Universität Marburg
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Böhmer

SS 2000

Übungen zur Vorlesung: Numerik I

Blatt 2

Abgabe: Mitwoch den 26.4.2000, 16:00 Uhr im Tutorium,
Programmieraufgaben eine Woche später

4. Das Produkt einer Matrix $A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{l\times m}$ mit einer Matrix $B = (b_{kj}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ erhält man als $\boxed{\text{M}}$

$$C = AB = \left(c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right)_{i,j=1}^{l,n} .$$

Es sind drei Schleifen über i, j, k nötig. Der innerste Befehl hat immer die Form $c_{ij} := c_{ij} + a_{ik}b_{kj}$. In der innersten Schleife kann i, j oder k variieren. Je nach Abfolge der Schleifen gibt es also insgesammt sechs verschiedene Algorithmen, die sich durch den Zugriff auf die Matrizen A, B und C (spaltenweise, zeilenweise oder gar nicht) und durch die innere Operation (Skalarprodukt, dyad. Produkt oder *saxpy*) während der Berechnung unterscheiden. Charakterisieren Sie die sechs genannten Algorithmen, indem Sie zeigen, welche Art Zugriff und welche innere Operation sie benötigen.

5. Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Werte für k, α, für die das Gleichungssystem (1) keine eindeutige Lösung besitzt. Für die anderen Werte von k, α soll mit Hilfe der gleichen Rechnung die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ angegeben werden. Wie sehen die Faktoren L und R der LR-Zerlegung aus? $\boxed{\text{S}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \tag{1}$$

6. Aufgrund der endlichen Dimension sind in K^n alle Normen äquivalent und es gibt Konstanten c_{pq} mit $\boxed{\text{M}}$

$$\|x\|_p \le c_{pq}\|x\|_q \quad \forall x \in K^n, \quad p, q \ge 1 \tag{2}$$

Bestimmen sie für die Fälle $p, q = 1, 2, \infty$ die jeweiligen Konstanten. Welche Probleme ergeben sich für wachsende Dimension?

7. a) Testen Sie, bis zu welchem Exponenten numerisch die Beziehung $1+2^{-l} > 1, \quad l \in \mathbb{N}$ gilt. Bis auf wieviele Dezimalstellen läßt sich damit exakt rechnen? $\boxed{\text{P}}$

   b) Schreiben Sie ein Unterprogramm

```
procedure gauss(n: integer; var A: matrix; var b: vektor;
var singulaer: boolean);
```

   das den Gaußalgorithmus zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $n \times n$ Matrix A ohne Pivotisierung ausführt. Die Durchführbarkeit des Algorithmus ist, beim Pivot-Element $A[i,i]$ mit der Bedingung $1 + abs(A[i,i]) = 1$ zu prüfen und im Indikator 'singulär' zurückzumelden. Testen Sie das Unterprogramm mit der Matrix (1) und k nahe kritisch (siehe Aufg. 5.) und mit

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 8 & -3 & 4 \\ -6 & 4 & -8 & 0 \\ 3 & -8 & 3 & a \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{für } a := -4 \text{ und } 2. \tag{3}$$

Geben Sie noch andere Werte für a an, bei denen das Unterprogamm die Eigenschaft 'singulär' zurückliefert.

c) Zu einem späteren Zeitpunkt soll als zusätzliche Programmieraufgabe zu dieser Prozedur eine Pivotisierung ergänzt werden.