Universität Marburg SS 2000
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Böhmer

Übungen zur Vorlesung: Numerik I

Blatt 3

Abgabe: Mittwoch den 3.5.2000, 16:00 Uhr im Tutorium,
Programmieraufgaben eine Woche später

8. Zeigen Sie, daß für die Norm der Inversen einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ folgende Abschätzungen gelten: $\boxed{2M}$

   (a) Falls $\|Ax\| \geq a\|x\|$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $0 < a \in \mathbb{R}$, so folgt: A ist regulär und $\|A^{-1}\| \leq a^{-1}$.

   (b) Falls A streng diagonaldominant ist, gilt: $A^{-1} \geq \min_{i=1,\dots,n}\{|a_{ii}| - \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\}$.

9. Die Input - Output - Analyse führt auf ein lineares Gleichungssystem $(I-B)x = y$, wobei die Matrix $B = (b_{ij})$ nichtnegative Elemente besitzt, $b_{ij} \geq 0,\ i,j = 1,\dots,n$. Auch die rechte Seite ist nichtnegativ, $y_i \geq 0,\ i = 1,..,n$. Zeigen Sie, daß unter der Voraussetzung $\rho(B) < 1$ die inverse Matrix $(I-B)^{-1}$ elementweise nichtnegativ ist und damit auch die Lösung x. $\boxed{3M}$

10. Die reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit LR-Zerlegung $A = LR$ werde um eine Zeile und Spalte erweitert zu $\boxed{4S}$
$$\hat{A} := \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & \delta \end{pmatrix}, \quad b, c \in \mathbb{R}^n,\ \delta \in \mathbb{R}.$$

    a) Man bestimme die LR-Zerlegung von $\hat{A}$ mit einer Matrix $\hat{L}$ der Form
$$\hat{L} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ x^T & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

    b) Damit zeige man, daß $\hat{A}$ genau dann regulär ist, wenn $\delta - c^T A^{-1} b \neq 0$.

    c) Im singulären Fall bestimme man eine Lösung $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ der homogenen Gleichung $\hat{A}y = 0$.

11. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ kann in Blockform als $\boxed{4M}$
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, A_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}, A_{22} \in \mathbb{R}^{(m-n)\times(m-n)}$$
dargestellt werden. Nehmen Sie an, daß A nicht singulär ist, also der Gauß Algorithmus angewandt werden kann.

 a) Verifizieren Sie die Formel
$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \tag{1}$$
zur "Elimination" des Blockes A_{21}. Die Matrix $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ heißt *Schur-Komplement* von A_{11} in A.

b) Angenommen A_{21} wird durch die ersten n Schritte des Gauß-Algorithmus eliminiert. Zeigen Sie, daß der untere rechte $(m-n)\times(m-n)$ Block des Ergebnisses wieder $A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ ist.