia. Diese abstrahierten Gegenstände, mit denen sich die Mathematik beschäftigt, standen quasi zwischen den eigentlichen Ideen und den sichtbaren Objekten, sie waren das allererste Abbild, – aber eben doch nur Abbild, nicht Sein selbst.

Der entscheidende Punkt in der Konzeption des Lehrplanes liegt letztlich in der Tatsache des Zusammenhangs all der Teilgebiete.

„*Ich meinesteils denke, wenn die Bearbeitung der Gegenstände, die wir bis jetzt durchgegangen sind, auf deren Gemeinschaft unter sich und Verwandtschaft gerichtet ist und sie zusammengebracht werden, wie sie zusammengehören, so kann diese Beschäftigung schon etwas beitragen zu dem, was wir wollen, und ist dann keine unnütze Mühe; wenn aber nicht, so ist sie unnütz.*" (531d)

In seiner Rekonstruktion der Mathematik um Plato zeigt Fowler, daß „*die Einheit von Platos Lehrplan dann abhängen wird von der Fähigkeit, sich frei in diesen verschiedenen Ideen von Zahlenverhältnissen [in der Arithmetik, der Geometrie, der Astronomie, der Musiktheorie] zu bewegen; wir werden sehen, wie das den Mathematikern trickreiche Probleme stellt und ihr Interesse vom speziellen Kontext der Astronomie und der Musik ablenkt hin zu abstrakten Problemen*"[11].

So war es denn auch keine Willkür, daß Plato auffällig darum bemüht war, einen soliden Zusammenhang zwischen all den Wissenschaften zu finden, der erst wirkte, als würde er nur zur Begründung jeder einzelnen Wissenschaft gebraucht, der aber in Wahrheit zeigen sollte, wie die Lernenden zu einer Zusammenschau, zur *synopsis*, geführt werden können, die es ihnen ermöglichen soll, wie im Höhlengleichnis die Sonne als die Ursache alles Sichtbaren zu verstehen.

Und was hier noch wie zur Übung angelegt ist, sollen sie dann anwenden können in der Dialektik, die endlich hinaufführen wird bis zur Erkenntnis der Idee des Guten als Ursache jeglichen Erkennens.

11 Fowler, 113